Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Philippe Castillon

Métriques à entropie topologique positive sur S^2

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 10 (1991-1992), p. 97-107

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__97_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1991–1992 (97–107)

MÉTRIQUES À ENTROPIE TOPOLOGIQUE POSITIVE SUR S^2

par *Philippe CASTILLON*

Introduction

On sait que le flot géodésique des variétés compactes à courbure négative a une entropie positive et qu'il est ergodique.

Donnay [D] puis Burns et Gerber [BG] ont montré que ce n'était pas un phénomène topologique en construisant sur S^2 des métriques à entropie positive et ergodiques. Mais ces propriétés sont obtenues grâce à la courbure essentiellement négative de leurs exemples.

On essaie de montrer ici qu'il ne s'agit pas d'un phénomène de courbure en construisant sur S^2 des métriques à courbure positive et entropie topologique positive. La question reste ouverte pour l'entropie de Liouville et pour l'ergodicité.

La méthode exposée est due à Knieper et Weiß.

Schéma de la preuve

On perturbe un ellipsoïde. Il y a dans le fibré unitaire tangent de l'ellipsoïde deux cycles pour le flot géodésique tels que toute trajectoire asymptote à l'un en $+\infty$ l'est à l'autre en $-\infty$.

Il en résulte que dans une bonne section de Poincaré, on a une double connexion hétéroclinique, c'est-à-dire deux points fixes hyperboliques tels que la variété stable de l'un soit la variété instable de l'autre, et réciproquement.

On perturbe alors la métrique de façon à ce que pour le système perturbé, l'application de Poincaré P_ε ait deux points fixes dont les variétés stables et instables

sont différentes et se croisent.

On peut alors déduire de cette situation que P_t a une entropie positive, et le théorème d'Abramov implique qu'il en va de même pour le flot.

Géométrie de l'ellipsoïde

Pour une étude complète de la géométrie de l'ellipsoïde, voir Klingenberg [K].

- Soient $0 < a_0 < a_1 < a_2$ et soit $M = \{\frac{x_0^2}{a_0} + \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} = 1\}$.
- Soit UM le fibré unitaire tangent à M.
- M est un ellipsoïde qui a quatre points ombilics de coordonnées

$$\left(\pm \frac{\sqrt{a_0}\sqrt{a_1 - a_0}}{\sqrt{a_2 - a_0}}, 0, \pm \frac{\sqrt{a_2}\sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_2 - a_0}} \right).$$

Les quatre ombilics sont situés sur l'ellipse moyenne $c = M \cap \{x_1 = 0\}$.

- Le système est complètement intégrable. Il existe une fonction $F : TM \to \mathbb{R}$ constante le long des lignes de champ du flot géodésique.

- Si une géodésique passe par un ombilic, elle passe aussi par l'ombilic opposé, et l'intervalle de temps entre deux ombilics est fixe et indépendant de la géodésique. La géodésique moyenne c est la seule géodésique périodique qui passe par des ombilics.

THÉORÈME. — *L'ellipse moyenne est hyperbolique.*

Démonstration. — Idée générale. On considère un paramétrage de c tel que $c(0) = (\sqrt{a_0}, 0, 0)$.

Soient $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ tels que les $c(t_i)$ soient les ombilics.

Soit $E = \{\text{champs de Jacobi orthogonaux tq } J(t_1) = 0\}$. E est un espace vectoriel de dimension 1.

Soit Φ_t le flot géodésique sur UM.

On montre alors que $\begin{pmatrix} J(t) \\ J'(t) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $T_{c(t)}\Phi_t$ de valeur propre $a < 1$.

L'autre valeur propre est alors $\frac{1}{a} > 1$ et c est hyperbolique. Cela montre aussi que $\begin{pmatrix} J(t) \\ J'(t) \end{pmatrix}$ est tangent en $c(t)$ à $W^s(c)$ (variété stable de c). ∎

Pour les détails de la démonstration, *cf.* [K].

THÉORÈME. — *Les géodésiques qui passent par les ombilics sont asymptotes à c.*

Démonstration. — On considère le même paramétrage que dans le théorème précédent.

Soit V la variété formée par les lignes de champ dans UM correspondant sur M aux géodésiques passant par $c(t_1)$ et $c(t_3)$. V est invariante par le flot.

Soit $c_s(t)$ une variation de $c_0 = c$ telle que pour tout s, $c_s(t)$ soit une géodésique passant par $c(t_1)$ et $c(t_3)$.

Soit $J(t) = \frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}$, $J \in E$ (J champ de Jacobi, et $J(t_1) = 0$).

$\begin{pmatrix} J \\ J' \end{pmatrix}$ est tangent à V le long de c et on a vu au théorème précédent que $\begin{pmatrix} J \\ J' \end{pmatrix}$ est tangent à $W^s_{(c)}$ le long de c.

Comme c est hyperbolique, on a forcément $W^s = V$, donc les géodésiques passant par $c(t_1)$ et $c(t_3)$ sont asymptotes à c.

Pour les géodésiques passant par $c(t_2)$ et $c(t_4)$, on fait la même chose en regardant l'ellipse c parcourue dans l'autre sens. ∎

THÉORÈME. — *Soient $+c$ et $-c$ les deux cycles de UM qui correspondent à l'ellipse moyenne sur M. Toute trajectoire asymptote à $+c$ en $+\infty$ l'est à $-c$ en $-\infty$.*

Démonstration. — Les géodésiques asymptotes à c passent par deux ombilics à intervalle de temps fixe T. On regarde comment agit Φ_{2T} sur les vecteurs tangents en l'un de ces ombilics.

Φ_{2T} peut être vu comme un difféomorphisme du cercle qui a deux points fixes, l'un correspondant à $+c$ et l'autre à $-c$. Le premier est attractif, donc le second est répulsif, et toute trajectoire asymptote à $+c$ en $+\infty$ l'est à $-c$ en $-\infty$. ∎

Ces trois théorèmes nous disent que $W^s(+c) = W^i(-c)$ et $W^i(+c) = W^s(-c)$, et que dans une bonne section, on aura une double connexion hétéroclinique.

Perturbation

On veut perturber la métrique de façon à ce que les variétés stables et instables de $+c$ et $-c$ se croisent. On commence par s'assurer qu'elles ne seront plus égales.

THÉORÈME. — *Soit H_0 une fonction telle que le flot de Hamiltonien H_0 ait deux cycles α et ω avec $W^i_0(\alpha) = W^s_0(\omega)$.*

Soit $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon H_1$ tel que Supp(H_1) *ne rencontre ni α, ni ω.*

On suppose qu'il existe F telle que $\{F, H_0\} = 0$, et une trajectoire $\{x(t)\} \subset W^i_0(\alpha) = W^s_0(\omega)$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{F, H_1\}(x(t))dt \neq 0.$$

Alors $W^i_\varepsilon(\alpha) \neq W^s_\varepsilon(\omega)$ pour ε assez petit.

Démonstration. — Supposons $W^i_\varepsilon(\alpha) = W^s_\varepsilon(\omega)$ pour des ε petits.

On peut construire $\{x_\varepsilon(t)\} \subset W_\varepsilon^i(\alpha) = W_\varepsilon^s(\omega)$ telles que $d(x_\varepsilon(t), x(t)) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ uniformément en t. En effet : le théorème de la variété stable nous dit que $W_\varepsilon^s(\omega)$ est C^∞-proche de $W_0^s(\omega)$; si on regarde les $W_\varepsilon^s(\omega)$ comme les graphes de fonctions sur $W_0^s(\omega)$, ces fonctions convergent vers 0 pour la norme C^∞. C'est des fonctions à support compact car H, est à Supp compact, donc en choisissant des bons x_ε, on aura la convergence uniforme en t.

Montrons alors que $\int_{-\infty}^{+\infty}\{F, H_1\}(x(t))dt = 0$. On a $F(\alpha(t)) = F(x(t)) = F(\omega(t)) = a$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{F, H_\varepsilon\}(x_\varepsilon(t))dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}F(x_\varepsilon(t))dt = \lim_{T\to\infty}\Big(F(x_\varepsilon(T)) - F(x_\varepsilon(-T))\Big) = 0$$

car

$$\{x_\varepsilon(t)\} \in W_\varepsilon^i(\alpha) = W_\varepsilon^s(\omega)$$

or

$$\{F, H_\varepsilon\} = \{F, H_0\} + \varepsilon\{F, H_1\} = \varepsilon\{F, H_1\}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{F, H_1\}(x_\varepsilon(t))dt = 0\,.$$

On peut se ramener à une intégrale sur un intervalle fini et par convergence uniforme, on a $\int_{-\infty}^{+\infty}\{F, H_1\}(x(t))dt = 0$. ∎

Construction de la bonne perturbation

On cherche à construire H_1 telle que $\int_{-\infty}^{+\infty}\{F, H_1\}(x(t))dt \neq 0$.

Soit π la projection de UM sur M.

Soit $\{x(t)\}$ une trajectoire asymptote à $+c$ en $+\infty$ et $-c$ en $-\infty$ telle que $\pi(x(0))$ ne soit pas sur l'ellipse moyenne c.

Soit N un voisinage de $\pi(x(0))$ sur M qui ne rencontre pas c et tel que $x(t)$ ne rencontre N qu'une fois.

On définit le système de coordonnées locales suivant :

$$G_N : [-\delta, \delta] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow N$$
$$(s, t) \longmapsto \pi[\Phi_F^t(x(s))]$$

où Φ_F^t est le flot de Hamiltonien F.

Soit

$$P_N : [-\delta, \delta] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$(s, t) \longmapsto t \cdot a(s) \cdot b(t)$$

a, b fonctions C^∞ positives à support compacts dans $[-\delta, \delta]$ et $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et telles que $a(0) = b(0) = 1$.

Soit $v \in TM$,

$$H_{1,N}(v) := \begin{cases} P_N\left[G_N^{-1}(\pi(v))\right] \cdot H_0(v) & \text{si } \pi(v) \in \mathrm{Im}(G_N) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$H_{\varepsilon,N} = H_0 + \varepsilon H_{1N} = \left(1 + \varepsilon P_N(G_N^{-1} \circ \pi)\right) H_0$.

Montrons que $H_{1,N}$ vérifie ce qu'on veut :

$$\{F, H_{1,N}\}(x(s)) = \frac{d}{dt} H_{1,N}\left(\Phi_F^t(x(s))\right)_{|t=0}$$

or

$$H_{1,N}\left(\Phi_F^t(x(s))\right) = 1 \cdot P_N(s,t) \quad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

donc

$$\begin{aligned} \{F, H_{1,N}\}(x(s)) &= [a(s)b(t) + t.a(s)b'(t)]_{|t=0} \\ &= a(s) \end{aligned}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{F, H_{1,N}\}(x(s))ds > 0.$$

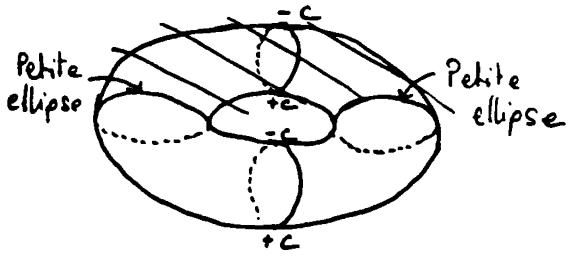
On fait la même chose pour une trajectoire $y(t)$ telle que $y(t)$ soit asymptote à $-c$ en $+\infty$ et à $+c$ en $-\infty$. On perturbe sur N' tq $N \cap N' = \emptyset$ et on prend

$$H_1 := H_{1,N} + H_{1,N'}$$

$$v \in TM, H_1(v) := \begin{cases} P_N\left(G_N^{-1}(\pi(v))\right) \cdot H_0(v) & \text{si } \pi(v) \in \mathrm{Im}(G_N) \\ P_{N'}\left(G_{N'}^{-1}(\pi(v))\right) \cdot H_0(v) & \text{si } \pi(v) \in \mathrm{Im}(G_{N'}) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

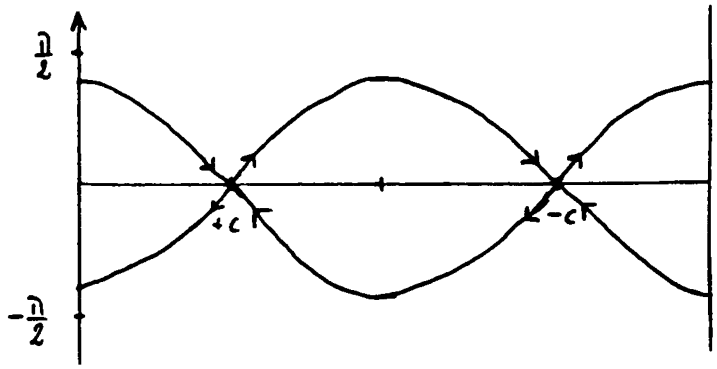
Croisement des variétés

On prend comme section de Poincaré le fibré unitaire tangent à M restreint à la petite ellipse. On a un tore sur lequel il y a deux lignes de champs qui correspondent à la petite ellipse. On veut l'éviter; on ne prend que la moitié du tore.



Sur le tore entier, $+c$ et $-c$ sont représentés par deux 2-cycles pour l'application de Poincaré, en ne gardant qu'une moitié, on a deux points fixes. On est donc sur un anneau.

Pour le système non perturbé, on a la situation suivante :



Pour montrer que sous la perturbation les variétés stables et instables se croisent, on veut appliquer le lemme et la proposition suivants :

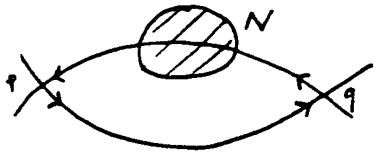
LEMME. — *Soit $f : X^2 \to X^2$ un difféomorphisme qui préserve une 2-forme ω et qui ait une double connexion hétéroclinique.*

Soient p et q les points fixes de f.

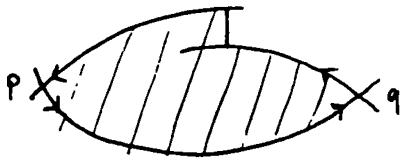
Soit N un ensemble tel que $N \cap \{p, q\} = \emptyset$, $N \cap W^s(p) \neq \emptyset$ et $N \cap W^s(q) = \emptyset$.

Soit f_ε une déformation de f à support dans N qui préserve une 2-forme ω_ε. Si $W^s_\varepsilon(p) \neq W^i_\varepsilon(q)$, ces 2 variétés se croisent.

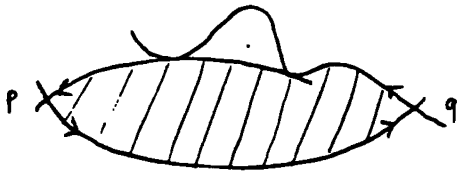
Démonstration. — Après la perturbation, on a plusieurs possibilités, la seule qui respecte la conservation des aires est celle du croisement.



Dans ce qui suit, l'aire hachurée n'est pas conservée par f_ε



1° *cas : les variétés ne se rencontrent pas*

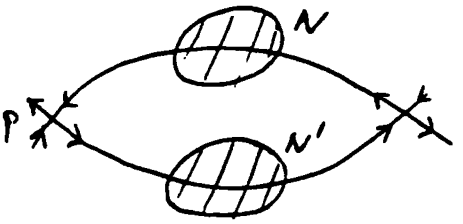


2° *cas : elles se rencontrent sans se croiser.*

∎

PROPOSITION. — *$f : X^2 \to X^2$ qui vérifie les mêmes hypothèses que pour le lemme. N et N' disjoints vérifiant chacun les hypothèses respectivement autour de $W^s(p)$ et $W^i(p)$. f_ε déformation de f supportée par $N \cup N'$. Si $W^s_\varepsilon(p) \neq W^i_\varepsilon(q)$ et $W^i_\varepsilon(p) \neq W_s(q)$, alors on a le croisement de ces variétés.*

Démonstration. — Les hypothèses sont les suivantes :



Il suffit d'appliquer deux fois le lemme. ∎

Problème. — On perturbe la métrique sur un ensemble $N \subset M$. Dans UM, la perturbation est portée par la réunion des fibres au-dessus de N. Cet ensemble est tel qu'on ne peut vérifier les hypothèses de la proposition telles qu'elles sont. Il faut soit essayer d'adapter ces hypothèses à notre perturbation, soit modifier la section de Poincaré. Mais c'est toujours la métrique qu'on veut perturber, dans UM ont aura toujours un support de la perturbation du même type.

Entropie positive

DÉFINITIONS. — 1) Soient X un espace compact; $T : X \to X$ continue et α un recouvrement ouvert de X.

On note $N(\alpha)$ = cardinal minimal d'un sous-recouvrement fini de α;

• l'entropie de α est $H(\alpha) = \log(N(\alpha))$.

• l'entropie topologique de T par rapport à α est

$$h(T, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H\left(\alpha \vee T^{-1}(\alpha) \vee \ldots \vee T^{-n}(\alpha)\right)$$

si α, β sont des recouvrements ouverts de X,

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \beta\}$$

• l'entropie topologique de T est $h(T) = \sup_\alpha h(T, \alpha)$.

2) Soient (X, μ) un espace mesuré, $\mu(X) = 1$; $T : X \to X$ mesurable préservant la mesure; α une partition de X par des ensembles mesurables.

• on appelle entropie de α, $H(\alpha) = -\sum_{A \in \alpha} \mu(A) \cdot \log(\mu(A))$.

• l'entropie mesurée de T par rapport à α est $h_\mu(T, \alpha)$.

$$h_\mu(T, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H\left(\alpha \vee T^{-1}(\alpha) \vee \ldots \vee T^{-n}(\alpha)\right)$$

ou $\vee$ a la même signification que ci-dessus.

• l'entropie mesurée de T est $h_\mu(T) = \sup_\alpha h_\mu(T, \alpha)$.

Propriétés :

1) Soient X_1 et X_2 des espaces compacts; $T_i : X_i \to X_i$ continue.

S'il existe $\Phi : X_1 \to X_2$ homéomorphisme tel que $\Phi T_1 \Phi^{-1} = T_2$, alors $h(T_1) = h(T_2)$.

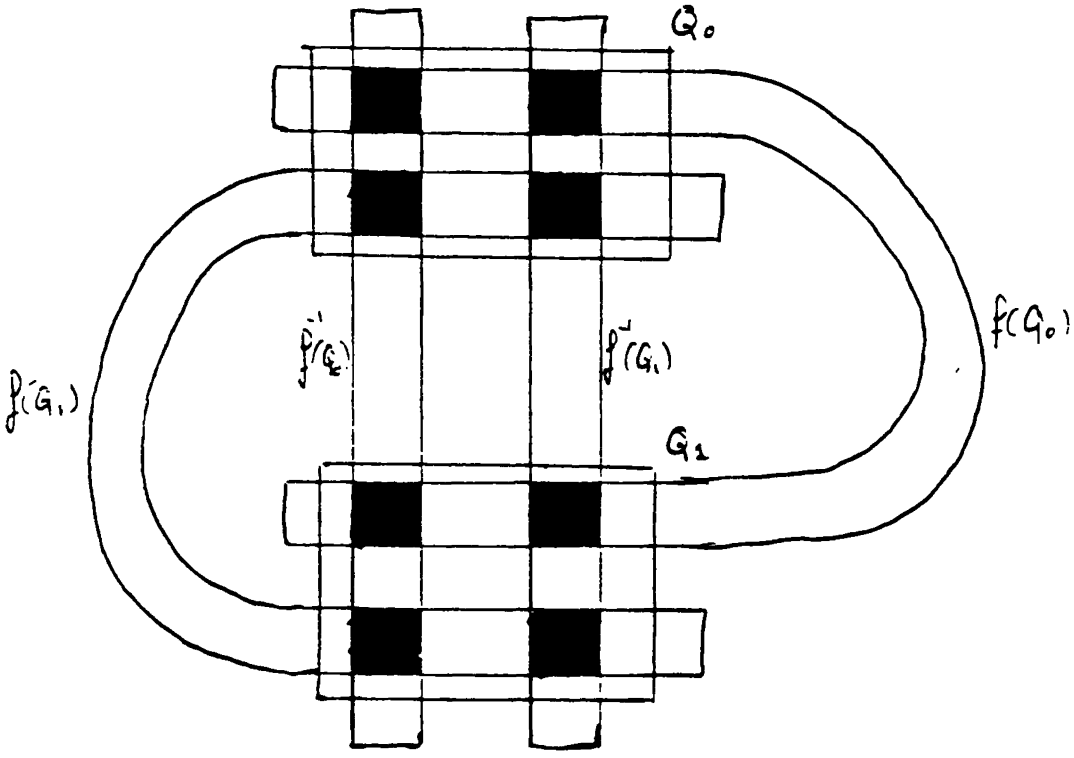
2) Soient X_1 et X_2 des espaces mesurés $\mu_1(X_1) = \mu_2(X_2) = 1$; $T_i : X_i \to X_i$ mesurable laissant μ_i invariante.

S'il existe $\Phi : X_1 \to X_2$ bijective telle que $\Phi_* \mu_1 = \mu_2$ et $\Phi T_1 \Phi^{-1} = T_2$, alors $h_{\mu_1}(T_1) = h_{\mu_2}(T_2)$.

3) Soient X un espace compact; $T : X \to X$ continue.

$h(T) = \sup\{h_\mu(T) \mid \mu$ mesure borélienne de probabilité sur X invariante par $T\}$.

Le fer à cheval. — On cherche à se ramener au cas suivant : soient Q_0 et Q_1 deux carrés disjoints dans $\mathbf{R}^2$; $\varphi : Q_0 \cup Q_1 \to \mathbf{R}^2$ qui dilate les carrés dans un sens et les contracte dans l'autre et telle que $f(Q_i) \cap Q_j$ soit une bande horizontale :



■ : $f^{-1}(Q_1 \cup Q_0) \cap (Q_1 \cup Q_0) \cap f(Q_1 \cup Q_0)$

Soit $\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^{-k}(Q_0 \cup Q_1)$. Λ est un ensemble invariant non vide.

Soit $\Lambda_n = \bigcap_{k=-n}^{n} f^{-k}(Q_0 \cup Q_1)$. Λ_n est la réunion de $2 \cdot 4^n$ carrés, et passer de Λ_n à Λ_{n+1} revient à prendre 4 carrés à l'intérieur de ces $2 \cdot 4^n$ carrés. $\Lambda = \bigcap_n \Lambda_n$ est une intersection de fermés non vides. Donc Λ est non vide.

Soit $\Phi : \Lambda \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \Phi(x) = (\cdots, s_{-n}, \ldots, s_{-1}, s_0, s_1, \ldots, s_n, \cdots)$ avec

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{si } f^i(x) \in Q_0 \\ 1 & \text{si } f^i(x) \in Q_1 \end{cases}.$$

Soit $s = (s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

$$x \in \Phi^{-1}(s) \iff \forall k, f^k(x) \in Q_{s_k} \iff x \in \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^{-k}(Q_{s_k}).$$

s_0 nous dit si x est dans Q_0 ou Q_1. s_{-1} et s_1 nous disent dans quel carré de Λ_1 est x.

$\Phi^{-1}(s) = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^{-k}(Q_{s_k})$ est donc une intersection de fermés non vides, donc $\Phi^{-1}(s) \neq \emptyset$, et Φ est surjective.

Si $\Phi^{-1}(s)$ est un singleton, Φ est aussi injective. Ici ça marche car le diamètre des carrés de Λ_n tend vers 0.

• on met une distance sur $\{0.1\}^{\mathbb{Z}}$

$$s, t \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, n(s,t) = \sup\{k \mid s_{-k} = t_{-k}, \ldots, s_0 = t_0, \ldots, s_k = t_k\}$$

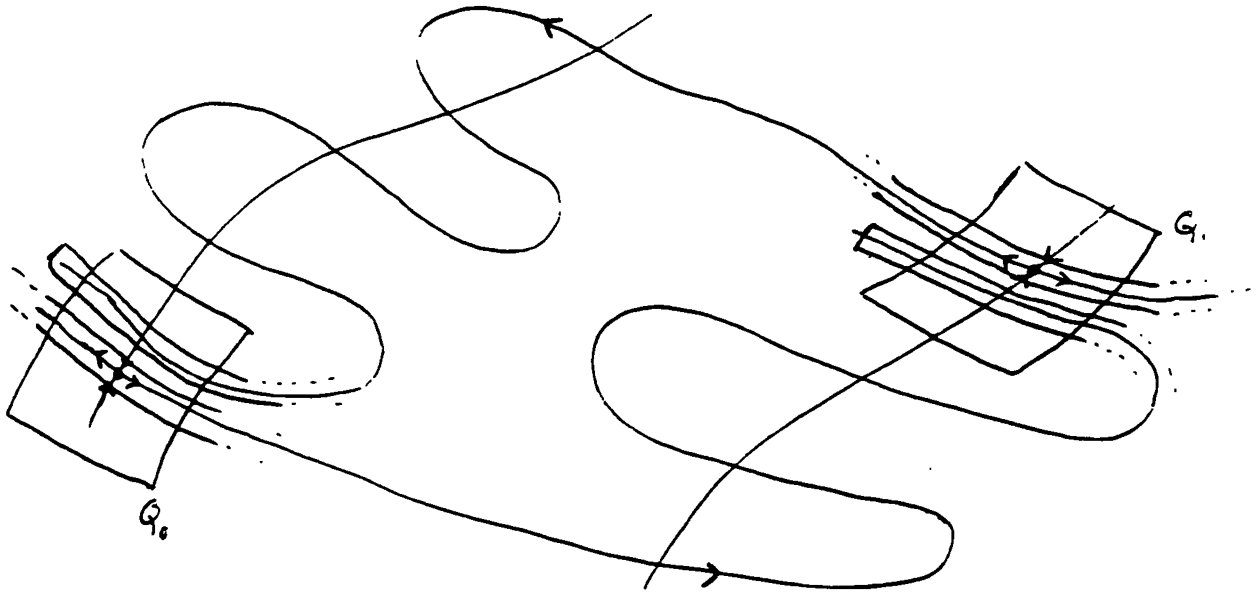
$$d(s,t) = \frac{1}{2^{n(s,t)}}.$$

Pour cette distance, Φ est un homéomorphisme.

• Soit $\sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ l'application qui décale les indices. On a $\sigma = \Phi f|_{\Lambda} \Phi^{-1}$. Or $h(\sigma) = \log 2 > 0$, donc $h(f) > 0$.

Pour des précisions sur le fer à cheval, *cf.* [B].

• Soit P_ε l'application de Poincaré qui nous intéresse. P_ε a deux points fixes hyperboliques p_0 et p_1 telles que les variétés stables et instables se croisent.



On choisit Q_0 et Q_1 pour que P_ε les dilate et les contracte correctement. Soit N tel que $P_\varepsilon^N(Q_i) \cap Q_j$ soient des bandes. N existe car les points d'intersection sont sur les variétés stables de p_0 et p_1 donc tendent vers p_0 et p_1 sous l'action de P_ε.

Pour $k \to \infty$, $f^k(Q_i)$ est une bande de plus en plus fine autour de $W^i(Q_i)$ et $f^{-k}(Q_i)$ une bande de plus en plus fine autour de $W^s(Q_i)$. Soit $s \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, si les intersections des variétés sont transverses $\bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(Q_{s_k})$ est un singleton : l'intersection de deux variétés. Si les intersections ne sont pas transverses, elles peuvent coïncider sur un petit intervalle, et $\bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(Q_{s_k})$ n'est plus un singleton mais un petit intervalle.

L'application Φ n'est plus injective, mais cela nous suffit pour avoir l'entropie positive.

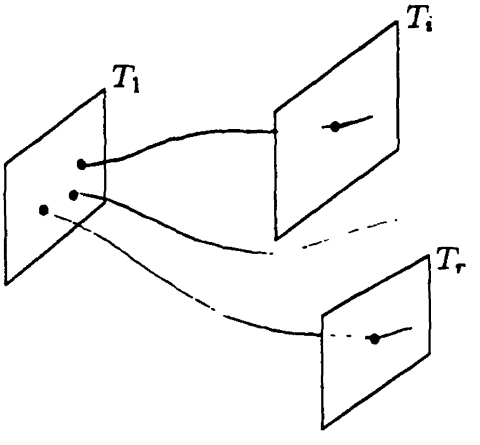
PROPOSITION. — *X_1, X_2 espaces compacts; $T_i : X_i \to X_i$ continues; $\Phi : X_1 \to X_2$ surjection continue telle que $\Phi T_1 = T_2 \Phi$. On a $h(T_1) \geqslant h(T_2)$.*

Démonstration. — Si Φ est un homéomorphisme, on a l'égalité des entropies. On voit facilement que si on à pas l'injectivité, seule cette inégalité reste vraie, en reprenant la démonstration. ∎

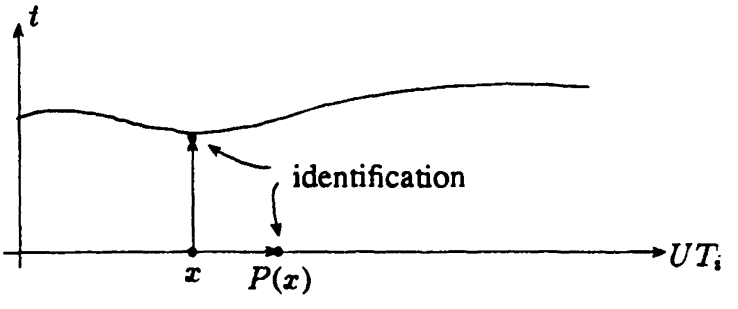
Dans notre cas, cela nous donne $h(P_\varepsilon) \geqslant h(\sigma) = \log 2$ donc P_ε a une entropie topologique positive. Ceci implique grâce au théorème d'Abramov que le flot a une entropie positive.

Théorème d'Abramov. — Je décris rapidement ce que dit ce théorème. On modélise le flot de la façon suivante (*cf.* [A]) :

Soient $T_1, \ldots, T_r$ des sections transverses au flot. $P : UT_i \to UT_i$ l'application de Poincaré. $x \in UT_i$, $P(x)$ est la 1° intersection de la trajectoire $\Phi_t(x)$ avec UT_i. Soit $t(x)$ l'instant de cette intersection $\big(P(x) = \Phi_{t(x)}(x)\big)$.



On regarde le graphe de t sur UT_i



$x \in UT_i$, on identifie $\big(x, t(x)\big)$ et $\big(P(x), 0\big)$ et on regarde le flot sur ce nouvel ensemble.

Si on a une mesure μ sur UT_i, on a $\mu \otimes dt$ sur cet ensemble. Le théorème

d'Abramov dit que

$$h_{\mu\otimes dt}(\Phi_t) = \frac{h_\mu(P)}{\int_{UT_*} t(x)d\mu(x)} .$$

On sait que $h(P) > 0$ et $h(P) = \sup\big(h_\mu(P)\big)$, donc il existe μ telle que $h_\mu(P) > 0$. On a alors

$$h_{\mu\otimes dt}(\Phi_t) > 0$$

et

$$h(\Phi_t) = \sup_\nu\{h_\nu(\Phi_t)\} > 0$$

donc le flot est à entropie topologique positive. Dans le cas qui nous concerne, il n'y a qu'une section T, et $P : T \longrightarrow T$ est l'application de Poincaré.

Conclusion

Cette méthode peut marcher si on arrive à trouver une perturbation qui vérifie les hypothèses de la proposition permettant de montrer le croisement des variétés stables et instables.

On ne peut pas obtenir par cette méthode de métrique ergodique, car le système non perturbé étant intégrable, la théorie KAM nous dit que trop de tores invariants persisteront après perturbation pour que le système devienne ergodique.

Bibliographie

[A] ABRAMOV L. — *On the entropy of a flow*, Translation AMS, **49** (1966), 167–170.

[B] BERTTOZZI A. — *Heteroclinic orbits and chaotic dynamics in plane fluids*, SIAM J. Math. Anal., **19 n°6** (1988), 1271–1294.

[BG] BURNS K., GERBER M. — *Real analytic Bernoulli geodesic flows on S^2*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **9** (1989), 27–45.

[D] DONNAY V. — *Geodesic flow on the two-sphere, Part I : Positive measure entropy*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **8** (1989), 531–553.

[K] KLINGENBERG W. — *Riemannian geometry*, Walter de Gruyter, Berlin-New-York, 1982.

P. CASTILLON
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)