Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Peter Greenberg

Rapport sur la géométrie $SL_2\mathbf{Z}$ par morceaux

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 10 (1991-1992), p. 93-95

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__93_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1991–1992 (93–95)

RAPPORT SUR LA GÉOMÉTRIE $SL_2\,\mathbf{Z}$ PAR MORCEAUX

par *Peter GREENBERG*

Le but de cette conférence était de décrire une nouvelle géométrie dans $\mathbf{R}^2$, et puis d'en présenter une conjecture. Ce rapport est un résumé de [G].

Définitions et conjecture

Quelques notions préliminaires nous permettent d'énoncer la conjecture.

On considère $\mathbf{Z}^2 \subseteq \mathbf{R}^2$; le groupe $SL_2\mathbf{Z}$ des matrices 2×2, entières, à déterminant 1 agit sur $\mathbf{R}^2$ comme transformations linéaires, en préservant l'ensemble $\mathbf{Z}^2$. Soit A le groupe des transformations affines de $\mathbf{R}^2$ de la forme

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2,\ M \in SL_2\mathbf{Z},\ m, n \in \mathbf{Z}\ ;$$

en effet, A est une extension $0 \to \mathbf{Z}^2 \to A \to SL_2\mathbf{Z} \to 1$.

Une droite dans $\mathbf{R}^2$ est *entière* si elle contient deux points de $\mathbf{Z}^2$. On dénote par $\mathcal{P}$ l'ensemble des polygones $P \subseteq \mathbf{R}^2$ dont les sommets se trouvent dans $\mathbf{Z}^2$.

1. Définition. — Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. On dit qu'un homéomorphisme $h : P \to Q$ est "$\mathbf{Z}$-par morceaux" s'il existe des droites entières $\ell_1, \ldots, \ell_n$ telles que, pour chaque composante connexe C de $P - \coprod \ell_i$, il existe un $g_C \in A$ tel que $h|_C \equiv g_C$.

On dénote par $P\mathbf{Z}(P, Q)$ l'ensemble de tels h, par $P\mathbf{Z}(P)$ le groupe $P\mathbf{Z}(P, P)$ et par $P\mathbf{Z}(P, \partial)$ le sous-groupe de $P\mathbf{Z}(P)$ dont les éléments fixent les points de la frontière.

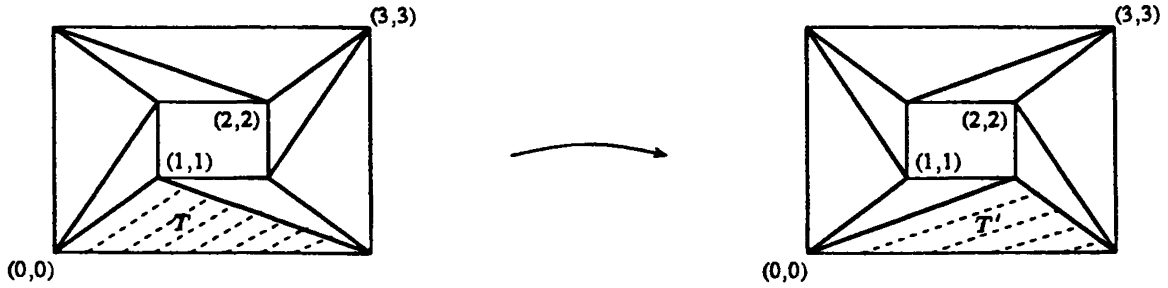
Soit T le triangle dont les sommets sont $(0,0), (1,0), (0,1)$.

2. Conjecture. — $P\mathbf{Z}(T, \partial) = \{id\}$.

Alors, le groupe $P\mathbf{Z}(P, \partial)$ n'est-il pas banal pour tout $P \in \mathcal{P}$? Voici un exemple :

3. Exemple ($\frac{1}{4}$ "Twist de Dehn"). — Soit Q le carré aux sommets $(0,0), (3,0), (0,3), (3,3)$. Le dessin ci-dessous donne un exemple non banal de $P\mathbf{Z}(Q, \partial)$; la frontière

∂Q est fixée mais le petit carré à l'intérieur subit une rotation de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique.



(à noter : $T \longrightarrow T'$)

II. Classification de polygones

1. Définition. — Soit $P \in \mathcal{P}$. On dénote par $A(P)$ l'aire de P, et par $L(P)$ ("longueur") le cardinal de $\partial P \cap \mathbb{Z}^2$.

2. THÉORÈME. — *Soient $P, Q \in \mathcal{P}$, et soient $p \in \partial P \cap \mathbb{Z}^2$, $q \in \partial Q \cap \mathbb{Z}^2$. Alors, il existe $h \in P\mathbb{Z}(P,Q)$, tel que $h(p) = q$, si et seulement si $A(P) = A(Q)$, $L(P) = L(Q)$.*

3. COROLLAIRE. — *On a une suite exacte*

$$1 \longrightarrow P\mathbb{Z}(P,\partial) \longrightarrow P\mathbb{Z}(P,P) \longrightarrow \mathbb{Z}/L(P)\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

On ne donne que l'idée centrale de la preuve du théorème 2, (voir [G]).

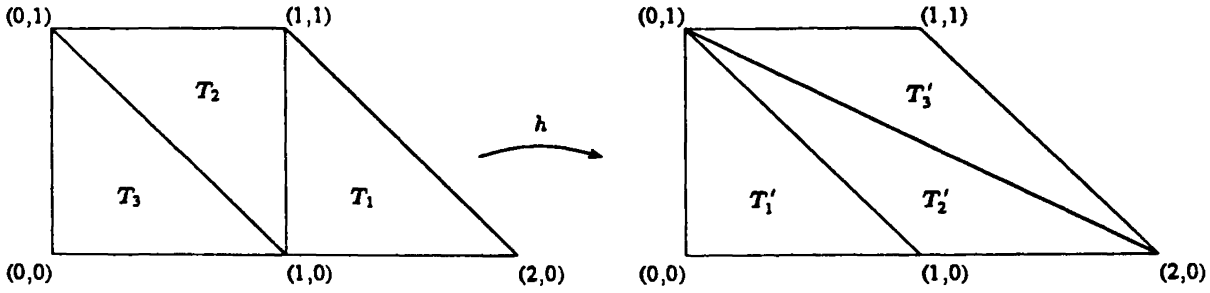
4. Définition. — Un *petit triangle* est un triangle $Q \in \mathcal{P}$ avec $A(Q) = 1/2$, $L(Q) = 3$.

5. LEMME. — *Soient Q_1, Q_2 des petits triangles, et soient $X_i \in Q_i \cap \mathbb{Z}^2$, $i = 1, 2$. Alors il existe un unique $g \in A$ tel que $g(Q_1) = Q_2$ et $g(X_1) = X_2$.*

La preuve est un exercice bien amusant.

Le lemme 5 nous permet de construire un grand nombre d'exemples d'homéomorphismes $\mathbb{Z}$-par morceaux : soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ des triangulations de $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ par petits triangles, telles que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont, de façon combinatoire, identiques. Alors, le lemme 5 prescrit un unique $h \in P\mathbb{Z}(P_1, P_2)$. En voici un exemple (comparer aussi l'exemple 3).

6. Exemple.



$$h(1,0) = (0,1)$$
$$h : T_i \longmapsto T_i'$$

La philosophie de la preuve du théorème 2 est que des composés de tels exemples "suffisent"; on peut considérer cette idée comme justificatif (faible) pour la conjecture.

7. Remarques.

(a) Je remercie Lucien Guillou qui m'a indiqué la preuve du fait que $P\mathbb{Z}(P, \partial)$ est libre de torsion pour tout $P \in \mathcal{P}$: c'est une conséquence du théorème de Newman ([N], [D]); en effet, du théorème 1 de [D] suit qu'il n'existe aucun homéomorphisme du disque fermé, d'ordre fini, qui fixe la frontière.

(b) Une étudiante à Franckfort, U. Hartung, est en train d'analyser la structure des groupes de germes, aux points rationnels, de la géométrie $\mathbb{Z}$-par morceaux. C'est compliqué parce que ces groupes varient selon le point en question.

Bibliographie

[D] DRESS A. — *Newman's theorems on transformation groups*, Topology, **8** (1969), 230–207.

[G] GREENBERG P. — *Piecewise $SL_2\mathbb{Z}$ geometry*, Trans. AMS, à paraître.

[N] NEWMAN M.H.A. — *A theorem on periodic transformations of spaces*, Q. Jl. Math., **2** (1931), 1–9.

P. GREENBERG
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)