Sylvain Barré

Sur les polyèdres de rang 2

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 99-104
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__99_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (99–104)

SUR LES POLYÈDRES DE RANG 2

Sylvain BARRÉ

Considérons une variété riemannienne M à courbure négative ou nulle. À tout vecteur $v \in TM$, on peut associer un entier noté $rang(v)$ qui est égal à la dimension de l'espace des champs de Jacobi parallèles le long de la géodésique définie par v. Le rang de M est le minimun de tous les $rang(v)$. Il y a une dizaine d'années, W. Ballmann démontre (voir [BurS]) que si M est irréductible et de rang $\geqslant 2$ alors, le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est un espace symétrique. Considérons maintenant un complexe simplicial fini P de dimension 2, dont les faces sont réalisées par des triangles euclidiens. Supposons ce complexe sans bord et à courbure $\leqslant 0$ (i.e. il n'y a pas de cône plongé à courbure > 0). On dira que ce polyèdre P est de rang $\geqslant 2$ si tout germe de géodésique est contenu dans un germe de plat. On démontre alors le théorème suivant (voir [Ba1]) :

THÉORÈME 1. — *Si P est un polyèdre de rang $\geqslant 2$, alors $\tilde{P}$ est un immeuble de Tits.*

Les immeubles de Tits apparaissent donc ici comme les analogues singuliers des espaces symétriques de rang $\geqslant 2$. Il y a alors deux motivations pour pousser plus loin l'étude des polyèdres de rang 2.

D'une part, la théorie des espaces symétriques nous dit qu'un espace symétrique de rang $\geqslant 2$ est le quotient d'un groupe de Lie G par un sous-groupe compact maximal K. En particulier, un espace symétrique est homogène. Du côté singulier, certains immeubles de Tits euclidiens de rang 2 sont associés à des groupes de Lie p-adiques. Par exemple, $SL_3(\mathbb{Q}_2)$ opère fortement transitivement sur un immeuble triangulaire d'ordre 2 (les faces de cet immeuble sont des triangles équilatéraux et une même arête est incidente à trois faces). Mais il existe des immeubles exotiques, c'est-à-dire qui ne soient associés à aucun groupe de Lie p-adique. Par exemple, la plupart d'entre eux ne sont pas homogènes (i.e. n'admettent pas de groupe qui opère transitivement sur l'ensemble de leurs sommets). On peut se demander alors si tout immeuble qui admet un quotient compact est classique. Dans cette direction, dans [CMSZ], il est donné des exemples

Classification math. : 51E24.

d'immeubles triangulaires d'ordre 3 exotiques qui admettent un sous-groupe d'isométries qui opère simplement transitivement sur les sommets. Mais on peut encore aller plus loin. Un immeuble classique admet un action fortement transitive d'un sous-groupe d'isométries (i.e. une action transitive sur les couples (chambre $\subset$ appartement)). Vient alors la question ; le revêtement universel d'un polyèdre de rang 2 admet-il une telle action? Dit autrement : est-il associé à une paire (B, N) (voir [Bro])? Et plus simplement, un tel immeuble est-il nécessairement homogène? Nous avons obtenu un exemple qui répond par la négative à toutes ces questions.

La seconde motivation se trouve dans la théorie des groupes. J. Tits a introduit ses immeubles pour comprendre certains groupes classiques. Par exemple, savoir que $SL_2(\mathbb{Z})$ opère sur un arbre, donne bien des informations sur ce groupe. Certains groupes finis simples exceptionnels sont aussi réalisés comme sous-groupes d'isométries d'immeubles bien choisis. Plus récemment, un autre intérêt pour ces groupes est apparu. On savait que $SL_3(\mathbb{Z})$ ou $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ ont la propriété (T) de Kazdhan. Et il y a peu, A. Żuk a démontré que plus généralement, le π_1 d'un polyèdre de rang 2 avait aussi cette propriété (qu'il soit classique ou non). Ainsi, le π_1 d'un polyèdre de rang 2 est un groupe intéressant, d'autant plus s'il est exotique.

Dans une première partie, on décrit diverses méthodes pour construire des immeubles exotiques, suivant les valeurs décroissantes de l'ordre q ($q+1$ étant le nombre de faces incidentes à une même arête). Dans la seconde partie, on se place dans le cas $q = 2$ et on montre qu'il est possible de construire des immeubles dont les boules de rayon deux sont prescrites. Enfin, la dernière partie presente un polyèdre exotique qui répond à bien des questions.

1. Comment construire des immeubles exotiques

On se limite au cas des immeubles triangulaires. Dans [Ba2], on décrit comment sont construits tous les immeubles triangulaires. Plus la géométrie locale sera complexe, plus le caractère non classique va pouvoir se localiser. Rappelons que le link en un sommet d'un immeuble triangulaire est le graphe d'incidence d'un plan projectif. On démontre que quel que soit le plan projectif, il est possible de créer un immeuble qui le réalise comme link. Voilà la manière la plus simple de fabriquer des immeubles exotiques, mais au prix d'une grande complexité locale (le plus petit plan projectif exotique contient au moins 9 points). Dès $q \geqslant 4$, il existe plus de bijections sur un ensemble à quatre éléments que de transformations affines d'une droite comportant quatre points, et ce fait entraine l'existence d'immeubles qu'on qualifie de non *réguliers.* Cette propriété de régularité est vérifiée par les immeubles associés à une paire (B, N) et se localise au voisinage d'une arête.

Pour $q = 3$, il faut regarder globalement les boules de rayon 2 pour voir apparaître le caractère non classique (voir [CMSZ]). Rappelons que le bord à l'infini d'un immeuble triangulaire est, comme les links, le graphe d'incidence d'un plan projectif. Dans le cas des immeubles classiques, ce plan projectif est classique (i.e. obtenu à partir d'un corps). Rappelons encore que la propriété de Desargues distingue les plans projectifs classiques des autres (qualifiés d'exotiques). C'est précisément cette propriété du plan projectif à l'infini que nous parvenons à percevoir à des niveaux finis. Ainsi, nous pouvons construire, dès $q \geqslant 3$, des boules de rayon 2 qui nient la propriété de Desargues ; c'est-à-dire qui impose au plan projectif à l'infini de ne pas vérifier cette propriété, donc de ne pas être classique.

Il reste le cas $q = 2$, le plus simple localement. Le link est alors associé au plan projectif $P^2(\mathbb{F}_2)$, il est représenté sur la figure 1. Ce graphe comporte 14 sommets : 7 points et 7 droites et il est régulier de valence 3 : il y a 3 points sur chaque droite et par un point passent 3 droites.

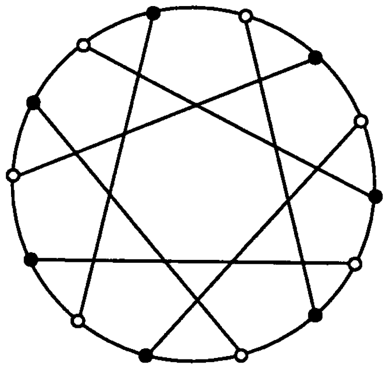


Figure 1

On démontre que dans ce cas, pour parvenir à nier la propriété de Desargues, il faut regarder les boules de rayon $\geqslant 3$. L'étude des immeubles d'ordre 2 semble donc être la plus délicate, bien qu'étant celle dont la complexité locale soit la plus simple.

2. Prescription des boules de rayon 2

Nous nous sommes beaucoup intéressés au cas $q = 2$. En particulier, nous avons cherché tous les polyèdres à un sommet dans ce contexte. Je tiens ici à remercier G. Robert pour son aide dans ces calculs délicats. Nous en avons trouvé sept. Cinq d'entre eux avaient déjà été obtenus dans [CMSZ] et malheureusement, on démontrera plus tard que les deux nouveaux sont aussi classiques (ils ont des revêtements doubles communs avec deux classiques). Bien sûr, cela n'arrêtait pas les recherches dans ce domaine, il fallait passer aux polyèdres à deux sommets. Mais avant cela, influencé par les idées de Świątkowski dans [S], je me demandais si le fait d'imposer que toutes les boules de rayon deux soient identiques, dans le cas $q = 2$, n'impliquait pas que l'immeuble soit classique. Nous avons obtenu, en particulier, le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Il existe une infinité non dénombrable d'immeubles triangulaires d'ordre 2 exotiques ayant un seul type de boules de rayon deux.*

Ainsi, avoir un seul type de boule de rayon deux n'interdisait pas d'être exotique. Mieux que cela, nous avons obtenu un résultat qui affirme qu'il est possible de prescrire de façon quelconque les types de boules de rayon deux. Rappelons qu'il y a exactement deux types de boules de rayon deux dans ce contexte (c'est un théorème de J. Tits). Par exemple, on peut construire un immeuble dont le bicoloriage donné par le type de la boule de rayon deux, fournisse dans chaque plat un pavage hexagonal (voir la figure 2).

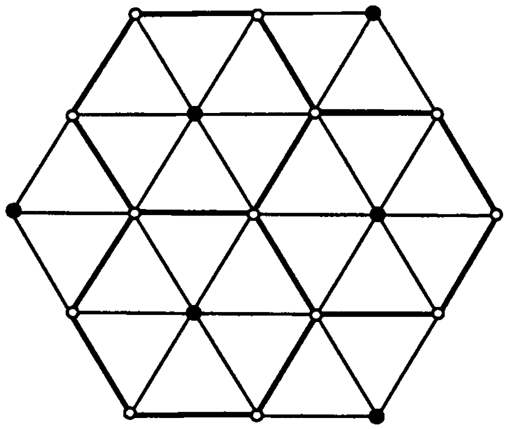


Figure 2

Peut-être existe-t-il un polyèdre à trois sommets dont l'un est d'un type et les deux autres de l'autre et dont le revêtement universel soit comme décrit précédemment.

Mais puisque nous travaillons à la main, nous nous sommes d'abord intéressés au cas des polyèdres à deux sommets. Nous avons obtenu un résultat très riche d'enseignements.

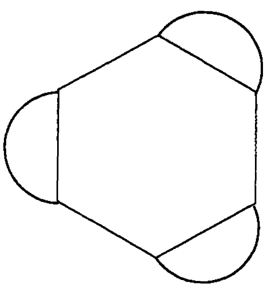
3. Un polyèdre exotique

Considérons un polyèdre à deux sommets. Appelons *plan médian* le lieu des points équidistants de chacun des sommets. Il s'agit d'un graphe dont les arêtes sont bicolorées suivant leur correspondance avec un arête du link d'un sommet ou de l'autre. L'idée initiale était de considérer des revêtements doubles de polyèdres à un sommet, de les couper suivant leur plan médian et de les recoller ensuite différemment en mélangeant éventuellement les *briques* (ou $1/2$ revêtements doubles) correspondant au corps $\mathbb{Q}_2$ avec celles correspondant au corps $\mathbb{F}_2((t))$. Dans [Ba3], on décrit ces exemples, mais on ne sait pas encore (il faudrait aller voir la boule de rayon 4) si tous les exemples obtenus sont ou non classiques.

Nous avons alors cherché parmi les polyèdres qui ne sont pas revêtements doubles. Pour s'assurer de cette propriété, nous nous limitons aux polyèdres à deux sommets dont le plan médian n'admet pas d'automorphisme qui échange les couleurs. (Rappelons qu'un revêtement double est galoisien, ce qui implique que son plan médian admet un tel automorphisme). Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Il existe un immeuble triangulaire X, exotique d'ordre 2, qui admet un quotient à deux sommets. Ces deux sommets n'ont pas mêmes boules de rayon deux, et de plus $\pi_1(P)$ est d'indice fini (6 ou 12) dans le groupe des automorphismes de X.*

Pour les immeubles associés à une paire (B, N), le sous-groupe des isométries qui fixent un sommet est infini et non dénombrable ($SL_3(\mathbb{Z}_2)$ par exemple). Pour le polyèdre que nous avons obtenu, la raison fondamentale qui impose un indice fini se trouve dans l'arrangement des sommets noirs en plats parallèles dans X. La figure 3 représente avec les mêmes conventions que dans [Ba2] le polyèdre P. À coté, on a représenté son plan médian : il s'agit d'un cycle de longueur 6 d'une couleur et de trois arêtes de l'autre.



Plan médian

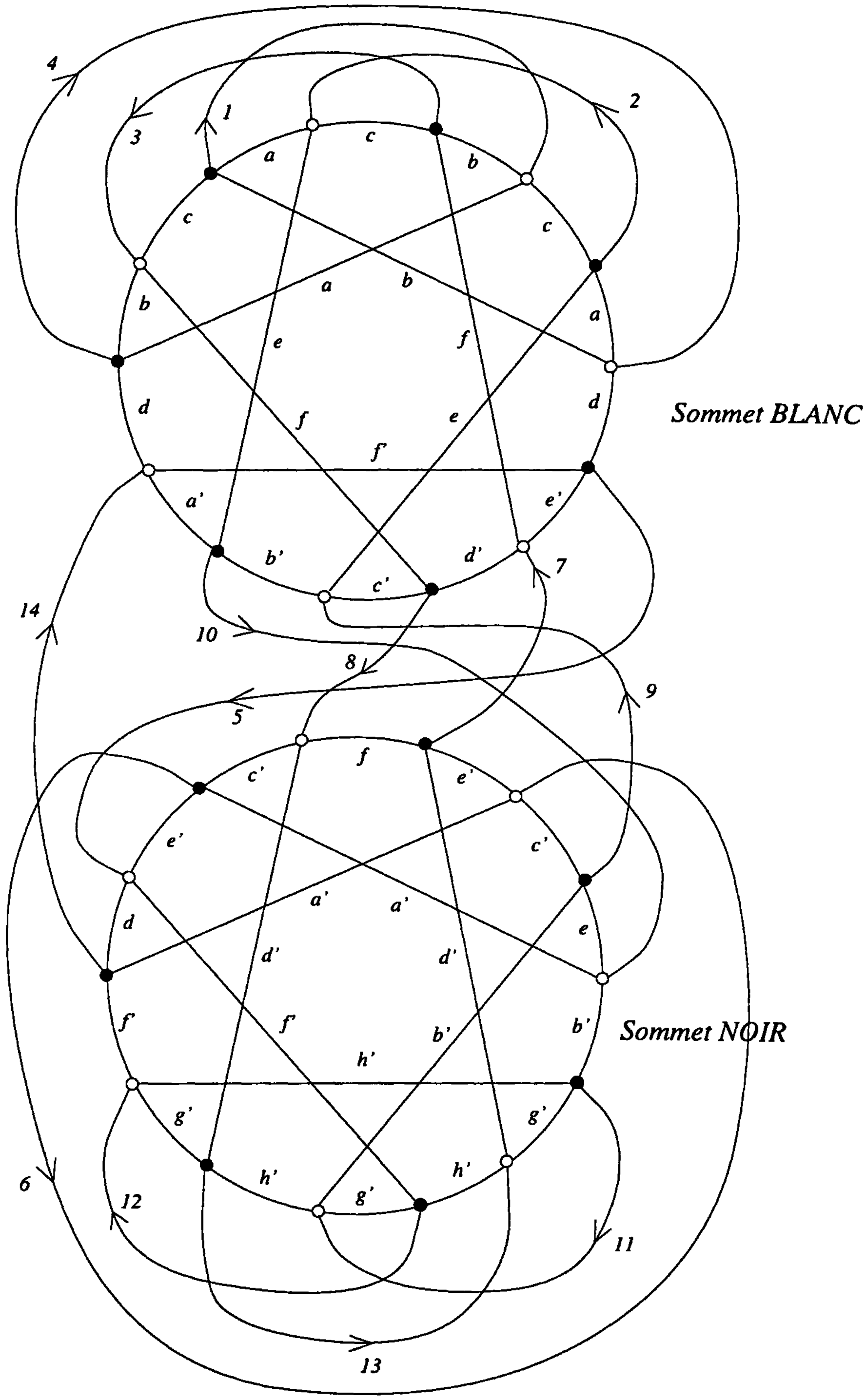


Figure 3

Références

[A] E. Artin. — *Algèbre géométrique*, Bordas, Paris, 1978.

[Ba1] S. Barré. — *Polyèdres finis de dimension 2 à courbure négative ou nulle et de rang 2*, Annales de l'Institut Fourier, T45, 1995.

[Ba2] S. Barré. — *Polyèdres de rang deux*, thèse, E.N.S. Lyon, décembre 96.

[BB] W. Ballmann, M. Brin. — *Orbihedra of nonpositive curvature*, Publications Mathématiques de l'IHES, **82**, 1995.

[Bro1] K.S. Brown. — *Buildings*, Spinger-Verlag, New york 1989.

[Bro2] K.S. Brown. — *Five lectures on buildings*, Congrès de Trieste 1990.

[BBE] W. Ballmann, M. Brin, P. Eberlein. — *Structure of manifolds of nonpositive curvature, I*, Annals of Mathematics, 122 (1985), 171–203.

[BBS] W. Ballmann, M. Brin, R. Spatzier. — *Structure of manifolds of nonpositive curvature, II*, Annals of Mathematics, 122 (1985), 205–235.

[BurS] K. Burns, S. Spatzier. *Manifolds of nonpositive curvature and their buildings*, Publications Mathématiques de l'IHES, $n°$65, 1987.

[BBuy] W. Ballmann, S. Buyalo. — *Nonpositive Curved Metrics on 2-Polyedra*, Bonn, février 1994.

[BH] M. Bridson, A. Haefliger, livre en préparation.

[CMSZ] D.I. Cartwright, A.M. Mantero, T. Steger, A. Zappa. — *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\tilde{A}_2$ I; The cases $q = 2$ and $q = 3$, II* Geom. Dedicata 47 (1993), n^o 2, 143–166–223.

[CMS] D.I. Cartwright, C.Mlotkowski, T. Steger. — *Property (T) and $\tilde{A}_2$ groups*, Ann. Inst. Fourier 44 (1994), n^o 1, 213–248.

[E] D.B.A. Epstein. — *Word Precessing in Groups*, Jones ans Bartlett Publishers; Boston, London; 1992.

[P] P. Pansu. — *Formule de Matsushima, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles*, Prépublication d'Orsay, 95–88.

[R] M. Ronan. — *Lectures on Buildings*, Perspectives in Mathematics, Vol. 7, Academic Press 1989.

[RT] M.A. Ronan, J. Tits. — *Building Buildings*, Math. Ann. 278, (1987) 291–306.

[S] J. Świątkowski. — *Polygonal complexes of nonpositive curvature: from local symmetry to global one*, Wroclaw 1994, preprint.

[T1] J. Tits. — *Spheres of Radius 2 in Triangle Buildings. I.* Finite geometies buildings and related Topics. Pingrie Park Conference, 1988.

[T2] J. Tits. — *A local approach to Buildings*, The Geometric Vein (Coxeter Festschrift), 519–547. Berlin, Heidelberg, New York; Springer 1981

[T3] J. Tits. — *On buildings and their Applications*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians; Vancouver, 1974.

[Z] A. Zuk. — *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 323. Série I, 1996.

Sylvain BARRÉ
École normale supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69364 LYON cedex 07 (France)
E-mail : sbarre@umpa.ens-lyon.fr