Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Françoise Truc

Trajectoires bornées d'une particule soumise à un champ magnétique symétrique linéaire

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 10 (1991-1992), p. 65-84

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__65_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1991–1992 (65–84)

TRAJECTOIRES BORNÉES D'UNE PARTICULE SOUMISE À UN CHAMP MAGNÉTIQUE SYMÉTRIQUE LINÉAIRE

par *Françoise TRUC*

Ce travail est la suite de l'exposé rédigé dans le séminaire de théorie spectrale et de géométrie n° 9.

Nous déterminons une classe de conditions initiales qui permettent d'obtenir une trajectoire bornée, dans le cas d'une particule soumise à un champ magnétique symétrique et linéaire.

Nous écrivons le hamiltonien du système comme une perturbation d'un hamiltonien à deux fréquences, et nous bornons uniformément le terme perturbateur sous certaines hypothèses sur les conditions initiales. Nous vérifions la condition technique du théorème de Moser qui permet alors d'affirmer que le moment magnétique de la particule est un invariant adiabatique perpétuel, nous montrons alors que les trajectoires sont bornées lorsque le rapport entre vitesse et positions est assez petit et que le moment magnétique initial n'est pas "trop petit".

I. Calcul du Hamiltonien associé au champ magnétique B de potentiel vecteur A

1. Calcul en coordonnées cartésiennes, dans le cas général.

Le mouvement d'une particule (de charge et de masse 1) soumise au champ B est régi par l'équation de Lorentz $\ddot{q} = \dot{q} \wedge B \quad (E)$; il existe un lagrangien associé : $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \dot{q} \cdot A(q) \quad (*)$. En effet (E) a pour projection sur $0x$:

$$\ddot{x} = [\dot{y}B_z - \dot{z}B_y] = \dot{y}\Big(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big) + \dot{z}\Big(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\Big)$$

ce qui permet d'expliciter $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}})$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} = \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \dot{q} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}.$$

En opérant de même pour les autres projections on obtient les trois équations d'Euler Lagrange.

Pour obtenir le hamiltonien, on écrit les moments conjugués des coordonnées généralisées : $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ ce qui s'écrit vectoriellement : $p = \dot{q} + A(q)$ et on a alors :

$$\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\left[p - A(q)\right]^2$$

2. Calcul en coordonnées cylindriques, pour le champ $\overrightarrow{B}\begin{vmatrix} x \\ y \\ -2z \end{vmatrix}$.

a) Potentiel vecteur. — On remarque que la 2-forme B s'écrit :

$$\begin{aligned} B &= x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz - 2z\,dx \wedge dy \\ &= (x\,dy - y\,dx) \wedge dz - 2z\,dx \wedge dy = (-r^2\,dz - 2zr\,dr) \wedge d\theta \\ &= d(-r^2 z) \wedge d\theta. \end{aligned}$$

La 1-forme $A = -r^2 z\,d\theta$ est donc un potentiel vecteur de A. La formule (*) s'écrit ici (**) $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}g(\dot{q},\dot{q}) + \langle A(q),\dot{q}\rangle$, où $g = dr^2 + r^2 d\theta + dz^2$ est la métrique correspondant au système de coordonnées cylindriques, et $\langle\ ,\ \rangle$ est le crochet de dualité.

b) Lignes de champ. — Elles sont caractérisées par $\begin{cases} \dot{r} = r \\ \dot{\theta} = 0 \\ \dot{z} = -2z \end{cases}$ car le champ $\overrightarrow{B}$ s'écrit $\begin{vmatrix} r \\ 0 \\ -2z \end{vmatrix}$.

Ces lignes sont donc caractérisées par 2 conditions : θ = constante et $r^2 z$ = constante; en effet $d(r^2 z) = 2\dot{r}rz + r^2\dot{z} = 0$.

c) Hamiltonien. — Il s'agit de calculer les impulsions p_r, p_θ, p_z. Pour cela il faut poser $q = (r,\theta,z)$; $\dot{q} = (\dot{r},\dot{\theta},\dot{z})$ et obtenir $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ à l'aide de la formule (**) :

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + (-r^2 z)\dot{\theta}$$

d'où

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \\ p_\theta = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} - r^2 z \\ p_z = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \dot{z} \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{H}(q,p) = \langle p, \dot{q}\rangle - \mathcal{L}(q,\dot{q})$ s'écrit :

$$\mathcal{H}(r,\theta,z,p_r,p_\theta,p_z) = \dot{r}^2 + (r^2\dot{\theta} - r^2 z)\dot{\theta} + \dot{z}^2 - \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + r^2 z\dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2$$

(on reconnait l'énergie cinétique de la particule). Revenant aux variables d'impulsion on obtient :

$$\mathcal{H}(r,\theta,z,p_r,p_\theta,p_z) = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_z^2) + \frac{1}{2r^2}(p_\theta + r^2 z)^2$$

La coordonnée θ n'intervient pas dans cette expression, elle est cyclique ce qui entraîne l'existence d'une intégrale première, qui est p_θ.

Pour des conditions initiales données on a donc $p_\theta = r^2(0)[\dot{\theta}(0) - z(0)]$. Notons M ce nombre (qui dépend donc uniquement des conditions initiales). Le hamiltonien est en fait à deux degrés de liberté :

$$\mathcal{H}(r,z,p_r,p_z) = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_z^2) + \frac{1}{2r^2}(r^2 z + M)^2$$

il dépend du paramètre $M = p_\theta$.

II. Changement de coordonnées

1. La quantité $M = p_\theta$ étant fixée par les conditions initiales, nous pouvons considérer la distance d'un point P de la trajectoire à la ligne de champ $\mathcal{L}_M$ définie par $r^2 z = -M$ et introduire le système de coordonnées (u,v) suivant :

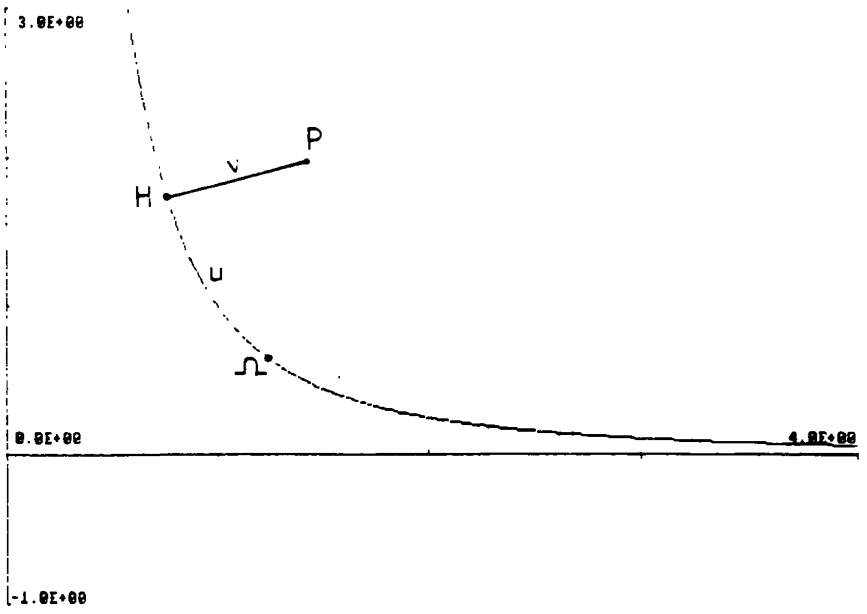

Figure 1

• u est l'abcisse curviligne de la projection H de P sur $\mathcal{L}_M$, l'origine sur cette courbe étant prise au point Ω correspondant à la valeur minimale du champ sur $\mathcal{L}_M$

• v est la distance HP de P à la ligne de champ.

Remarque. — Pour calculer les coordonnées explicites de Ω il suffit d'écrire que pour un point $(r, -\frac{M}{r^2})$ de $\mathcal{L}_M$ on a :

$$B^2 = B_r^2 + B_z^2 = r^2 + 4z^2 = r^2 + 4\frac{M^2}{r^4}$$

la valeur minimale est obtenue par

$$r_0^6 = 8M^2$$

et l'on a

$$B_m^2 = r_0^2 + \frac{1}{2}r_0^2 = 3M^{2/3}$$

2. Expression du hamiltonien dans ces nouvelles coordonnées.

La relation : $dr^2 + dz^2 = [1 + vk(u)]^2 du^2 + dv^2$ qui fait intervenir la courbure $k(u)$ de la ligne de champ $\mathcal{L}_M$ au point $(u, 0)$ induit sur les impulsions p_u et p_v les relations suivantes :

$$\begin{cases} p_u = [1 + vk(u)]\dot{u} \\ p_v = \dot{v} \end{cases}$$

On obtient ainsi l'expression du hamiltonien :

$$H(u, v, p_u, p_v, M) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_u^2}{[1 + vk(u)]^2} + p_v^2\right) + U(u, v)$$

où $U(u, v)$ joue le rôle d'un potentiel. On a :

$$U(u, v) = F \circ \Phi^{-1}(u, v)$$

avec

$$\Phi : (r, z) \longrightarrow (u, v)$$

$$F : (r, z) \longrightarrow \frac{(r^2 z + M)^2}{2r^2}$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Notons E l'énergie du système.

PROPOSITION 1. — *Pour toutes conditions initiales vérifiant (CI) : $E < 2M^{4/3}$ et $E < \frac{\varepsilon^2}{16}|M|^{2/3}$*

a) la distance v de la trajectoire à la ligne de champ $\mathcal{L}_M$ est d'au plus ε.

b) de plus il existe une constante C (ne dépendant que de E et M) telle que :

$$|U(u, v) - \frac{1}{2}B^2(u, 0)v^2| < C\varepsilon^3$$

(démonstration en annexe).

Remarque 1. — On verra par la suite que M est fixé et ε choisi ensuite; il suffira de considérer ε tel que $\varepsilon^3 < 32^{2/3}|M|$ pour que la seule condition à mentionner soit (CI) : $E < \frac{\varepsilon^2}{16}|M|^{2/3}$.

Remarque 2. — L'inégalité $U(u, v) \leqslant E$ contraint la particule à rester dans la bande B délimitée par les courbes C^+ et C^- d'équation :

$$C^+ : z = -\frac{M}{r^2} + \frac{\sqrt{2}E}{r}$$

$$C^- : z = -\frac{M}{r^2} - \frac{\sqrt{2}E}{r}$$

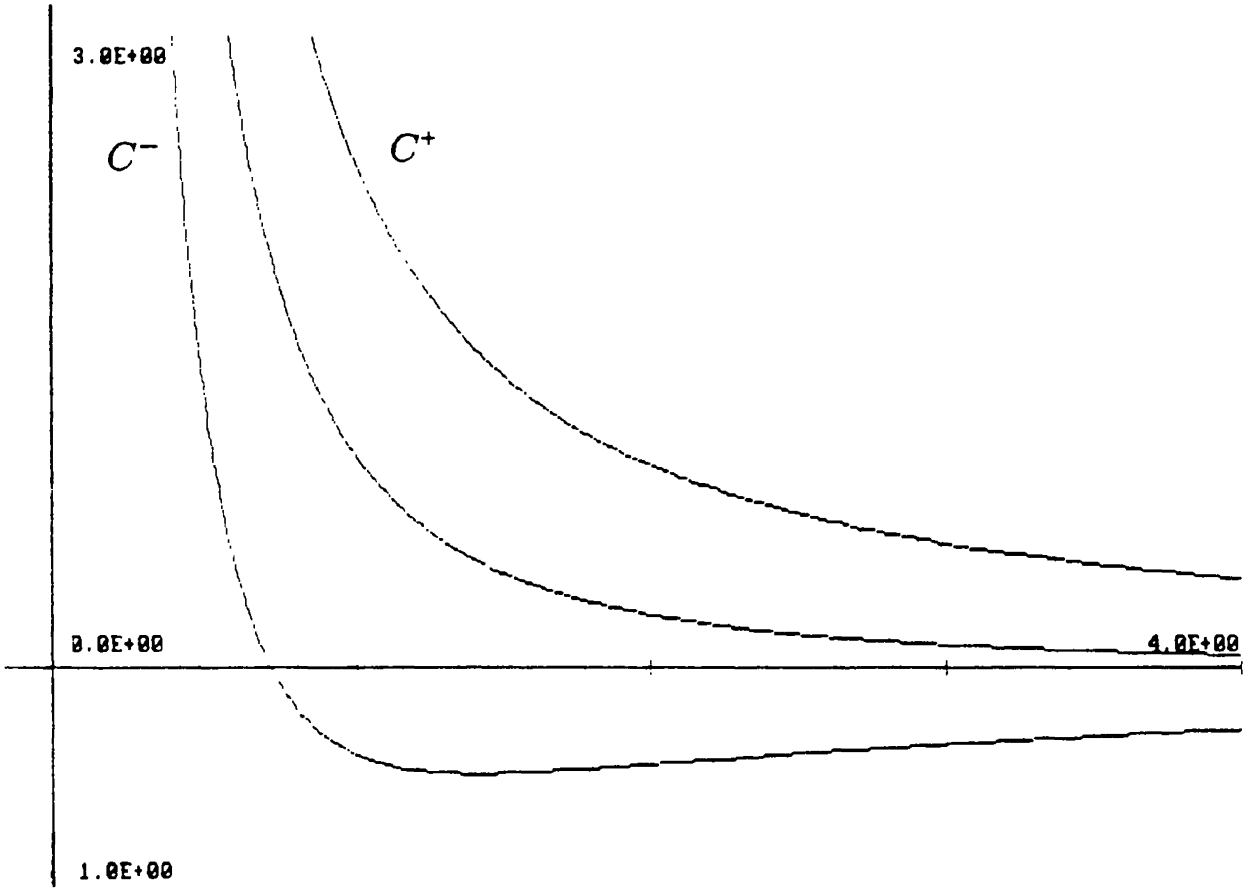

Figure 2

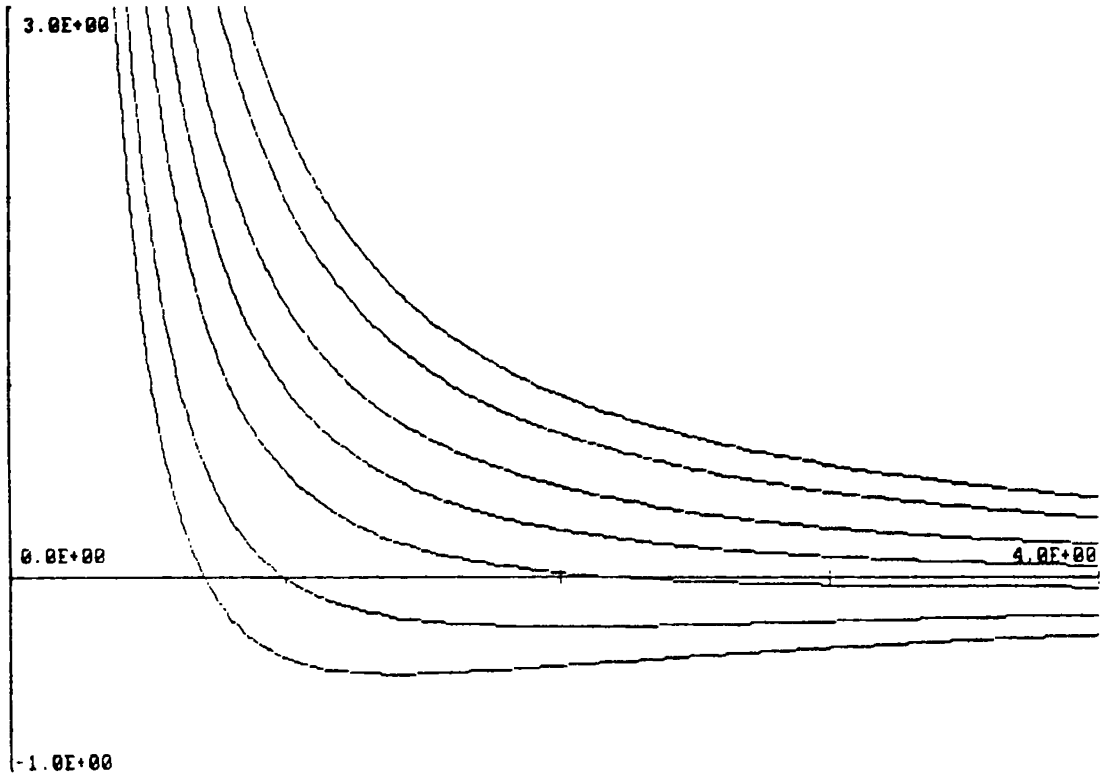

Figure 3

Ce schéma représente les bandes $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{1/2}, \mathcal{B}_{1/10}$ correspondant aux valeurs $1, 1/2, 1/10$ de l'énergie E.

3. Remarque : mise en évidence de l'action.

On a donné un développement de H selon la variable v de la manière suivante :

$$H(u,v,p_u,p_v,M) = \frac{1}{2}\frac{p_u^2}{[1+vk(u)]^2} + \frac{p_v^2}{2} + \frac{1}{2}B^2(u,0)v^2 + K(u,v,p_u,p_v)$$

avec $|K(u,v,p_u,p_v)| < C\varepsilon^3$ dès que (CI) est satisfaite, en particulier on a :

$$\frac{p_u^2 + B^2(u,0)v^2}{2} < E + C\varepsilon^3$$
$$< \varepsilon^2\left(\frac{|M|^{2/3}}{16} + C\varepsilon\right).$$

L'expression $H_u = \frac{p_v^2+B^2(u,0)v^2}{2}$ représente à u fixé l'énergie d'un oscillateur harmonique (à 1 degré de liberté); l'action I_u correspondante, c'est-à-dire l'aire de l'ellipse parcourue par le point de coordonnée (v,p_v) a pour expression : $I_u = \frac{p_v^2+B^2(u,0)v^2}{2B(u,0)}$, la fréquence du mouvement étant $B(u,0)$.

On remarque que l'inégalité ci-dessus peut encore s'écrire :

$$B(u,0)I_u < \varepsilon^2\left(\frac{|M|^{2/3}}{16} + C\varepsilon\right).$$

On voit alors, sous réserve que I_u soit minorée par une constante k non nulle indépendante du temps, que pour tout point (u, v, p_u, p_v) de la trajectoire on a

$$B(u,0) < \frac{\varepsilon^2}{k}\left(\frac{|M|^{2/3}}{16} + C\varepsilon\right).$$

Cela entraîne que la trajectoire est bornée puisque $B(u,0)$ grandit avec u.

On est donc amené à minorer I_u ; pour cela on va montrer que c'est un "invariant adiabatique perpétuel".

III. Changement d'échelle pour obtenir un hamiltonien proche d'un hamiltonien intégrable

1. Mise en évidence de la variable d'action I_u.

On pose

$$u = \varepsilon u_1 \quad p_u = \varepsilon p_{u_1}$$
$$v = \varepsilon v_1 \quad p_v = \varepsilon p_{v_1}$$

Le hamiltonien correspondant au nouveau système est $H' = \varepsilon^{-2}H$. Or

$$H(u_1, v_1, p_{u_1}, p_{v_1}, M) = \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{p_{u_1}^2}{[1+\varepsilon v_1 k(\varepsilon u_1)]^2} + p_{v_1}^2\right] + \varepsilon^2 \frac{B^2(\varepsilon u_1, 0)v_1^2}{2} + \varepsilon^3 H_1(\varepsilon u_1, v_1, p_{u_1}, p_{v_1})$$

où H_1 est une fonction analytique réelle. D'où

$$H'(u_1, v_1, p_{u_1}, p_{v_1}, M) = \frac{p_{u_1}^2 + p_{v_1}^2 + B^2(\varepsilon u_1, 0)v_1^2}{2} + \varepsilon H_1'(\varepsilon u_1, v_1, p_{u_1}, p_{v_1}).$$

On introduit la fonction génératrice (on note B pour $||B||$) :

$$S(u_1, v_1, p_{u_2}, p_{v_2}) = \sqrt{B(\varepsilon u_1, 0)}v_1 p_{v_2} + u_1 p_{u_2}$$

cela engendre un changement de variables canoniques :

$$u_1, v_1, p_{u_1}, p_{v_1} \longrightarrow u_2, v_2, p_{u_2}, p_{v_2}$$

par le biais des équations :

$$p_{u_1} = \frac{\partial S}{\partial u_1} = p_{u_2} + \varepsilon v_1 p_{v_2} \frac{B'(\varepsilon u_1, 0)}{2\sqrt{B(\varepsilon u_1, 0)}}$$
$$p_{v_1} = \frac{\partial S}{\partial v_1} = \sqrt{B(\varepsilon u_1, 0)}p_{v_2}$$
$$u_2 = \frac{\partial S}{\partial p_{u_2}} = u_1$$
$$v_2 = \frac{\partial S}{\partial p_{v_2}} = \sqrt{B(\varepsilon u_1, 0)}v_1$$

On remarque que $p_{u_1}^2$ sera remplacé par $p_{u_2}^2$ à condition d'intégrer dans le terme restant l'expression $\varepsilon v_1 \frac{B'(\varepsilon u_1,0)}{2\sqrt{B(\varepsilon u_1,0)}} p_{v_2}$. On obtient :

$$H'(u_2, v_2, p_{u_2}, p_{v_2}, M) = B(\varepsilon u_2, 0)\left(\frac{p_{v_2}^2 + v_2^2}{2}\right) + \frac{1}{2}p_{u_2}^2 + \varepsilon H_2'(\varepsilon u_2, v_2, p_{u_2}, p_{v_2})$$

le nouveau terme restant H_2' est encore analytique car l'expression $v_1 p_{v_2} \frac{B'(\varepsilon u_2,0)}{2\sqrt{B(\varepsilon u_2,0)}}$ l'est; en effet dès que M n'est pas nul on sait que B est une fonction analytique de u, et ne s'annule pas, la valeur minimale de $B(u,0)$ étant $B_m = \sqrt{3}|M|^{1/3}$ (*cf.* p. 7).

On reconnait la variable d'action $\frac{p_{v_2}^2+v_2^2}{2}$ déjà mentionnée p. 9, au facteur multiplicatif près ε^2, que nous noterons I pour simplifier les notations; introduisons l'angle φ par la formule :

$$\begin{cases} v_2 = \sqrt{2I}\sin\varphi \\ p_{v_2} = \sqrt{2I}\cos\varphi \end{cases}$$

alors H' s'exprime en fonction des variables action-angle (I, φ) :

$$(*) \qquad H'(u_2, I, p_{u_2}, \varphi) = B(\varepsilon u_2, 0)I + \frac{1}{2}p_{u_2}^2 + \varepsilon H_3'(\varepsilon u_2, I, p_{u_2}, \varphi)$$

La quantité $I = \varepsilon^{-2}\frac{p_x^2+B^2(u,0)v^2}{2B(u,0)}$ (en revenant aux variables de départ) peut s'interpréter aussi, pour les points de la trajectoire situés sur la ligne de champ, comme le moment magnétique $\varepsilon^{-2}\frac{p_y^2}{2B} = \varepsilon^{-2}\frac{W^\perp}{B}$.

2. La prochaine étape est l'étude de la 2e variable d'action.

Pour cela il est commode de changer l'échelle de temps de sorte que la 1ère fréquence du hamiltonien non perturbé devienne égale à 1. Posons

$$F(u_2, I, p_{u_2}, \varphi) = \frac{1}{B(\varepsilon u_2, 0)}\left[H'(u_2, I, p_{u_2}, \varphi) - E\right].$$

Chercher les trajectoires incluses dans l'hypersurface $H' = E$ revient à trouver les solutions à énergie nulle du hamiltonien F; F se décompose ainsi : $F = F_0 + F_1$ avec

$$F_0 = \frac{1}{2}\frac{p_{u_2}^2}{B(\varepsilon u_2, 0)} - \frac{E}{B(\varepsilon u_2, 0)} + I$$

et

$$F_1 = \frac{\varepsilon}{B(\varepsilon u_2, 0)} H_3'(\varepsilon u_2, I_2, p_{u_2}, \varphi)$$

F_1 est d'ordre 1 par rapport à ε car $B(\varepsilon u_2, 0) \geqslant B_m$ (la valeur du champ sur $\mathcal{L}_M$ est minorée par $B_m = \sqrt{3}|M|^{1/3}$).

Le hamiltonien non perturbé F_0 a donc une première fréquence égale à 1; pour trouver la seconde il faut considérer les lignes de niveau dans le plan (u_2, p_{u_2}) de la fonction $f(u_2, p_{u_2}) = \frac{1}{2}\frac{p_{u_2}^2}{B(\varepsilon u_2,0)} - \frac{E}{B(\varepsilon u_2,0)}$. Or les courbes $f(u_2, p_{u_2}) = c$ sont fermées pour $c \in]-\frac{E}{B_m}, 0[$.

Soit $J(c)$ l'aire délimitée par la courbe $f(u_2, p_{u_2}) = c$.

LEMME 1. — *La fonction $J(c)$ est croissante sur* $]-\frac{E}{B_m}, 0[$.

Démonstration.

1. Expression de $J(c)$.

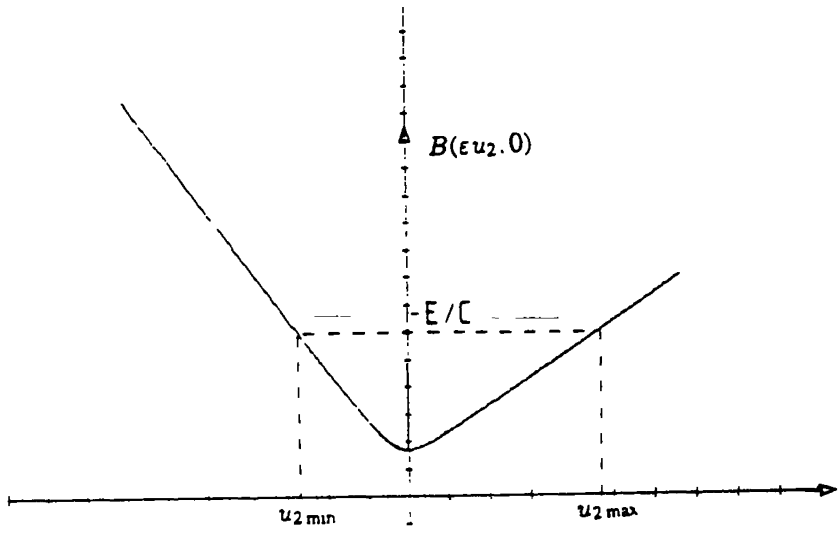

Figure 4

l'égalité $f(u_2, p_{u_2}) = c$ entraîne les inégalités suivantes :

$$|p_{u_2}| \leqslant \sqrt{2(E + cB_m)} \; ; \quad B_m \leqslant B(\varepsilon u_2, 0) \leqslant -\frac{E}{c}$$

ce qui impose à c d'appartenir à $]-\frac{E}{B_m}, 0[$.

De plus l'aire $J(c)$ se calcule de la façon suivante :

$$J(c) = \oint_{f(u_2, p_{u_2}) = c} p_{u_2} du_2$$

$$= \int_{u_{2\,\min}}^{u_{2\,\max}} \sqrt{2[E + cB(\varepsilon u_2, 0)]}\, du_2$$

où $u_{2\,\min}$ et $u_{2\,\max}$ sont définis par $B(\varepsilon u_{2\,\min}, 0) = -\frac{E}{c} = B(\varepsilon u_{2\,\max}, 0)$ et $u_{2\,\min} \leqslant 0$, $u_{2\,\max} \geqslant 0$. Posons $u = \varepsilon u_2$. On obtient

$$J(c) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \sqrt{2[E + cB(u)]}\, du$$

avec $B(u_{\min}) = B(u_{\max}) = -\frac{E}{c}$, $u_{\min} \leqslant 0$, et $u_{\max} \geqslant 0$.

Remarque. — On note pour simplifier $B(u)$ pour $B(u, 0)$.

Posons $\overline{J}(c) = \varepsilon J(c)$. On obtient donc

$$\overline{J}(c) = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \sqrt{2[E + cB(u)]}\, du$$

2. Montrons que $\overline{J}(c)$ est croissante. — Remarquons tout d'abord que les bornes de l'intégrale ci-dessus dépendent de c :

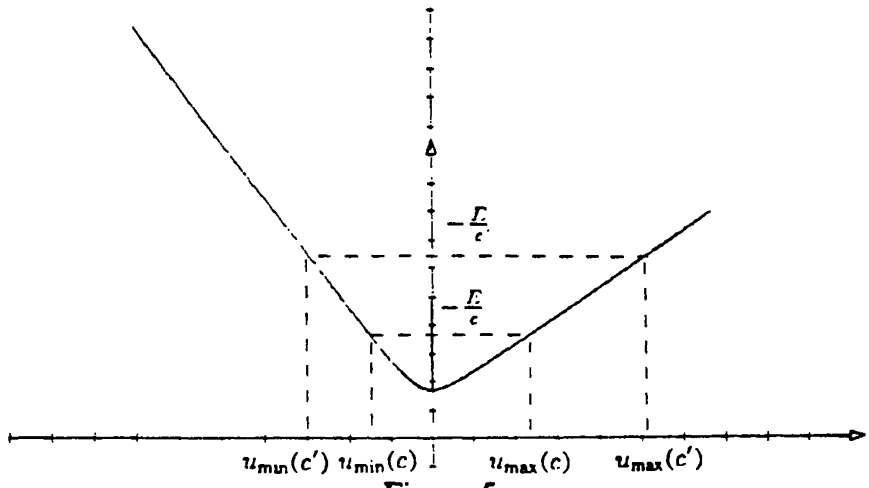

Figure 5

Supposons $c < c' < 0$, alors

$$\sqrt{E + cB(u)} \leqslant \sqrt{E + c'B(u)} \text{ et } [u_{\min}(c'), u_{\max}(c')] \supset [u_{\min}(c), u_{\max}(c)]$$

d'où $\overline{J}(c) < \overline{J}(c')$.

Voici l'allure des courbes de niveau quand c varie de $-\frac{E}{B_m}$ à 0 :

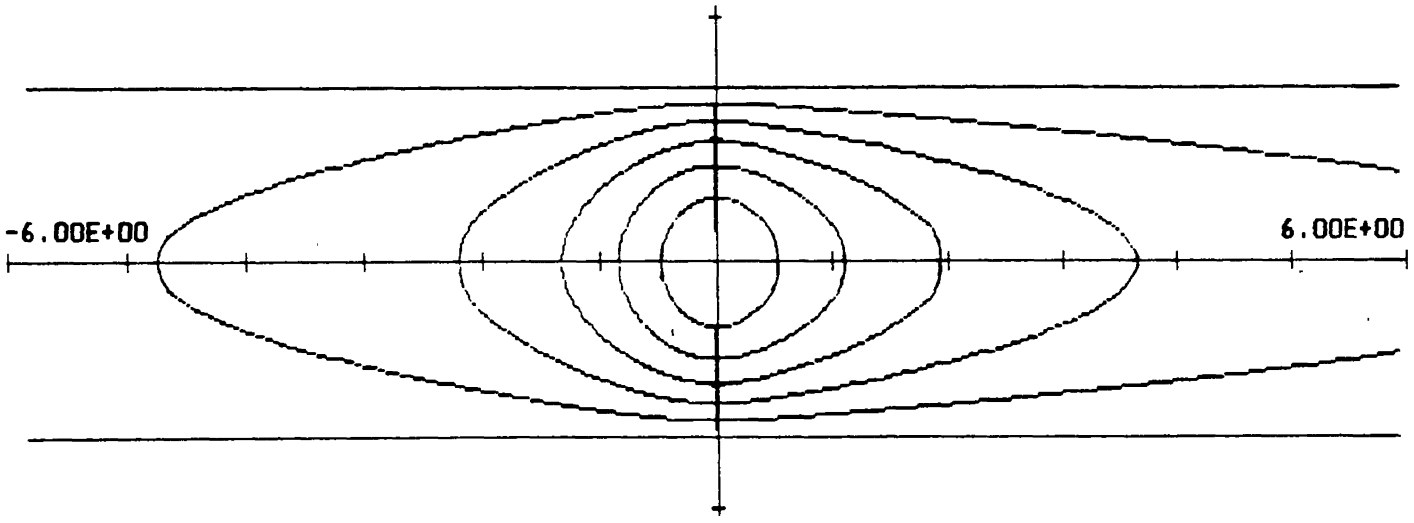

Figure 6

En effet, le seul point critique de f correspond au point $(0,0)$ obtenu pour la valeur $c = -\frac{E}{B_m}$. D'autre part quand c tend vers 0 la courbe détermine un domaine dont l'aire tend vers celle de la bande horizontale de largeur $2\sqrt{2E}$.

En conclusion $\lim_{c \to 0} \overline{J}(c) = +\infty$; $\lim_{c \to -E/B_m} \overline{J}(c) = 0$.

LEMME 2. — *1)* $\overline{J}'(c) = \int_{u_{\min}(c)}^{u_{\max}(c)} \frac{B(u)}{\sqrt{2[E+cB(u)]}} du$

2) $\overline{J}(c)$ *est une fonction croissante de* c *pour un ouvert* $]\alpha, 0[$.

La démonstration du lemme 2 est donnée en annexe. On utilise le fait que la fonction $B(u)$ est équivalente à u en $+\infty$ et à $2u$ en $-\infty$. De ces lemmes découle la

PROPOSITION 2. — *Le hamiltonien F s'écrit :*

$$F = I + c(\varepsilon J) + \varepsilon H_4'(\varepsilon J, I, \varphi, \psi)$$

où la fonction $c(\varepsilon J)$ a une dérivée seconde non nulle sur un intervalle $]A, +\infty[$.

Démonstration. — On a $c'(\overline{J}) = \frac{1}{\overline{J}'(c)}$. On a montré que $\overline{J}'(c)$ est une fonction croissante de c pour c voisin de zéro; $c'(\overline{J})$ est donc aussi une fonction monotone de c pour c voisin de zéro, ou encore (puisque $\overline{J}$ est une fonction croissante et $\overline{J}(c) \underset{c \to 0}{\longrightarrow} +\infty$) une fonction monotone de $\overline{J}$ pour $\overline{J}$ grand.

La fonction $c''(\varepsilon J)$ ne s'annule donc qu'en un nombre fini de valeurs $J_1, \ldots, J_p$. Nous appliquerons le "twist theorem" de Moser sur chacun des anneaux $A(\varepsilon J_i, \varepsilon J_{i+1})$ et sur tout anneau extérieur aux cercles $J = \varepsilon J_1, J = \varepsilon J_p$.

IV. Utilisation d'un théorème de Moser

PROPOSITION 3. — *Pour ε assez petit la quantité $I_\varepsilon = \varepsilon^{-2} \frac{P_x^2 + B^2(u,0)v^2}{2B(u,0)}$ est un invariant adiabatique perpétuel, à condition que l'inégalité (CI) soit satisfaite pour ε. Plus précisément : $\exists \varepsilon_0$ ne dépendant que de M ;*

$$\exists K > 0 \text{ tel que } |I_\varepsilon(t) - I_\varepsilon(0)| < K\varepsilon \quad \forall t, \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Démonstration. — Nous avons écrit l'hamiltonien F sous la forme :

$$F = I + c(\varepsilon J) + \varepsilon H_4'(\varepsilon J, I, \varphi, \psi, \varepsilon).$$

Sur l'hypersurface d'énergie 0 on a :

$$I = -c(\varepsilon J) - \varepsilon H_4'(\varepsilon J, I, \varphi, \psi, \varepsilon)$$

d'où l'existence d'une fonction Φ : $\Phi(\varepsilon J, \varphi, \psi, \varepsilon) = I$.

En utilisant φ comme nouveau temps on obtient pour le nouvel hamiltonien I les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dJ}{d\varphi} = -\dfrac{\partial F/\partial \psi}{\partial F/\partial I} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi} \\ \dfrac{d\psi}{d\varphi} = \dfrac{\partial F/\partial J}{\partial F/\partial I} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial J} \end{cases}$$

En effet le hamiltonien F, autonome, à 2 degrés de liberté correspondait aux équations :

$$\frac{\partial F}{\partial I} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{\partial F}{\partial J} = \frac{d\psi}{dt} \quad \frac{\partial F}{\partial \psi} = -\frac{dJ}{dt}$$

et l'on trouve bien que

$$\frac{dJ}{d\varphi} = \frac{dJ}{dt} \times \frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\partial F/\partial \psi}{\partial F/\partial I}$$
$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{d\psi}{dt} \times \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\partial F/\partial J}{\partial F/\partial I}$$

De plus, de l'égalité $I - \Phi(\varepsilon J, \varphi, \psi, \varepsilon) = F = 0$ on tire :

$$\partial F/\partial \psi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} ; \frac{\partial F}{\partial I} = 1 ; \frac{\partial F}{\partial J} = -\frac{\partial \Phi}{\partial J}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{J}}{d\varphi} = -\varepsilon^2 f(\varepsilon J, \varphi, \psi, \varepsilon) & \text{avec } \overline{J} = \varepsilon J \text{ et } f(\varepsilon J, \varphi, \psi\varepsilon) = \dfrac{\partial H_4'}{\partial \psi}(\varepsilon J, I, \varphi, \psi, \varepsilon) \\ \dfrac{d\psi}{d\varphi} = +\varepsilon c'(\varepsilon J) + \varepsilon^2 g(\varepsilon J, \varphi, \psi, \varepsilon) \end{cases}$$

Les solutions au temps $\varphi = 2\pi$ sont donc données en fonction du temps $\varphi = 0$ par :

$$\begin{cases} \overline{J}(2\pi) = \overline{J}(0) + 0(\varepsilon^2) \\ \psi(2\pi) = \psi(0) + \varepsilon c'(\varepsilon J) + 0(\varepsilon^2). \end{cases}$$

Au difféomorphisme $\overline{J}(0), \psi(0) \longrightarrow \overline{J}(2\pi), \psi(2\pi)$ de l'anneau $A(\overline{J}_i, \overline{J}_{i+1})$, on peut appliquer le théorème de Moser (avec $k = 1$ et $\ell = 2$) suivant :

THÉORÈME Moser [8]. — *Soit Φ un difféomorphisme de l'anneau $A(1,2)$, Φ de classe $C^s, s \geqslant 5$, préservant l'aire, et tel que : $\Phi(R, \theta) = (R', \theta')$ avec*

$$\begin{cases} R' = R + \varepsilon^\ell f(R, \theta) \\ \theta' = \theta + \alpha + \varepsilon^k \gamma(R) + \varepsilon^\ell g(R, \theta) \end{cases}$$

où $\gamma'(R) \neq 0, k < \ell$, f et g bornées.

Alors il existe une infinité de courbes invariantes par Φ pour ε assez petit.

Remarque. — Chaque courbe invariante par ce difféomorphisme engendre un tore invariant si l'on prend toutes les solutions de F qui sont issues de cette courbe invariante, et sur ces tores le mouvement est quasi périodique à 2 fréquences. De plus, n'importe quelle trajectoire commençant entre 2 tels tores sur la même surface d'énergie doit rester entre ces tores pour des raisons de dimension. En particulier la quantité I est un invariant adiabatique perpétuel (*cf.* [1], [3], [7]).

V. Conclusion

PROPOSITION 4. — *Soit M fixé; (c'est à dire $r(0), z(0), \dot{\theta}(0)$). Il existe $\varepsilon_0 > 0$ ne dépendant que de M, et $K > 0$ tels que la trajectoire de la particule est bornée,*

dès que les conditions (1) et (2) sont satisfaites pour un certain réel $\varepsilon < \varepsilon_0$ *:*

(1) $$E < \frac{\varepsilon^2}{16}|M|^{2/3}$$

(2) $$I_u(0) > 2K\varepsilon^3$$

où $I_u = \frac{p_u^2 + B^2(u,0)v^2}{2B(u,0)}$. *Plus précisément on a :*

$$B(u,0) < \frac{2\varepsilon^2}{I_u(0)}\left(\frac{|M|^{2/3}}{16} + C\varepsilon\right)$$

C est la constante de la proposition 1.

Démonstration. — On remarque que $I_\varepsilon(0) = \varepsilon^{-2} I_u(0)$; de la proposition 3 on déduit que $I_\varepsilon(t) > I_\varepsilon(0) - K\varepsilon$ d'où $I_\varepsilon(t) > \frac{I_\varepsilon(0)}{2}$ si (2) est satisfaite et finalement en utilisant la remarque du II :

$$B(u,0) < \frac{2\varepsilon^2}{I_u(0)}\left(\frac{|M|^{2/3}}{16} + C\varepsilon\right).$$

Il s'agit à présent d'étudier la compatibilité des conditions (1) et (2). Il est immédiat de constater que si l'intervalle $]2B(u,0)K\varepsilon^3, 2\varepsilon^2\frac{|M|^{2/3}}{16}[$ n'est pas vide on peut choisir p_v^2 à l'intérieur de sorte que $I_u(0) > \frac{p_v^2}{2B(u,0)} > 2K\varepsilon^3$ et choisir alors p_u^2 de sorte que (1) soit vraie. Il faut donc considérer un ε assez petit pour que soit vraie l'inégalité :

$$B(u,0)K\varepsilon < \frac{|M|^{2/3}}{16}.$$

On peut enfin remarquer que la condition (1) permet aussi bien de considérer des positions éloignées de l'origine et des vitesses "de l'ordre de 1", que des positions plus proches et des vitesses petites. La condition (2) exprime que la vitesse orthogonale à la ligne de champ ne doit pas être trop faible par rapport à l'énergie totale, et en particulier exclut le cas $z_0 = 0, \dot{z}_0 = 0 = \dot{\theta}_0$ qui correspond à un départ sur une "ligne de champ" (la droite $(\theta = \theta_0, z_0 = 0)$) avec une vitesse parallèle à cette ligne.

On donne ci-dessous le tracé d'une trajectoire obtenue par simulation. Les conditions initiales sont $M_0(1,1,0)$ et $V_0(1/4, 1/4, 4/5)$. Lorsque la trajectoire s'éloigne suffisamment de l'origine selon l'axe O_z, la bande $\mathcal{B}$, définie par les courbes C_+ : $z = -\frac{M}{r^2} + \frac{\sqrt{2E}}{r}$ et C_- : $z = -\frac{M}{r^2} - \frac{\sqrt{2E}}{r}$, dans laquelle elle est comprise (si on considère un plan de coupe vertical), apparait nettement; en effet la largeur de la bande, qui vaut $\frac{2\sqrt{2E}}{z}$ (voir appendice) devient de plus en plus petite, et de plus r étant petit l'angle θ est peu significatif.

Supposons qu'il n'y ait pas de retour : alors la distance v de la trajectoire à la ligne de champ $\mathcal{L}_M$ est toujours inférieure à $v(t_1)$, où t_1 est le temps déterminé par $v(t_1) < \varepsilon_0$ (avec le ε_0 de la prop. 4). Les résultats précédents s'appliquent et on obtient une borne pour $B(u,0)$ (d'où contradiction) *si* on a l'inégalité $I_u(t_1) > 2K\varepsilon_0^3$.

La simulation parait montrer que les "fuites vers le bas" sont bornées : le pas de l'hélice diminue mais la particule se stabilise puis est renvoyée vers l'origine sur une autre hélice.

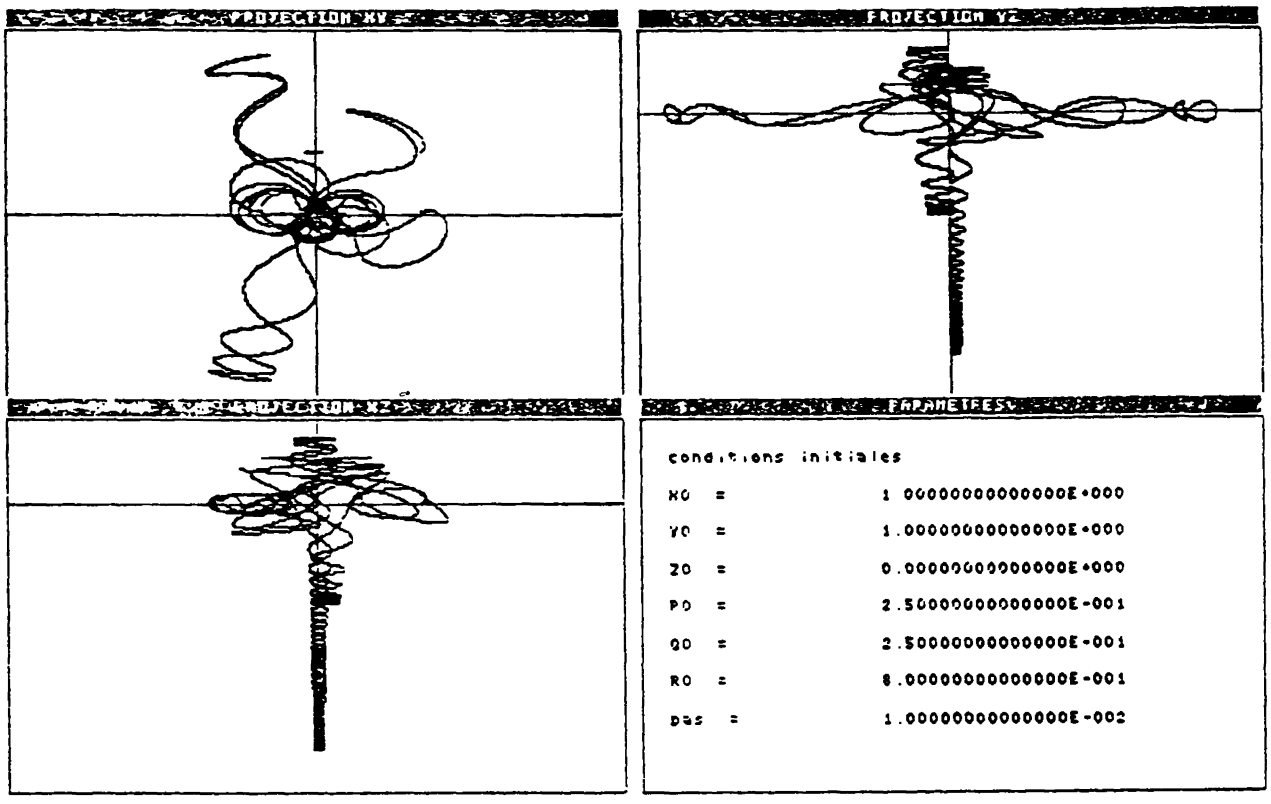

Figure 7

Appendice

Démonstration de la proposition 1 a).

1ère Remarque. — C^+ est décroissante, tandis que C^- passe par un minimum pour la valeur $r_1 = -\frac{\sqrt{2}M}{\sqrt{E}}$.

2e Remarque. — Pour z fixé, du signe de $-M$, la droite de hauteur z rencontre C^+ et C^- en P^+ et P^- d'abcisses respectives :

$$r_+ = \frac{+\sqrt{2E} + \sqrt{\Delta}}{z} \; ; \; r_- = \frac{-\sqrt{2E} + \sqrt{\Delta}}{z}.$$

En effet ces valeurs sont les racines positives des équations $r^2 z \pm \sqrt{2E} r + M = 0$, la notation Δ désignant le discriminant $2E - 4Mz$ commun aux 2 équations. On a

alors :

$$P^- P^+ = r_+ - r_- = \frac{2\sqrt{2E}}{z}.$$

3e Remarque. — Pour r fixé la hauteur de la bande vaut $\frac{2\sqrt{2E}}{r}$.

Notons R_+ le point $(r_+, 0)$ et R_- le point $(r_-, 0)$. On est amené à chercher un réel positif r_+ de façon que les côtés du rectangle $R^- R^+ P^+ P^-$ soient de longueur inférieure à $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$; si de plus ce réel est inférieur au minimum r_1 de la courbe C^-, on pourra affirmer que la distance d'un point quelconque de la bande à la ligne de champ $\mathcal{L}_M$ est inférieure à ε.

En effet, soit P un point de $\mathcal{B}$ de coordonnées (r, z)

• si $r > r_+$ alors $d(P, \mathcal{B}) < \frac{\sqrt{2E}}{r} < \frac{\sqrt{2E}}{r_+} = R^+ P^+$

• si $r < r_+$ soit P est au dessus de $P^- P^+$, auquel cas $d(P, \mathcal{B}) < \frac{\sqrt{2E}}{z} < P^- P^+$.

soit P est dans le rectangle $R^- R^+ P^+ P^-$. (Il ne peut être en dessous du fait que le minimum de C^- est situé au delà de ce rectangle) et sa distance à $\mathcal{L}_M$ est majorée par la longueur de la diagonale. Nous cherchons donc $r \geqslant 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} (1) & r \leqslant r_1 = -\dfrac{\sqrt{2}M}{\sqrt{E}} \\ (2) & \dfrac{2\sqrt{\varepsilon E}}{r} < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ (3) & \dfrac{2\sqrt{2E}}{-M} r^2 < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

explication de (3) : c'est la condition $\frac{2\sqrt{2E}}{z} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, compte tenu de l'estimation de z pour le point d'abcisse r qui est sur C^+ : $z = -\frac{M}{r^2} + \frac{\sqrt{2E}}{r}$ avec la remarque que $z > -\frac{M}{r^2}$.

Les conditions (2) et (3) ne sont compatibles que si l'intervalle $I_\varepsilon =]\frac{16E}{\varepsilon^2}, -\frac{M\varepsilon}{4\sqrt{E}}[$ est non vide d'où la condition

$$(i) \qquad E < \frac{\varepsilon^2}{16}|M|^{2/3}$$

De plus si *(i)* est vrai il faut comparer la borne inférieure de I_ε à r_1^2 : a-t-on $\inf I_\varepsilon < r_1^2$? Auquel cas le choix de r^+ sera possible. Or $\inf I_\varepsilon = \frac{16E}{\varepsilon^2} < |M|^{2/3}$ si *(i)* est vrai. Si

$$(ii) \qquad E < 2|M|^{4/3} \text{ alors } \inf I_\varepsilon < r_1^2.$$

Remarque. — La condition *(i)* est plus restrictive que la condition *(ii)* (à part pour des petites valeurs de $|M|$: si $|M| < \frac{\varepsilon^3}{32^{3/2}}$) mais on verra par la suite que M est fixé et ε choisi ensuite; il suffira de choisir $\frac{\varepsilon^3}{32^{3/2}} < |M|$ pour éviter de mentionner la condition *(ii)*.

Démonstration de la proposition 1 b).

1ère étape. — Développement limité de $v \longrightarrow U(u, v)$ (à u fixé) à l'ordre 1.

Il s'agit d'écrire le développement de la fonction $F(r,z)$ au voisinage du point (a,b) où $a^2b = -M$

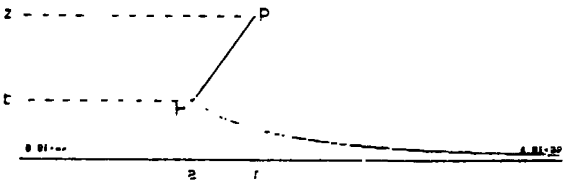

Figure 8

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = -\dfrac{(r^2z+M)^2}{r^3} + \dfrac{2z(r^2z+M)}{r} \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = r^2z + M \end{cases}$$

donc $\frac{\partial F}{\partial r}(a,b) = \frac{\partial F}{\partial^2}(a,b) = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \dfrac{3(2^2z+M)^2}{r^4} - \dfrac{6z(r^2z+M)}{r^2} + 4z^2 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} = 2rz \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = r^2 \end{cases}$$

Le développement de Taylor de F au voisinage de (a,b) est donc le suivant :

$$F(r,z) = +\frac{1}{2}[4b^2(r-a)^2 + a^2(z-b)^2 + 4ab(z-b)(r-a)] + 0(v^2)$$

(en effet $v^2 = (r-a)^2 + (z-b)^2$).

Or H est sur la ligne de champ donc $\overrightarrow{B}_H \left|\begin{matrix} a \\ -2b \end{matrix}\right.$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{PH} \left|\begin{matrix} r-a \\ z-b \end{matrix}\right.$.

Ainsi

$$\begin{aligned} F(r,z) &= \frac{1}{2}[2b(r-a) + (z-b)a]^2 + 0(v^2) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{PH})^2 + 0(v^2) \text{ avec } \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 2b \\ a \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{D} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{PH} \\ &= \frac{1}{2}(\|D\| \, \|PH\|) + 0(v^2) \\ F(r,z) &= \frac{1}{2}\|B_H\|^2 v^2 + 0(v^2). \end{aligned}$$

2e étape. — Il s'agit à présent de majorer les termes d'ordre supérieur à 2 dans le développement $U(u,v)$ par rapport à v. Notons

$$\begin{aligned} G(r,z) &= F(r,z) - \frac{1}{2}\|B_H\|^2 v^2 \\ &= U(u,v) - \frac{1}{2}\|B(u,0)\|v^2 \end{aligned}$$

Le calcul des dérivées partielles d'ordre 3 de F permet d'écrire :

$$|G(r,z)| \leqslant \frac{v^3}{3!} \max_{\theta \in [0,1]} A_{r_\theta, z_\theta}$$

avec

$$A_{r,z} = \max\left[2r, 2z, 12\left(\frac{z^2}{r} + \frac{2z(r^2 z + M)}{r^3} + \frac{(r^2 z + M)^2}{r^5}\right)\right]$$

et

$$r_\theta = (1-\theta)r + \theta a$$
$$z_\theta = (1-\theta)z + \theta b$$

Nous allons borner $v^3 \max_{(r,z)\in \mathcal{B}} A_{r,z}$.

LEMME. — *Soit p un point de $\mathcal{B}$, v sa distance à $\mathcal{L}_M$. Ses coordonnées (r,z) vérifient :*

(1) $$v \leqslant \frac{\sqrt{2E}}{r}$$

(2) $$v \leqslant \frac{2\sqrt{2E}}{z} \text{ si } z \text{ est du signe de } -M (-Mz > 0).$$

Ce lemme découle de la remarque 2 p. 8.

1er cas. — $-Mz > 1 \quad z > z_0 = -\frac{1}{M}$. On veut majorer $v^3 \max_{\mathcal{B}\cap\{z>z_0\}} A_{r,z}$.

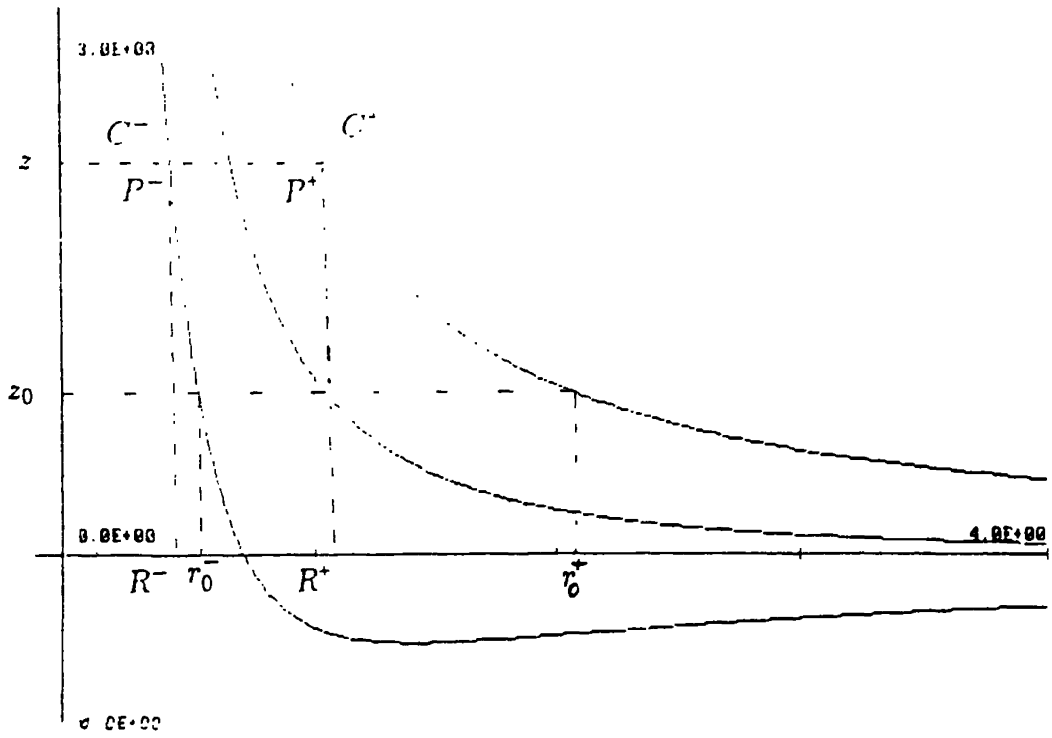

Figure 9

Or si $P \in \mathcal{B} \cap \{z > z_0\}$ on peut majorer G de la façon suivante :

$$|G(r,z)| \leqslant \frac{8}{3!}\frac{(\sqrt{2E})^3}{z^3} \max_{\mathcal{B}\cap\{z>z_0\}} A_{r,z}$$

$$\leqslant \frac{8}{3!}\frac{M^2\varepsilon^3}{64} \max_{\mathcal{B}\cap\{z>z_0\}} \left[\frac{2r}{z^3}, \frac{2}{z^2}, 12\left(\frac{1}{rz} + \frac{2\sqrt{2E}}{r^2z^2} + \frac{2E}{r^3z^3}\right)\right].$$

En effet on a tenu compte de l'hypothèse $E < \frac{\varepsilon^2|M|^{2/3}}{16}$ et de la majoration $r^2z + M \leqslant \sqrt{2E}r$ vraie dans $\mathcal{B}$. Les termes $\frac{2r}{z^3}$ et $\frac{2}{z^2}$ sont majorés respectivement par $\frac{2r_0^+}{z_0^3}$ et $\frac{2}{z_0^2}$.

Il reste à montrer que $\frac{1}{rz}$ est majoré; or $\frac{1}{rz} < \frac{1}{zr^-}$ (où r^- est la 1ère coordonnée du point P^- de cote z sur C^-).

De plus, r^- s'exprime en fonction de z grâce à la formule des racines d'un trinôme :

$$r^-z = -\sqrt{2E} + \sqrt{2E - 4Mz}.$$

Finalement :

$$\frac{1}{rz} < \frac{\sqrt{2E} + \sqrt{2E - 4Mz}}{-4Mz}.$$

Cette fonction de z tend vers zéro à l'infini. On a bien montré l'existence d'une constante C (ne dépendant que de E et M) telle que $\|G(r,z)\| < C\varepsilon^3$.

2e cas. — $P \in \mathcal{B} \cap \{z < z_0\}$. On sait qu'alors $r > r_0^-$ et $z > z_1 = \min C^-$. On se sert cette fois de l'inégalité (1) :

$$\|G(r,z)\| \leqslant \frac{8}{3!}\frac{M^2\varepsilon^3}{64} \max_{\mathcal{B}\cap\{z<z_0\}} \left[\frac{2}{r^2}, \frac{2z}{r^3}, 12\left(\frac{z^2}{r} + \frac{2z\sqrt{2E}}{r^2} + \frac{2E}{r^3}\right)\right].$$

Les termes sont tous majorés puisque $\frac{1}{r}$ et z le sont.

Démonstration du lemme 2 du paragraphe III.2.

Démonstration. — *1)*

$$\overline{J}'(c) = \frac{\partial}{\partial \bar{c}}\left(\int_{u_{\min}(\bar{c})}^{u_{\max}(\bar{c})} \sqrt{2[E + cB(u)]}du\right)\Big/_{\bar{c}=c} + \int_{u_{\min}(c)}^{u_{\max}(c)} \frac{2B(u)}{2\sqrt{2[E+cB(u)]}}du.$$

Le premier terme est nul car il vaut :

$$\left(\frac{\partial}{\partial c}u_{max}(c)\right)\sqrt{2[E + cB(u_{\max}(c))]} - \left(\frac{\partial}{\partial c}u_{\min}(c)\right)\sqrt{2[E + cB(u_{\min}(c))]}.$$

Les expressions sous le radical sont nulles puisqu'elles correspondent à la valeur $p_u = 0$.

2) Montrons que $\overline{J}'(c)$ est croissante dans un voisinage de 0. Soit $c < c' < 0$ où c est proche de 0.

La différence $\overline{J}'(c') - \overline{J}'(c)$ se scinde en trois parties :

$$\overline{J}'(c') - \overline{J}'(c) = \frac{1}{\sqrt{2E}}\left[\underbrace{\int_{u_{\min}(c')}^{u_{\min}(c)} \frac{B(u)du}{\sqrt{1 + \frac{c'}{E}B(u)}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{u_{\max}(c)}^{u_{\max}(c')} \frac{B(u)du}{\sqrt{1 + \frac{c'}{E}B(u)}}}_{I_2} + I_3\right]$$

$$I_3 = \int_{u_{\min}(c)}^{u_{\max}(c)} B(u)\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c'}{E}B(u)}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c}{E}B(u)}}\right]du.$$

I_1 et I_2 sont positives, I_3 est négative; il s'agit de les comparer. Du développement au voisinage de 0 des radicaux on obtient :

$$I_3 = \int_{u_{\min}(c)}^{u_{\max}(c)} \left[\frac{c-c'}{2E} + (c-c')\varepsilon(c)\right] B^2(u)du \text{ où } \varepsilon(c) \longrightarrow 0, \text{ quand } c \longrightarrow 0.$$

D'où, pour c suffisamment petit :

$$I_3 \geqslant \frac{2(c-c')}{3E} \max_{[u_{\min}(c),u_{\max}(c)]} B^2(u)[u_{\max}(c) - u_{\min}(c)]$$

(note : $c - c' < 0$)

Or, on peut obtenir facilement le comportement de $B(u)$ pour les grandes valeurs de u; en effet, des relations :

$$B^2 = r^2 + \frac{4M^2}{r^4}$$

et

$$du^2 = dr^2 + dz^2$$
$$= (1 + \frac{4M^2}{r^6})dr^2$$

On déduit les équations paramétriques de B en fonction de u :

$$\begin{cases} B(u) = r\sqrt{1 + \dfrac{4M^2}{r^6}} \\ u(r) = \displaystyle\int_{r_0}^{r} \sqrt{1 + \frac{4M^2}{t^6}}\,dt \quad \text{avec } r_0^6 = 8M^2 \end{cases}$$

(p. 7)

On calcule ensuite que :

$$\lim_{+\infty} \frac{B(r)}{r} = \lim_{+\infty} \frac{u(r)}{r} = 1 \text{ et } \lim_{0} \frac{r^2 B(r)}{2M} = \lim_{0} \frac{r^2 u(r)}{M} = 1.$$

D'où $B(u) \underset{+\infty}{\sim} u$ et $B(u) \underset{-\infty}{\sim} 2u$. Ainsi :

$$u_{\max}(c) \underset{c \to 0}{\simeq} B\big(u_{\max}(c)\big) = -\frac{E}{c} \text{ et } u_{\min}(c) \underset{0}{\simeq} \frac{E}{2c}.$$

On obtient finalement :

$$I_3 \geqslant \frac{2(c-c')}{3E}\frac{E^2}{c^2}\left[-\frac{3E}{2c}(1 + 0(\frac{1}{c^2}))\right]$$
$$I_3 \geqslant (c-c')\frac{E^2}{|c|^3}[1 + 0(\frac{1}{c^2})].$$

D'autre part :

$$I_1 \geqslant \int_{u_{\min}(c')}^{u_{\max}(c)} B(u)du \geqslant B\big(u_{\min}(c)\big)[u_{\min}(c) - u_{\min}(c')]$$

D'où

$$I_1 \geqslant -\frac{E}{c}\left[\frac{E}{2c}(1 + 0(\frac{1}{c^2})) - \frac{E}{2c'}(1 + 0(\frac{1}{c^2}))\right]$$

et

$$I_1 + I_2 \geqslant \frac{3E^2}{2c^2|c'|}(c' - c)\left(1 + 0(\frac{1}{c^2})\right).$$

La somme des trois intégrales est donc positive, pour c suffisamment proche de 0 puisque $\frac{1}{|c'|} > \frac{1}{|c|}$.

Bibliographie

[1] ARNOLD V. I. — *Dynamical Systems, Springer Verlag*, Encyclopaedia of Math. Sciences **3**, 1988.

[2] ARNOLD V. I. — *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Russ Math. Survey, **18** 6 (1963), 85–190.

[3] BRAUN M. — *Particle motions in a magnetic Field*, Journal of Diff. Equ, **8** (1970), 294–332.

[4] GARDNER M. — *The adiabatic invariant of periodic classical systems*, Phys. Rev., **115** (1959), 791–794.

[5] HERMAN M.R. — *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Astérisque, Paris, **1** (1983), 103–104.

[6] KRUSKAL M. — *Asymptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic*, Journal of Mathematical Physics, **3** (1962), 806–829.

[7] LOCHAK P., MEUNIER C. — *Multiphase averaging for classical systems with applications to Adiabatic theorems*, Applied Math. Sciences, Springer Verlag **72**, 1988.

[8] MOSER J. — *On invariant curves of area preserving mappings of an annulus*, Nachr Acad. Wiss. II Göttingen, Math. Phys. Klasse, 1–20, 1962.

[9] MOSER J. — *Stable and random motions in dynamical systems*, Annals of Math. studies Princeton University Press, 1973.

[10] NEISTADT A.I. — *The separation of motions in systems with rapidly rotating phase*, J. Appl. Math. Mech, **48** 2 (1984), 133–139.

[11] NORTHROP T.G. — *The adiabatic motion of charged particles*, Wiley Interscience Publishers New-York, 1963.

[12] WEITZNER H. — *Motion of a charged particle in slowly varying electromagnetic Field*, Comm. in pure and applied Math., **36** (1983), 695–704.

F. TRUC
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)