Constantin Vernicos

Volume et profil isopérimétrique asymptotiques des tores

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 43-47
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__43_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **18** (2000) 43–47

VOLUME ET PROFIL ISOPÉRIMÉTRIQUE ASYMPTOTIQUES DES TORES

Constantin VERNICOS

1. Introduction

On s'intéresse aux tores riemanniens, plus exactement on va se placer sur leur revêtement universel, munis de la métrique relevée :

$$\begin{array}{c}(\mathbb{R}^n,\tilde{g})\\ \downarrow\\ (\mathbb{T}^n,g)\end{array}$$

On est donc ramené à considérer $\mathbb{R}^n$ munis d'une métrique périodique, par l'action de $\mathbb{Z}^n$. La distance $\tilde{d}$ ainsi obtenue est invariante par l'action diagonale de $\mathbb{Z}^n$ *i.e.* :

$$\tilde{d}(k+x,k+y)=\tilde{d}(x,y),\quad \forall\,(x,y,k)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}^n$$

où il faut comprendre le «+» comme l'action de $\mathbb{Z}^n$.

De la compacité du Tore on en déduit l'équivalence de toutes ces distances sur $\mathbb{R}^n$.

Parmi toutes ces métriques, il en est une famille plus agréable que les autres : les métriques plates sur le tore, *i.e.* celles qui se relèvent en métriques euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$. Mais ce n'est pas leur seule particularité, et dans notre exposé nous allons montrer qu'elles sont les cas limites d'un certain nombre de constantes associées aux tores.

2. Survol des métriques périodiques

2.1. Volume asymptotique des métriques périodiques

Théorème et définition 2.1. — *Soit $\mathbb{T}$ un tore riemannien de dimension n, fixons un point $x\in\tilde{\mathbb{T}}$ de son revêtement universel et considérons la boule de rayon r, $B(x,r)$*

Classification math. : 53C20, 53C60.

alors la limite

$$VA(\tilde{\mathbb{T}}) = \lim_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{Vol} B(x,r)}{r^n}$$

existe. Elle ne dépend pas du point x et s'appelle le volume asymptotique *de* $\tilde{\mathbb{T}}$.

L'existence de cette limite fait l'objet de la thèse de troisième cycle de Pansu [5], où il démontre en fait l'existence de telles limites dans le cas plus général des nilvariétés. Il faudra attendre 1994 pour avoir des précisions dans le cas des tores :

THÉORÈME 2.2 (Burago,Ivanov [1]). — *Soit* $(\mathbb{T},g)$ *un tore riemannien, alors si on note* b_n *le volume euclidien de la boule unité euclidienne, on a*

1. $VA(\tilde{\mathbb{T}}) \geqslant b_n$.
2. *En cas d'égalité le tore est plat.*

Ceci n'est pas sans rapport avec les travaux de Cheeger et Coldings. En effet l'existence du volume asymptotique se fonde sur le fait que la famille $(\mathbb{R}^n, \varepsilon^2\tilde{g})$ converge en distance de Gromov-Hausdorff pointé vers la variété finslerienne $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty)$ où la norme est la norme stable, tel que définie par Federer [3], puis Gromov [4]. Ainsi si l'on pouvait appliquer les résultats de Cheeger et Coldings, cela reviendrait à comparer les volumes de boules unités euclidiennes, et d'une norme. De plus, si la limite est euclidienne, leur résultat permettrait aussi de conclure à la platitude du tore.

2.2. Profil isopérimétrique des métriques périodiques

DÉFINITION 2.3. — *Soit V une variété riemannienne. Pour* $\tau > 0$, *on note* $I(\tau)$ *la borne inférieure des volumes des bords des sous-variétés compactes de codimension* 0 *de V de volume* τ. *La fonction I s'appelle le* profil isopérimétrique *de V.*

Comme pour le volume on s'intéresse au comportement asymptotique du profil isopérimétrique du revêtement des tores. Par comparaison avec une métrique euclidienne on sait qu'il existe deux constantes c et C telles que

$$c\tau^{n-1/n} \leqslant I(\tau) \leqslant C\tau^{n-1/n}, \quad \tau \to +\infty$$

il est naturel de se demander si l'on ne peut pas trouver un équivalent, *i.e.* une limite à $I(\tau)/\tau^{n-1/n}$ en $+\infty$ que l'on nomme alors constante de profil isopérimétrique asymptotique et que l'on note $c_\infty(g)$, et si par analogie avec le volume elle est majorée par la constante du cas plat. La réponse est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.4 (Burago, Ivanov [2], Pansu [6]). — *Si* $n \geqslant 3$, *alors il existe des métriques* $\mathbb{Z}^n$*-périodiques sur* $\mathbb{R}^n$ *avec une constante de profil isopérimétrique asymptotique arbitrairement grande.*

Donc le résultat tel qu'on l'aurait voulu n'existe pas, mais il y a tout de même des résultats positifs :

THÉORÈME 2.5 (Burago, Ivanov [2]). — *Si* $(\widetilde{\mathbb{T}},\tilde{g})$ *est le revêtement universel d'un tore conformément plat, alors* $c_\infty(g) \leqslant c_\infty(eucl)$ *l'égalité ayant lieu si et seulement si la métrique est plate.*

Donc en particulier pour la dimension 2 la réponse est positive, puisque toutes les métriques sont conformément plates. En précisant ce résultat on obtient tout de même une réponse positive

THÉORÈME 2.6 (Pansu [6]). — *Si* $(\widetilde{\mathbb{T}},\tilde{g})$ *est le revêtement universel d'un tore, alors il existe un invariant conforme, que l'on note* $V(g)$ *tel que :*

$$c_\infty(g) \leqslant c_\infty(eucl)V(g)$$

l'égalité ayant lieu uniquement si g est plate.

La conclusion dans ce second cas est obtenue grâce au théorème (2.2). Cette majoration n'est donc optimale que dans la classe des métriques conformément plates, on peut néanmoins se demander si cette constante est la borne-sup de chaque classe conforme, la rendant ainsi optimale.

3. Profil isopérimétrique des variétés finslerienne

Dans son article, Pansu compare le profil isopérimétrique asymptotique du revêtement des tores au profil isopérimétrique d'une variété finslerienne, en fait la métrique de Finsler de cette dernière est même invariante par translation.

Pour cela il faut donner un sens au volume des bords. Il faut une généralisation qui coïncide avec la notion usuelle, quand on a une variété riemannienne.

3.1. Volume des bords

On considère donc une variété munie d'une métrique finslerienne F, *i.e.* la donnée d'une norme en chaque espace tangent (non nécessairement euclidienne comme dans le cas riemannien), mais aussi d'une forme volume ω. La forme volume nous donnera le volume des domaines. Reste à définir le volume de leur bord. Pour cela on commence par définir une norme sur les 1-formes différentielles à support compact comme suit :

$$\|\phi_x\|_F = \sup\{|\phi_x(e)| \mid \forall e \in T_xM, |F(x,e)| \leqslant 1\}$$

puis on prend le sup sur toute la variété. On définit alors *l'intégrand de Poincaré* comme la norme dite *poincaré-dual* de cette norme sur les $(n-1)$-formes à support compact comme suit :

$$\|\psi\|_F^* = \sup\{\psi \wedge \phi/\omega \mid \|\phi\|_F \leqslant 1\}$$

pour enfin définir le volume du bord par

$$A(\partial D) = \sup \left\{ \int_D d\psi \mid \|\psi\|_F^* \leqslant 1 \right\} .$$

L'intérêt de cette définition réside dans le théorème suivant qui est l'analogue finslerien de l'inégalité isopérimétrique sur $\mathbb{R}^n$

THÉORÈME 3.1 (H. Brunn). — *Soit R un espace vectoriel normé de dimension n muni d'un élément de volume tel que la boule unité soit de volume* 1. *On munit $\Lambda^{n-1}R^*$ de l'intégrand de Poincaré. Le profil isopérimétrique de R est alors $I(\tau) = n\tau^{n-1/n}$.*

3.2. La variété limite

On va donc comparer le profil isopérimétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique relevée d'un tore, au profil isopérimétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme limite (la norme stable par identification), et d'un élément de volume invariant par translation et normalisé afin qu'un domaine fondamental soit de volume 1. Notons I_∞ ce profil et I le profil de $\mathbb{R}^n$. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2 (Pansu [6]). — *Soit T un tore de dimension n muni d'une métrique finslerienne, d'un élément de volume ω et de l'intégrand de Poincaré correspondant, avec les notations ci-dessus :*

$$\lim_{\tau \to +\infty} I(\tau)/I_\infty(\tau) = \left(\int_T \omega \right)^{1-n/n}$$

Ceci permet de conclure, puisqu'on obtient un équivalent de $I(\tau)$ en combinant ce théorème au théorème 3.1. En plus cette limite est agréable si on la compare au résultat de Pansu sur le volume asymptotique. En effet ce dernier est de la forme

$$\mathrm{VA}(\tilde{\mathbb{T}}) = \mathrm{Vol}_g T \frac{\mu(B_\infty(1))}{\mu(T)}$$

où $B_\infty(1)$ est la boule unité pour la norme stable et μ une mesure invariante par translation ; ce qui nous permet d'obtenir l'inégalité suivante

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B_g(r))}{r^{n-1}} \geqslant n \left(\frac{\mu(B_\infty(1))}{\mu(T)} \right)^{n-1/n} = A(\partial B_\infty(1)) .$$

Ainsi, si le profil asymptotique des boules riemanniennes existe, il ne serait pas surprenant qu'il soit égal au profil isopérimétrique des boules de la norme stable. Montrant encore une fois que la géométrie à l'infini sur le revêtement d'un tore se lit sur $(R^n, |\cdot|_\infty)$. En tout cas ce résultat est bien agréable, au sens où il ramène l'étude du profil asymptotique au profil de la variété limite.

Bibliographie

[1] D. BURAGO and S. IVANOV. On asymptotic volume of tori. *GAFA*, 5(5):800–808, 1995.

[2] D. BURAGO and S. IVANOV. On asymptotic isoperimetric constant of tori. *GAFA*, 8:783–787, 1998.

[3] Herbert FEDERER. *Geometric Measure Theory*. Springer Verlag, 1969.

[4] PANSU GROMOV and LAFONTAINE. *Structures metriques pour les variétés riemanniennes*. Cedis/Fernand Nathan, 1981.

[5] Pierre PANSU. *Geometrie du groupe de Heisenberg*. Thèse de docteur 3ème cycle, Université Paris VII, 1982.

[6] Pierre PANSU. Profil isopérimétrique, métriques périodiques et formes d'équilibre des cristaux. prépublication d'orsay, 1999.

Constantin VERNICOS
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
Constantin.Vernicos@ujf-grenoble.fr