

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Théorème de Kirchhoff et théorie de Hodge

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 89-94

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__89_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE KIRCHHOFF ET THÉORIE DE HODGE

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

En 1847, le physicien allemand G.R. Kirchhoff prouve les résultats suivants sur les courants électriques dans un réseau connexe Γ :

si S est l'ensemble des sommets du réseau, A l'ensemble de ses arêtes, le nombre de cycles linéairement indépendants est égal à:

$$\mu_{\Gamma} = \#A - \#S + 1 ,$$

et il y a une dualité entre l'espace précédent et l'espace des courants électriques satisfaisant la *loi de Kirchhoff* en chaque sommet s de Γ , donnée par:

$$(c|i) = \sum_{\alpha \in \{c\}} R_{\alpha} . i_{\alpha} = " \int_c i " ,$$

où les R_{α} sont les résistances (> 0) des conducteurs et la somme porte sur les arêtes du cycle c .

Il semble que le travail de Kirchhoff ait été en partie à la source de celui de Poincaré fondant la topologie algébrique (*Analysis situs*).

Nous nous proposons de montrer que le théorème de Kirchhoff s'inscrit naturellement dans le contexte de la théorie de Hodge, dont l'application la plus marquante est le théorème de Hodge-de Rham pour une variété riemannienne compacte.

Cette relation est sûrement connue de nombreuses personnes, mais j'ai été incapable de la localiser dans la littérature récente. Voir cependant l'article de Hermann Weyl ([WE]) et la conférence de Bott ([BO]), ainsi que l'excellent livre de Lefschetz (en particulier le chapitre VI de la première partie).

Il nous a paru intéressant de détailler cette relation, par exemple comme introduction à des théories plus sophistiquées!!

Nous avons inclus un petit rappel de théorie de Hodge *naïve*.

Notations.

Nous dirons que deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont *duaux* si on a explicité une forme bilinéaire $B : E \times F \rightarrow k$ non dégénérée. On a alors aussi la notion de transposée d'une application linéaire.

1. Théorie de Hodge naïve

On considère dans la suite uniquement des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps des réels.

Un *complexe de chaînes* (C) est la donnée d'une suite $C_0, C_1, \dots, C_n$ d'espaces vectoriels (dimension $(C_i) = n_i$) et d'applications linéaires $b_i : C_{i+1} \rightarrow C_i$ (avec les conventions $C_{-1} = C_{n+1} = 0$) telles que pour tout i on ait:

$$b_i \circ b_{i+1} = 0 .$$

On représente (C) sous la forme:

$$(C) \quad 0 \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0 .$$

L'homologie en dimension i est le quotient:

$$H_i(C) = \frac{\text{Ker}(b_{i-1})}{\text{Im}(b_i)} .$$

Dans le cas particulier où $n = 1$ et $b_0 : C_1 \rightarrow C_0$, on a :

$$H_0(C) = \text{Coker}(b_0), \quad H_1(C) = \text{Ker}(b_0) .$$

L'espace $\text{Ker}(b_i)$ s'appelle espace des cycles de dimension i .

On définit aussi les nombres de Betti $\beta_i(C) = \dim(H_i(C))$.

Un *complexe de cochaînes* est une donnée du même type où les flèches vont dans l'autre sens: si on note C^i les espaces vectoriels et $d_i : C^i \rightarrow C^{i+1}$, on a $d_i \circ d_{i-1} = 0$ et la cohomologie $H^i = \text{Ker}(d_i) / \text{Im}(d_{i-1})$.

Un cas particulier est celui du dual d'un complexe de chaînes où les C^i sont les duals des C_i et les d_i les transposées des b_i . Dans ce cas il est clair que cette dualité induit une dualité entre les H_i et les H^i ; en particulier les nombres de Betti sont les mêmes.

Si on munit maintenant chaque C^i d'une structure euclidienne notée

$$\langle \omega | \omega' \rangle_i$$

(qu'on prendra garde à ne pas confondre avec le crochet de la dualité entre C_i et C^i , notée $(\cdot | \cdot)_i$), on peut choisir dans chaque classe de cohomologie un représentant canonique, celui de norme minimale.

Plus précisément si $\omega_1 \in \text{Ker}(d_i)$ et $[\omega_1]$ est sa classe de cohomologie, on s'intéresse à $\omega_0 \in [\omega_1]$ telle que:

$$\|\omega_0\|_i = \inf \{ \|\omega_1 + d_{i-1}\alpha\|_i \mid \alpha \in C^{i-1} \} .$$

On a évidemment alors, pour tout $\alpha \in C^{i-1}$:

$$\langle \omega_0 | d_{i-1} \alpha \rangle_i = 0 ,$$

ou encore $d_{i-1}^* \omega_0 = 0$. Si on note $\mathcal{H}^i$ l'espace des cochaines ω de degré i qui vérifient:

$$d_i \omega = d_{i-1}^* \omega = 0 ,$$

et qu'on désigne par *harmoniques de degré i* , on voit que:

(i) $\mathcal{H}^i$ est isomorphe à H^i

(ii) La dualité entre C_i et C^i induit une dualité entre H_i et $\mathcal{H}^i$.

De plus si on introduit le laplacien de Hodge $\Delta_i = d_i^* \circ d_i + d_{i-1} \circ d_{i-1}^*$ alors $\mathcal{H}^i = \text{Ker}(\Delta_i)$ et on a la décomposition orthogonale dite de Hodge:

$$C^i = \mathcal{H}^i \oplus \text{Im } d_{i-1} \oplus \text{Im}(d_i^*) ,$$

où la somme des 2 premiers facteurs est $\text{Ker}(d_i)$.

d_i induit un isomorphisme de $\text{Im}(d_i^*)$ sur $\text{Im}(d_i)$. On en déduit en particulier la relation définissant la caractéristique d'Euler de (C) :

$$\chi(C) := n_0 - n_1 + \dots + (-1)^n . n_n = \beta_0 - \beta_1 + \dots + (-1)^n \beta_n .$$

2. Lois de Kirchhoff

On considère maintenant un graphe fini connexe Γ (sans boucles, ni arêtes multiples). On suppose qu'on a orienté une fois pour toutes chaque arête. On note S l'ensemble des sommets de Γ , A l'ensemble de ses arêtes.

On définit un complexe de chaines de longueur 2:

$$0 \rightarrow C_1(\Gamma) \rightarrow C_0(\Gamma) \rightarrow 0 ,$$

où $C_0(\Gamma)$ est l'espace vectoriel réel de base S , $C_1(\Gamma)$ est l'espace vectoriel de base A et $b_1 = b$ est l'application linéaire qui sur l'arête orientée α d'extrémité α_+ et d'origine α_- vaut:

$$b(\alpha) := \{\alpha_+\} - \{\alpha_-\} .$$

On a donc les espaces $H_0(\Gamma) = \text{Coker}(b)$ et $H_1(\Gamma) = \text{Ker}(b)$ ("espaces des cycles" en un sens géométrique qui sera précisé plus loin).

Si on note $\beta_0(\Gamma)$, $\beta_1(\Gamma)$ les nombres de Betti de ce complexe, on a la relation:

$$\chi(\Gamma) = \beta_0(\Gamma) - \beta_1(\Gamma) = \#S - \#A .$$

On a aussi le complexe de cochaines dual de différentielle $d = d_1 = {}^t b$:

$$0 \rightarrow \mathbf{R}^S \rightarrow \mathbf{R}^A \rightarrow 0 ,$$

où les éléments de $\mathbf{R}^S$ doivent être pensés comme les potentiels électriques et ceux de $\mathbf{R}^A$ comme les courants électriques. Les dualités sont données par:

$$\int_s V = (V | \{s\})_0 = V(s) , \quad s \in S ,$$

et

$$\int_c i = (i|c)_1 = \sum R_\alpha \cdot x_\alpha \cdot i_\alpha ,$$

où les R_α (les résistances) sont des nombres > 0 donnés, et $c = \sum x_\alpha \{\alpha\}$.

Avec cette dualité, il est clair que $d = {}^t b$ est donnée par:

$$dV(\alpha) = \frac{V(\alpha_+) - V(\alpha_-)}{R_\alpha} ,$$

et qu'on a (Stokes):

$$\int_{b(c)} V = \int_c dV .$$

En particulier $H^0(\Gamma) = \text{Ker}(d)$ est formé des potentiels constants et donc

$$\beta_0(\Gamma) = 1$$

et par suite:

$$\mu := \beta_1(\Gamma) = \#A - \#S + 1 .$$

Interprétation de $H_1(\Gamma)$ comme espace des cycles de Γ .

Appelons *cycle géométrique* de longueur n une application γ de $\mathbb{Z}/n.\mathbb{Z}$ dans S telle que $\forall i$, $\gamma(i+1)$ et $\gamma(i)$ soient les 2 extrémités d'une même arête de Γ .

A tout cycle géométrique γ , on associe une chaîne c_γ de $C_1(\Gamma)$: $c_\gamma = \sum n_\alpha \cdot \{\alpha\}$ où n_α est le nombre algébrique de fois où γ suit l'arête orientée α . Il est clair que c_γ est un cycle, donc un élément de $H_1(\Gamma)$. Montrons que les c_γ engendrent cet espace.

Pour un cycle c notons $l(c)$ le nombre de coefficients x_α non nuls. Montrons qu'on peut diminuer $l(c)$ en ajoutant à c un multiple convenable d'un c_γ .

Soit $c = x_{\alpha_0} \cdot \{\alpha_0\} + \sum x_\alpha \cdot \{\alpha\}$, où la somme porte sur les $\alpha \neq \alpha_0$ tels que $x_\alpha \neq 0$.

Soit Γ_0 le graphe dont les arêtes sont ces α . Si la composante connexe $\Gamma_{0,+}$ de Γ_0 contenant $(\alpha_0)_+$ contient aussi $(\alpha_0)_-$, on peut refermer α_0 en 1 cycle géométrique de Γ_0 . Sinon, écrivant que $b(c) = 0$ pour les sommets de $\Gamma_{0,+}$, on en déduit que $\{(\alpha_0)_+\}$ est un bord, ce qui est impossible, car l'intégrale de 1 sur un bord est nulle (Stokes).

Il suffit maintenant de considérer $c' = c - x_{\alpha_0} \cdot c_\gamma$, où γ est le cycle de Γ_0 contenant α_0 (avec multiplicité 1) dont on vient de montrer l'existence.

Théorie de Hodge.

On munit maintenant $\mathbb{R}^S$ du produit euclidien canonique et $\mathbb{R}^A$ du produit défini par:

$$\langle i|i' \rangle_1 = \sum R_\alpha i_\alpha i'_\alpha .$$

Cette norme a une interprétation physique évidente : c'est l'énergie dissipée par le courant I dans le circuit par effet Joule.

Calculons alors d^* :

$$\langle d^* i | v_s \rangle_0 = \langle i | \sum_+ \frac{u_\alpha}{R_\alpha} - \sum_- \frac{u_\alpha}{R_\alpha} \rangle_1 ,$$

où v_s est le potentiel qui vaut 1 en s et 0 ailleurs, u_α est le courant qui vaut 1 dans α et 0 ailleurs, $\sum_+$ (resp. $\sum_-$) est la somme sur les α d'extrémité (resp. d'origine) s .

On en déduit:

$$(d^*i)(s) = \sum_+ i_\alpha - \sum_- i_\alpha .$$

En particulier, un courant est harmonique s'il satisfait la loi de Kirchhoff en tout sommet.

On en déduit le *théorème de Kirchhoff*:

$$\dim(\mathcal{H}^1(\Gamma)) = \mu ,$$

et la dualité entre $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ et l'espace des cycles donnée par intégration (variation du potentiel associé au courant le long de chaque cycle).

Plus précisément si $\gamma_1, \dots, \gamma_\mu$ est une famille de cycles dont les images dans $C_1(\Gamma)$ forment une base, l'application de $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}^\mu$ donnée par

$$i \rightarrow \left(\int_{\gamma_1} i, \dots, \int_{\gamma_\mu} i \right)$$

est un isomorphisme.

3. Extensions

La théorie précédente s'étend sans problème au cas d'une surface munie d'une décomposition cellulaire. Les 1-formes harmoniques seront alors des courants (fonctions sur les arêtes orientées) satisfaisant une condition de fermeture (intégrale nulle sur les bords des cellules de dimension 2) et de co-fermeture (lois de Kirchhoff). L'espace de ces courants a alors une dimension égale au nombre de Betti β_1 de la cohomologie usuelle à coefficients réels de la surface.

L'extension la plus classique est la théorie de Hodge-de Rham d'une variété riemannienne compacte, où le complexe de cochaines est le complexe des formes différentielles sur la variété. Les structures euclidiennes sur les espaces Ω^i des formes différentielles de degré i sont construites à partir de la métrique riemannienne:

$$\|\omega\|_i^2 = \int_X |\omega(x)|_i^2 d\mu_g(x) ,$$

où l'on prend l'intégrale par rapport à la mesure riemannienne canonique de la norme ponctuelle de ω . Les opérateurs Δ_i sont alors elliptiques ce qui permet de faire une théorie raisonnable des formes harmoniques (en particulier elles sont lisses et forment un espace de dimension finie). Formellement c'est la même théorie que plus haut ([WA]).

On peut aussi faire varier la structure euclidienne, c'est ce que propose E. Witten; si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse, on prend:

$$\|\omega\|_{i,f}^2 = \int_X |\omega(x)|_i^2 e^{-2tf(x)} d\mu_g(x) ,$$

et l'on obtient des *Laplaciens de Witten* :

$$\Delta_{i,t} = \Delta_i + t^2 \cdot \|\text{grad}(f)\|^2 + O(t) .$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, les valeurs propres des $\Delta_{i,t}$ tendent vers l'infini sauf pour un nombre fini d'entre elles qui correspondent à des formes harmoniques localisées près des points critiques de f (minimas de $\|\text{grad}(f)\|$).

Cela permet de casser le complexe de de Rham en deux morceaux dont l'un C^i de dimension finie contient la cohomologie. La dimension de C^i pour t assez grand est égal au nombre de points critiques d'indice i de f : cela donne une nouvelle preuve des inégalités de Morse et même la construction explicite par analyse de l'effet tunnel (*instantons*) d'un complexe associé à f ayant la cohomologie de de Rham de X (pour ceci voir par exemple l'exposé [HE]).

4. Références

- [B-L-W] BIGGS N.L., LLOYD E.K. et WILSON R.J. — *Graph theory*, Clarendon Oxford , 1976.
- [BO] BOTT R. — *On induced representations*, Proc. Symp. in pure Maths, **48** (1988), 1-3.
- [D-S] DOYLE P.G., SNELL J.L. — *Random walks and electric networks*, Carus mathematical monograph 22, 1984.
- [G-O] GAVEAU B., OKADA M. — *Differential forms and heat diffusion on one dimensional singular varieties*, Bull. Soc. Math., **115** (1991), 61-80.
- [HE] HENNIART G. — *Les inégalités de Morse (d'après E. Witten)*, Séminaire Bourbaki, **617** (83-84), 01-17.
- [KI] KIRCHHOFF G.R. — *Ueber den Durchgang eines electrischen Stromes durch eine Ebene unbesondere durch Kreisformige*, Annalen der Physik und Chemie, **72** (1847), 497-508.
- [LE] LEFSCHETZ S. — *Applications of algebraic topology*, Springer, 1975.
- [WA] WARNER F. — *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott-Foresman, 1971.
- [WE] WEYL H. — *Reparticion de corriente en una red conductora*, Revista Mat. Hispano-Americana, **5** (1923), 153-164.

Yves COLIN DE VERDIÈRE
 INSTITUT FOURIER
 Laboratoire de Mathématiques
 BP 74
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)