JACQUES GASQUI

Rigidité infinitésimale et géométrie de la quadrique complexe de dimension 4

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 141-152

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__141_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1990–1991 (141–152)

RIGIDITÉ INFINITÉSIMALE ET GÉOMÉTRIE DE LA QUADRIQUE COMPLEXE DE DIMENSION 4

par *Jacques GASQUI*

Soit (X, g) un espace riemannien symétrique compact. On dit qu'il est infinitésimalement rigide si toute forme quadratique sur X, à énergie nulle (*i.e.* intégrale nulle) sur les géodésiques fermées de X, est une dérivée de Lie de la métrique canonique g. Après les espaces de rang 1, un exemple intéressant à traiter est celui de la quadrique complexe non dégénérée Q_n de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. Nous avons établi dans [6] sa rigidité infinitésimale lorsque $n \geqslant 5$, de manière essentiellement "algébrique" et sans faire appel à de grosses machineries. Nous regardons ici le cas nettement plus délicat de la dimension 4 qui nécessite l'intervention de l'analyse harmonique sur la quadrique en tant qu'espace homogène.

Vu la complexité des calculs et les grandes multiplicités en jeu, il serait extrêmement difficile de régler directement le problème à coups de représentations. Après une bonne préparation géométrique et des mixages avec des méthodes de Michel ([9]), on arrive in fine à des calculs relativement sympathiques. Notre tâche est facilitée par la simplicité (remarquable) des formules de géométrie kählérienne locale sur la quadrique. Au passage, nous mettons en lumière un phénomène d'orientation des structures réelles des quadriques de dimensions paires, phénomène qui explique dans une large mesure la spécificité de la dimension 4. C'est sur la présentation de ces quelques points que nous allons insister dans ces notes.

Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec H. Goldschmidt ([8]).

1. Les quadriques complexes non dégénérées.

On considère donc la quadrique complexe Q_n qui est l'hypersurface complexe de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, d'équation homogène

$$\zeta_0^2 + \cdots + \zeta_{n+1}^2 = 0 .$$

Ici $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n+1}$ sont les coordonnées complexes canoniques de $\mathbb{C}^{n+2}$. Rappelons d'abord comment l'on identifie Q_n à la Grassmanienne $\widetilde{G}_{2,n+2}$ des 2-plans orientés de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Si W désigne la variété (de Stiefel) formée des couples (x, y) de vecteurs unitaires et orthogonaux de l'espace euclidien standard $\mathbf{R}^{n+2}$, alors $\widetilde{G}_{2,n+2}$ est le quotient de W par l'action naturelle à droite de $SO(2)$. Notons $x_0, \dots, x_{n+1}$ les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbf{R}^{n+2}$ et considérons l'application

$$\begin{aligned} F : W &\longrightarrow \mathbf{C}^{n+2} - \{0\} \\ (x, y) &\longmapsto (x_0 + \sqrt{-1}y_0, \dots, x_{n+1} + \sqrt{-1}y_{n+1}) \,. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$(x_0 + \sqrt{-1}y_0)^2 + \cdots + (x_{n+1} + \sqrt{-1}y_{n+1})^2 = 0 \,.$$

Si $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on a

$$F\big((x, y)R(\theta)\big) = e^{-i\theta}F(x, y) \,;$$

ainsi F induit une application de $\widetilde{G}_{2,n+2}$ dans Q_n, qui est l'identification naturelle cherchée. C'est aussi une isométrie.

On peut alors voir les fonctions de $L^2(Q_n)$ comme les fonctions de $L^2\big(SO(n+2)/SO(n)\big)$ invariantes par l'action à droite de $SO(2)$: cette description est utile pour expliciter les fonctions propres du Laplacien sur la quadrique (voir [11]).

Une autre manière d'identifier Q_n à l'espace homogène (symétrique) $SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$ consiste à observer que $SO(n+2)$, vu comme sous-groupe de $SU(n+2)$ agissant en tant que groupe d'isométries de $\mathbf{C}^{n+2}$ et $\mathbf{P}^{n+1}(\mathbf{C})$, laisse la quadrique invariante et induit sur cette dernière une action transitive. Si a est le point de Q_n de coordonnées homogènes $(1, i, 0, \dots, 0)$, il est facile de voir que le groupe d'isotropie du point a est le sous-groupe $H = SO(2) \times SO(n)$ de $SO(n+2)$ formé des matrices

$$\Phi = \left(\begin{array}{c|c} R(\theta) & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) , \quad \theta \in \mathbf{R}, \ B \in SO(n) \,.$$

Nous allons maintenant décrire l'action de l'isotropie sur les fibrés tangent et normal à la quadrique. On peut identifier $T_a = T_a(Q_n)$ avec $\mathbf{C}^n$ de telle sorte que la structure presque-complexe J de T_a soit celle déterminée par la multiplication par i sur $\mathbf{C}^n$ et que l'action de la différentielle $\Phi_* : T_a \longrightarrow T_a$ soit donnée par

$$\Phi_*\zeta = e^{i\theta}B\zeta \,,$$

où $SO(n)$ est vu ici comme sous-groupe de $SU(n)$. En particulier, si on appelle encore $R(\theta)$ la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} R(\theta) & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

de H, on a

$$R(\theta)_*\zeta = \cos\theta\zeta + \sin\theta J\zeta \,. \tag{1.1}$$

Par contre l'action de $R(\theta)_*$ dans l'espace normal en a à la quadrique est donnée par

$$R(\theta)_*\nu = \cos 2\theta\nu + \sin 2\theta J\nu \,. \tag{1.2}$$

C 'est le doublement de l'angle de la rotation dans cette dernière formule, par rapport à (1.1), qui fera apparaître le phénomène d'orientation du paragraphe suivant.

2. Orientabilité des structures réelles de la quadrique.

Soit ν un vecteur normal unitaire en un point x à la quadrique $X = Q_n$ et soit h_ν la seconde forme fondamentale correspondante. On identifie, via la métrique canonique de la quadrique, h_ν à un endomorphisme symétrique

$$K_\nu : T_x \longrightarrow T_x$$

de l'espace tangent en x à X. Si μ est une autre normale unitaire en x à X, on a

$$\mu = \cos\alpha\nu + \sin\alpha J\nu \ , \quad \text{avec } \alpha \in \mathbf{R} \ ,$$

et

$$K_\mu = \cos\alpha K_\nu + \sin\alpha J K_\nu \ . \tag{2.1}$$

On a le formulaire suivant (*cf.* [10]) :

$$K_{J\nu} = JK_\nu \ ; \tag{2.2}$$

$$JK_\nu = -K_\nu J \ ; \tag{2.3}$$

$$K_\nu^2 = \text{ identité } ; \tag{2.4}$$

La relation (2.3) provient du caractère kählérien de la métrique canonique g de X, et le fait que g soit une métrique d'Einstein nous donne (2.4). A cause de cette dernière formule on dit que K_ν est la *structure réelle* de la quadrique associée à la normale unitaire ν. Toujours d'après (2.4), on a une décomposition

$$T_x = T^+_{\nu,x} \oplus T^-_{\nu,x}$$

de T_x en sous-espaces propres associés aux valeurs propres +1 et -1 de K_ν, et la structure presque-complexe J échange ces deux sous-espaces propres.

Si $\Phi \in SO(n+2)$, alors $\mu = \Phi_*\nu$ est encore une normale unitaire à X ; on voit aisément que

$$\Phi_* K_\nu = K_\mu \Phi_*$$

et donc que Φ_* induit un isomorphisme

$$\Phi_* : T^+_{\nu,x} \longrightarrow T^+_{\mu,\Phi(x)} \ .$$

DÉFINITION. — *On dit que les structure réelles de la quadrique X sont orientées, si pour tout $x \in X$ et toute normale unitaire ν en x, l'espace $T^+_{\nu,x}$ est orienté de telle sorte que l'isomorphisme*

$$\Phi_* : T^+_{\nu,x} \longrightarrow T^+_{\Phi_*\nu,\Phi(x)}$$

préserve l'orientation pour tout $\Phi \in SO(n+2)$.

Replaçons-nous maintenant au point a. Soit

$$\Phi = \left(\begin{array}{c|c} R(\theta) & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \ , \quad \text{avec } B \in SO(n) \ ,$$

un élément du sous-groupe d'isotropie en a. Si ν est une normale unitaire en a, alors, d'après (1.2), on a

$$\Phi_* \nu = \nu \ ,$$

si et seulement si $\theta = 0 \bmod. \pi$. Dans cette situation, on peut identifier naturellement $T^+_{\nu,a}$ avec $\mathbb{R}^n$ en sorte que l'action de Φ_* sur $T^+_{\nu,a} \cong \mathbb{R}^n$ soit donnée par

$$\Phi_* u = \begin{cases} Bu \ , & \text{si } \theta = 0 \bmod. 2\pi \\ -Bu \ , & \text{si } \theta = \pi \bmod. 2\pi \end{cases} \tag{2.5}$$

L'action de l'isotropie sur les vecteurs unitaires normaux en a est transitive. On voit donc, avec (2.5), que si *n est pair*, une orientation de $T^+_{\nu,a}$ détermine une orientation de toutes les structures réelles. Toujours, avec la même formule, observons encore que si *n est impair les structures réelles ne sont pas orientables.*

3. Formes hermitiennes sur la quadrique de dimension 4.

Notons $T^{1,1}_{\mathbb{R}}$ le fibré sur X des formes réelles de type $(1,1)$. Avec (2.1) et (2.3), on voit que les structures réelles induisent une involution canonique

$$K : T^{1,1}_{\mathbb{R}} \longrightarrow T^{1,1}_{\mathbb{R}} \ .$$

On a alors une décomposition

$$T^{1,1}_{\mathbb{R}} = (T^{1,1}_{\mathbb{R}})^+ \oplus (T^{1,1}_{\mathbb{R}})^-$$

de $T^{1,1}_{\mathbb{R}}$ en sous-fibrés propres correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1 de K. Si $x \in X$ et ν est une normale unitaire en x, alors on a

$$(T^{1,1}_{\mathbb{R}})^+_x = \left\{ \beta \in T^{1,1}_{\mathbb{R}} ; \beta(u, Jv) = 0, \text{ pour tous } u, v \in T^+_{\nu,x} \right\} ,$$

ce qui nous donne une identification (non canonique)

$$(T^{1,1}_{\mathbb{R}})^+_x \cong \Lambda^2 (T^+_{\nu,x})^* \tag{3.1}$$

de $(T^{1,1}_{\mathbb{R}})^+_x$ avec l'espace des 2-formes alternées sur $T^+_{\nu,x}$.

Si $n = 4$, choisissons une orientation (équivariante) des structure réelles. On considère alors l'involution

$$* : \Lambda^2 (T^+_{\nu,x})^* \longrightarrow \Lambda^2 (T^+_{\nu,x})^*$$

déterminée par l'orientation de l'espace $T^+_{\nu,x}$ de dimension 4. Il n'est pas difficile de voir qu'avec les identifications (3.1), on obtient une involution uniquement déterminée par l'orientation

$$* : (T^{1,1}_{\mathbb{R}})^+ \longrightarrow (T^{1,1}_{\mathbb{R}})^+ \ ,$$

dont on note F^+ et F^- les sous-fibrés propres correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1.

On a par ailleurs

$$(T^{1,1}_{\mathbb{R}})^- = (T^{1,1}_{\mathbb{R}})^-_0 \oplus \{\omega\} \ ,$$

où $\{\omega\}$ est le fibré en droites engendré par la forme de Kähler et $(T_{\mathbb{R}}^{1,1})_0^-$ le sous-fibré des formes à trace nulle de $(T_{\mathbb{R}}^{1,1})^-$. Finalement si $n = 4$, on a la décomposition orthogonale irréductible

$$T_{\mathbb{R}}^{1,1} = (T_{\mathbb{R}}^{1,1})_0^- \oplus \{\omega\} \oplus F^+ \oplus F^- \ . \tag{3.2}$$

Ici irréductible veut dire que chaque fibré apparaissant dans la décomposition est homogène avec fibre irréductible en a sous l'action de l'isotropie. Lorsque $n \geqslant 5$, la décomposition équivariante de $(T_{\mathbb{R}}^{1,1})^+$ disparaît et l'analogue de (3.2) se réduit à

$$T_{\mathbb{R}}^{1,1} = (T_{\mathbb{R}}^{1,1})_0^- \oplus \{\omega\} \oplus (T_{\mathbb{R}}^{1,1})^+ \ . \tag{3.3}$$

Nous verrons plus loin, réciprocité de Frobenius oblige, toute l'importance de décompositions de cette nature.

La comparaison de (3.2) et (3.3) montre un des aspects (algébriques) distinguant la dimension 4 des autres. A ce sujet, il est bien connu que la quadrique de dimension 4 est la seule quadrique à s'identifier à une grassmanienne complexe, celle des 2-plans complexes de $\mathbb{C}^4$. Sur cette dernière, l'application envoyant un sous-espace sur son orthogonal nous donne une involution naturelle qui permettrait de retrouver, d'un autre point de vue, le phénomène particulier de la décomposition des formes hermitiennes en dimension 4.

4. Rigidité infinitésimale et opérateurs différentiels.

Notons $\underline{E}$ le faisceau des sections d'un fibré vectoriel E sur X et $C^\infty(E)$ l'espace de ses sections globales. Désignons encore par T, T^* les fibrés tangent et cotangent de X, et S^2T^* le carré symétrique de T^*.

La théorie générale des déformations infinitésimales de [5] fournit une résolution explicite du faisceau des champs de Killing de (X, g). Plus précisément si

$$\begin{aligned} D_0 : \underline{T} &\longrightarrow S^2\underline{T}^* \\ \xi &\longmapsto \mathcal{L}_\xi g \end{aligned}$$

est l'opérateur de Killing envoyant un champ ξ sur la dérivée de Lie $\mathcal{L}_\xi g$ de g le long de ξ, on a une suite exacte

$$\underline{T} \xrightarrow{D_0} S^2\underline{T}^* \xrightarrow{D_1} \underline{F}_2 \xrightarrow{D_2} \underline{F}_3 \longrightarrow \cdots \ , \tag{4.1}$$

où les F_i sont des fibrés vectoriels et les D_i des opérateurs différentiels; en particulier l'opérateur D_1 est d'ordre 2, d'après les résultats de [3].

Proposition 1. — *Si $h \in C^\infty(S^2T^*)$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe un champ ξ tel que $h = \mathcal{L}_\xi g$;

(ii) en restriction à toute sous-variété totalement géodésique, à courbure constante de X, la forme quadratique h est une dérivée de Lie de la métrique induite;

(iii) on a $D_1 h = 0$.

Si on considère le fibré C de tous les tenseurs de type $(0,4)$ ayant les symétries d'un tenseur de courbure de Riemann, alors le fibré F_2 apparaissant dans la résolution (4.1), est le fibré quotient

$$F_2 = C/\widetilde{C} \ ,$$

où $\widetilde{C}$ est le sous-fibré "orbite infinitésimale" de la courbure de la quadrique (*cf.* [5]). On peut construire un sous-fibré N de C, contenant strictement $\widetilde{C}$, et possédant la propriété suivante :

"pour tout $h \in C^\infty(S^2T^*)$, les deux conditions ci-après sont équivalentes :

(1) h est à énergie nulle;

(2) on a $\beta D_1 h = 0$, où $\beta : C/\widetilde{C} \longrightarrow C/N$ est la surjection canonique."

Disons rapidement que la condition (1) est plus faible que la condition (ii) de la proposition 1, du fait de la présence de sphères totalement géodésiques maximales dans la quadrique, pour lesquelles il est bien connu que (1) et *(ii)* ne sont pas équivalentes. Il en résulte que (1) n'entraîne pas directement $D_1 h = 0$, mais plutôt qu'un "quotient" de D_1 s'annule, ou encore que $D_1 h \in C^\infty(N/\widetilde{C})$. On pose dans la suite

$$P = \beta D_1 .$$

Notre principal résultat est le

THÉORÈME. — *Lorsque $X = Q_n$ et $n \geqslant 4$, le complexe*

$$C^\infty(T) \xrightarrow{D_0} C^\infty(S^2T^*) \xrightarrow{P} C^\infty(N/\widetilde{C}) \tag{4.2}$$

est exact.

Ce théorème entraîne donc immédiatement la rigidité infinitésimale annoncée. Lorsque $n \geqslant 5$, on peut expliciter un supplémentaire "géométrique de $\widetilde{C}$ dans N et démontrer alors assez facilement l'exactitude (*cf.* [6]). Ce n'est pas le cas de la dimension 4 beaucoup plus délicat à traiter.

5. Intervention de l'analyse harmonique.

Soit $\widehat{G}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de $G = SO(n+2)$. Si E est un fibré vectoriel homogène sur la quadrique $Q_n = SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$, alors $C^\infty(E)$ est un G-module et si $\gamma \in \widehat{G}$, on note $C^\infty_\gamma(E)$ la composante isotypique de $C^\infty(E)$, correspondant à la représentation γ.

Le complexe (4.2) est un complexe d'opérateurs homogènes; il induit donc pour tout $\gamma \in \widehat{G}$, un sous-complexe

$$C^\infty_\gamma(T) \xrightarrow{D_0} C^\infty_\gamma(S^2T^*) \xrightarrow{P} C^\infty_\gamma(C/N) . \tag*{(4.2)$_\gamma$}$$

En utilisant le fait que $D_0(C^\infty(T))$ est fermé dans $C^\infty(S^2T^*)$ pour la topologie L^2, on voit que (4.2) est exact si et seulement si $(4.2)_\gamma$ est exact pour tout $\gamma \in \widehat{G}$.

Montrer que $(4.2)_\gamma$ est exact revient à vérifier que la multiplicité de l'image $P\big(C^\infty_\gamma(S^2T^*)\big)$ est suffisamment grande. Compte tenu de la description compliquée des représentations de $C^\infty(S^2T^*)$, mais surtout des multiplicités très grandes qui peuvent intervenir (14 dans certains cas), il n'est pas raisonnable de montrer directement l'exactitude de $(4.2)_\gamma$ pour tout γ!

6. Intervention de la divergence.

Je renvoie aux auteurs classiques pour les définitions de la divergence des tenseurs symétriques

$$\delta : C^\infty(S^2T^*) \longrightarrow C^\infty(T^*)$$

et du Laplacien de Lichnerowicz

$$\Delta_L : C^\infty(S^2T^*) \longrightarrow C^\infty(S^2T^*) .$$

Dans les travaux de R. Michel, pionnier en matière de rigidité infinitésimale, notamment pour les espaces projectifs, deux observations fondamentales sont souvent à la base des théorèmes de rigidité. La première consiste à vérifier que

(I) Δ_L stabilise la condition d'énergie nulle .

A l'aide de (I), on montre ensuite que

(II) Divergence nulle + énergie nulle $\Longrightarrow$ trace nulle.

Si (I) se manipule aisément dans le cas à courbure constante ou de rang 1, les choses sont nettement plus compliquées pour un espace riemannien symétrique de rang quelconque. Nous allons ici nous contenter d'établir la commutativité d'un diagramme et voir comment elle permet de démontrer (II). Commençons par quelques préliminaires.

Tout d'abord on a une trace naturelle

$$\mathrm{Trace}\ : C \longrightarrow S^2T^* .$$

C'est celle qui envoie le tenseur de courbure de Riemann de g sur sa courbure de Ricci. Si la métrique est d'Einstein, alors $\mathrm{Trace}(\widetilde{C}) = 0$; la trace passe donc au quotient et nous donne

$$\mathrm{Trace} : C/\widetilde{C} \longrightarrow S^2T^* .$$

On a aussi une trace $\mathrm{Tr} : F_2 \longrightarrow T^*$, où F_2 est le fibré apparaissant dans (4.1). Notons encore

$$\mathrm{Ric}'_g : S^2\underline{T}^* \longrightarrow S^2\underline{T}^*$$

l'opérateur différentiel linéaire d'ordre 2, obtenu en linéarisant le long de g l'opérateur différentiel non linéaire de courbure de Ricci et

$$B_g : S^2\underline{T}^* \longrightarrow \underline{T}^*$$

l'opérateur envoyant h sur $\delta h - \frac{1}{2}d(\mathrm{Trace}\, h)$. On a montré dans [4] que la suite

$$S^2\underline{T}^* \xrightarrow{\mathrm{Ric}'_g - \lambda\,\mathrm{id.}} S^2\underline{T}^* \xrightarrow{B_g} \underline{T}^*$$

est un complexe, lorsque g est d'Einstein avec courbure de Ricci égale à λg.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition qui jouera un rôle stratégique analogue à (I).

PROPOSITION 2. — *Lorsque (X, g) est un espace riemannien symétrique d'Einstein avec courbure de Ricci égale à λg, alors le diagramme*

$$
\begin{array}{ccccc}
S^2\underline{T}^* & \xrightarrow{D_1} & \underline{C}/\underline{\widetilde{C}} & \xrightarrow{D_2'} & \underline{F}_2 \\
\Big\downarrow \scriptstyle\text{id.} & & \Big\downarrow \scriptstyle\text{Trace} & & \Big\downarrow \scriptstyle\text{Tr} \\
S^2\underline{T}^* & \xrightarrow{\mathrm{Ric}'_g - \lambda\,\mathrm{id.}} & S^2\underline{T}^* & \xrightarrow{B_g} & \underline{T}^*
\end{array}
\tag{6.1}
$$

est commutatif.

Observons que le Laplacien de Lichnerowicz est effectivement présent dans la proposition 2, puisqu'il intervient dans la formule donnant Ric'_g. Par exemple, on a

$$\mathrm{Ric}'_g\, h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{2}\ \text{Hessien (Trace}\, h) \ , \tag{6.2}$$

lorsque $\delta h = 0$.

Nous allons dans la suite identifier $T^{1,1}_{\mathbb{R}}$ avec un sous-fibré de S^2T^*. Notons E le sous-fibré de rang 2 de S^2T^*, dont la fibre en $x \in X = Q_n$ est

$$E_x = \{h_\nu \mid \nu \text{ normale unitaire en } x\} \ .$$

Un calcul algébrique de [7] montre que l'on a

$$\mathrm{Trace}(N) \subset E \oplus (T^{1,1}_{\mathbb{R}})^+ \ . \tag{6.3}$$

Il résulte immédiatement de (6.3) que

$$\mathrm{Trace}\,\big(\mathrm{Trace}(N)\big) = \{0\} \ . \tag{6.4}$$

PROPOSITION 3. — *Soit h une forme quadratique à énergie nulle sur la quadrique de dimension 4. Si $\delta h = 0$, alors*

$$\mathrm{Trace}(h) = 0 \ .$$

Démonstration. — Ici la constante d'Einstein λ est égale à 8. D'après la commutativité de (6.1), on a

$$-\,\mathrm{Trace}\, D_1 h = \mathrm{Ric}'_g\, h - 8h \ .$$

Comme $D_1 h \in C^\infty(N/\widetilde{C})$, on voit que $\mathrm{Ric}'_g\, h - 8h$ est une section de $\mathrm{Trace}(N)$; ainsi, avec (6.4), on a

$$\mathrm{Trace}(\mathrm{Ric}'_g\, h - 8h) = 0 \ .$$

On déduit facilement de (6.2) que

$$\mathrm{Trace}(\mathrm{Ric}'_g\, h) = \Delta(\mathrm{Trace}\, h) \ ,$$

lorsque $\delta h = 0$. Ici Δ est le laplacien standard de g. On arrive donc à

$$\Delta(\mathrm{Trace}\, h) = 8\, \mathrm{Trace}\, h \ .$$

Pour finir, il est bien connu (*cf.* [2]) que la première valeur propre du laplacien Δ est strictement plus grande que la constante d'Einstein, donc Trace $h = 0$.

COROLLAIRE. — *Si h est une forme quadratique à énergie nulle et divergence nulle sur Q_4, alors*

$$\Delta_L h - 16h \in C^\infty\left(E \oplus (T_{\mathbf{R}}^{1,1})^+\right) .$$

Expliquons maintenant comment se démontre la rigidité infinitésimale en dimension 4. Prenons donc une forme quadratique h à énergie nulle sur la quadrique. A cause de la décomposition de Berger-Ebin ([1])

$$C^\infty(S^2T^*) = D_0\left(C^\infty(T)\right) \oplus \ker\delta ,$$

on peut supposer, sans perte de généralité, que h est aussi à divergence nulle.

Il s'agit alors de prouver que l'opérateur différentiel $Q = \delta \oplus P$ est injectif. Puisque Q est un opérateur homogène, ceci sera une conséquence de la

PROPOSITION 4. — *Soit $S^2T^*_{\mathbf{C}}$ le complexifié de S^2T^*. Pour tout $\gamma \in \widehat{G}$, on a*

$$M_\gamma = C^\infty_\gamma(S^2T^*_{\mathbf{C}}) \cap \ker Q = \{0\} .$$

Un étape-clé de cette proposition est le

LEMME. — *Soit $E_{\mathbf{C}}$ le complexifié du fibré E. Pour tout $\gamma \in \widehat{G}$, on a*

$$M_\gamma \subset C^\infty_\gamma\left(E_{\mathbf{C}} \oplus (T^{1,1})^+\right) .$$

Démonstration. — Rappelons d'abord que Δ_L est l'opérateur de Casimir du G-module $C^\infty(S^2T^*_{\mathbf{C}})$. Ainsi, lorsqu'il est différent de zéro, $C^\infty_\gamma(S^2T^*_{\mathbf{C}})$ est un sous-espace propre de Δ_L, dont on note c_γ la valeur propre associée. On voit ensuite, à l'aide des poids dominants, qu'on a toujours $c_\gamma \geqslant 16$, lorsque $\gamma \neq 0$. Maintenant si $h \in M_\gamma$, avec $C^\infty_\gamma(S^2T^*_{\mathbf{C}}) \neq 0$, on a, d'après le corollaire

$$(c_\gamma - 16h) \in C^\infty\left(E_{\mathbf{C}} \oplus (T^{1,1})^+\right) .$$

Si $c_\gamma \neq 16$, on a le résultat cherché. Si $c_\gamma = 16$, on voit directement que

$$C^\infty_\gamma(S^2T^*_{\mathbf{C}}) \subset C^\infty_\gamma(\{\omega\})_{\mathbf{C}}) \oplus C^\infty_\gamma\left(E_{\mathbf{C}} \oplus (T^{1,1})^+\right) ;$$

en d'autres termes, ne se rajoutent que des multiples de la métrique (ou de la forme de Kähler). D'après la proposition 3, on sait que Trace $h = 0$, lorsque h est dans M_γ, donc M_γ est orthogonal à $C^\infty_\gamma(\{\omega\}_{\mathbf{C}})$, et l'inclusion du lemme est encore vraie dans cette dernière situation.

Le calcul final consiste à vérifier que Q agissant sur $C^\infty_\gamma\left(E_{\mathbf{C}} \oplus (T^{1,1})^+\right)$ est injectif. Il peut maintenant être mené à bien directement : d'une part les formules de géométrie kählérienne locale de la quadrique sont simples et d'autre part les multiplicités des représentations qui interviennent effectivement après cette "réduction" du problème ne dépassent pas 3.

7. Formulaire kählérien local pour la quadrique.

Il nous a semblé intéressant, compte tenu de leur simplicité, de donner quelques formules en coordonnées locales.

Soit $p : \mathbb{C}^{n+2} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ la projection canonique. Nous considérons l'ouvert V de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, image par p de

$$\{(\zeta_0, \ldots, \zeta_{n+2}) \in \mathbb{C}^{n+2} \mid \zeta_0 \neq 0\} \ .$$

les fonctions ζ_j/ζ_0 descendent sur V et nous donnent des coordonnées locales holomorphes $z_1, \ldots, z_{n+1}$. L'intersection $Q_n \cap V$ est égale à l'hypersurface d'équation

$$z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = -1 \ .$$

Nous allons travailler sur l'ouvert W de V déterminé par la condition $\operatorname{Im} z_{n+1} \neq 0$ et sur l'ouvert correspondant $U = Q_n \cap W$ de la quadrique.

Tout d'abord le champ de vecteurs

$$\nu = \sum_{\ell=1}^{n+1} (z_\ell - \bar{z}_\ell)\Big(\frac{\partial}{\partial z_\ell} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell}\Big)$$

est une normale unitaire à la quadrique sur U, et les champs holomorphes

$$\xi_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{z_j}{z_{n+1}} \frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \ , \quad j = 1, \ldots, n \ ,$$

sont tangents à la quadrique et forment un repère des champs de type $(1,0)$ sur U. On pose alors

$$\zeta = \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j - \bar{z}_j}{1 + |z|^2} \xi_j \ ,$$

où $|z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2$, et

$$\eta_j = \xi_j + z_j \zeta \ , \quad j = 1, \ldots, n \ .$$

Les η_j nous donnent à nouveau un repère des champs de type $(1,0)$ sur U.

Les formes

$$\omega_j = d\bar{z}_j - \frac{z_j - \bar{z}_j}{z_{n+1} - \bar{z}_{n+1}} dz_{n+1} \ , \quad j = 1, \ldots, n$$

constituent un corepère des formes de type $(1,0)$ sur U, qui est en fait le corepère dual du repère $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$. Ce corepère est d'une grand utilité pour expliciter localement un certain nombre d'objets sur la quadrique.

Par exemple, prenons une fonction $f : \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ et donnons l'expression de $\partial\bar{\partial}\tilde{f}$, avec $\tilde{f} = f|_U$. On a

$$\partial\bar{\partial}\tilde{f} = \sum_{j,k=1}^{n} f_{j\bar{k}} \omega_j \wedge \overline{\omega}_k \ ,$$

avec

$$f_{j\bar{k}} = \eta_j \cdot \bar{\eta}_k \cdot \tilde{f} + \frac{\bar{z}_k}{1 + |z|^2} \bar{\eta}_j \cdot \tilde{f}$$

ou encore

$$f_{j\bar{k}} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + \bar{z}_k \nu'' \cdot \frac{\partial f}{\partial z_j} + z_j \nu' \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} + z_j \bar{z}_k \nu' \cdot \nu'' \cdot f \ ,$$

si on pose

$$\nu = \nu' + \nu'' \ ,$$

avec

$$\nu' = \bar{\nu}'' = \sum_{\ell=1}^{n+1} z_\ell \Big(\frac{\partial}{\partial z_\ell} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell} \Big) \ .$$

Notons g la métrique canonique de Q_n et ∇ sa connexion de Levi-Civita. On a

$$g(\eta_j, \bar{\eta}_k) = \frac{1}{2} \Big(\frac{\delta_{jk}}{1 + |z|^2} - \frac{z_j \bar{z}_k + z_k \bar{z}_j}{(1 + |z|^2)^2} \Big) \ ,$$

$$\nabla_{\eta_j} \eta_k = - \frac{\bar{z}_k}{1 + |z|^2} \eta_j - \frac{z_j + \bar{z}_j}{1 + |z|^2} \eta_k \ ,$$

$$\nabla_{\eta_j} \bar{\eta}_k = \overline{\nabla_{\bar{\eta}_j} \eta_k} = - \frac{\bar{z}_k}{1 + |z|^2} \bar{\eta}_j \ .$$

Ces formules permettent de voir que K_ν est l'involution (réelle) déterminée par

$$K_\nu \eta_j = \bar{\eta}_j \ , \quad 1 = 1, \dots, n \ .$$

(observer que K_ν n'est pas la conjugaison standard!). Il s'ensuit que les champs

$$v_j = \operatorname{Re} \eta_j \ , \quad j = 1, \dots, n$$

constituent un repère du fibré T_ν^+ sur U.

Références

[1] BERGER M., EBIN D. — *Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold*, J. Differential Geom., **3** (1969), 379–392.

[2] BERGER M., GAUDUCHON P., MAZET E. — *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Notes in Math., **194**.

[3] DIENG Y. — *Quelques résultats de rigidité infinitésimale pour les quadriques complexes*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **304** (1987), 393–396.

[4] GASQUI J. — *Sur la résolubilité locale des équations d'Einstein*, Compositio Math., **47** (1982), 43–69.

[5] GASQUI J., GOLDSCHMIDT H. — *Deformations infinitésimales des espaces riemenniens localement symétriques*, Adv. in Math., **48** (1983), 205–285.

[6] GASQUI J., GOLDSCHMIDT H. — *Rigidité infinitésimale des espaces projectifs et des quadriques complexes*, J. reine angew. Math., **396** (1989), 87–121.

[7] GASQUI J., GOLDSCHMIDT H. — *On the geometry of the complex quadric*, Hokkaido Math. J., **20** (1991), 279–312.

[8] GASQUI J., GOLDSCHMIDT H. — *The infinitesimal rigidity of the complex quadric of dimension four*, (à paraître).

[9] MICHEL R. — *Problèmes d'analyse géométrique liés à la conjecture de Blaschke*, Bull. Soc. Math. France , **101** (1973), 17–69.

[10] SMYTH B. — *Differential geometry of complex hypersurfaces*, Ann. of Math., **85** (1967), 246–270.

[11] STRICHARTZ R. — *The explicit Fourier decomposition of* $L^2\big(SO(n)/SO(n-m)\big)$, Canad. J. Math., **27** (1975), 294–310.

Jacques GASQUI
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)