

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

**Comment distribuer des points uniformément sur une sphère
? (D'après Lubotzky, Phillips et Sarnak)**

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 9-18

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__9_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMMENT DISTRIBUER DES POINTS UNIFORMÉMENT SUR UNE SPHÈRE?

(D'après Lubotzky, Phillips et Sarnak)

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

Il y a plusieurs mesures possibles de l'uniformité de la la distribution d'un ensemble fini de points sur une variété riemannienne compacte homogène X . Lorsqu'on s'intéresse à l'intégration numérique des fonctions sur X , un invariant possible est défini ainsi :

si $S = \langle a_1, b_1 = a_1^{-1}, \dots, a_l, b_l = a_l^{-1} \rangle$ est une partie finie symétrique de $\text{Isom}(X)$, on mesure l'uniformité de la distribution des orbites $S.x_0$ ($x_0 \in X$) à l'aide de l'opérateur T_S défini sur $L^2(X)$ par :

$$(T_S f)(x) = \sum_{\gamma \in S} f(\gamma x).$$

L'opérateur T_S est symétrique, de norme $2l$ et $T_S(1) = 2l.1$, on en déduit que T_S laisse invariant l'espace $L_0^2(X) \subset L^2(X)$, formé des fonctions de moyenne nulle. On pose

$$\delta_S = \|T_S|_{L_0^2(X)}\|.$$

On a aussi

$$\delta_S = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } T_S|_{L_0^2}\},$$

en effet, T_S commute avec le laplacien et admet donc une base orthonormée de fonctions propres communes avec lui. La bonne répartition moyenne des orbites est mesurée par la petitesse de δ_S par rapport à $2l$.

Remarque. — Soit $m > \dim(X)/2$ et C (ne dépendant que de X) telle que :

$$\|f\|_{L^\infty(X)} \leq C \|f\|_{H^m(X)},$$

on a :

$$\forall f \in H_m(X), \forall x_0 \in X, \left| \int_X f - \frac{1}{2l} \sum_{\gamma \in S} f(\gamma x_0) \right| \leq C \frac{\delta_S}{2l} \|f\|_{H^m(X)}.$$

On introduit un autre invariant de la façon suivante : soit G_S le sous-groupe de $\text{Isom}(X)$ engendré par S , soit :

$$S^{(s)} = \{ \gamma \in G_S \mid \gamma \text{ est un mot de longueur } \leq s \text{ en } S \},$$

on s'intéresse à la croissance par rapport à s de $\delta_{S^{(s)}}$.

Il n'est pas clair qu'on puisse trouver des S tels que $\delta_S < 2l$, et en fait dans le cas des tores plats, c'est impossible.

1. Cas des tores

Soit $X = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ muni d'une métrique plate et S un sous-ensemble fini, symétrique de X , opérant par translation sur lui-même :

$$S = \{ \pm a_i \mid 1 \leq i \leq l \}.$$

Les valeurs propres de $T_S|_{L^2_0(X)}$ sont les nombres

$$\lambda_\nu = 2 \sum_{i=1}^l \cos(2\pi \langle \nu | a_i \rangle),$$

où $\nu \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, la fonction propre e_ν étant l'exponentielle $e^{2\pi i \langle \nu | x \rangle}$. Alors ε étant donné, il existe $\nu \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, tel que $\forall i, d(\langle \nu | a_i \rangle, \mathbf{Z}) \leq \varepsilon$ (théorème de récurrence).

On en déduit qu'il existe des ν non nuls, tels que λ_ν soit arbitrairement proche de $2l$, et donc $\delta_S = 2l$.

2. Résultats de Lubotzky, Phillips et Sarnak

Dans les articles [LPS 1] et [LPS 2], les auteurs montrent que le cas de S^2 est très différent de celui des tores; ils prouvent en particulier les trois théorèmes suivants :

THÉORÈME A . — $\forall S \subset SO(3)$ avec $\#S = 2l$, on a

$$\delta_S \geq 2\sqrt{2l-1}.$$

THÉORÈME B . — $\forall p$ premier, $p \equiv 1 \pmod{4}$, il existe un sous-ensemble S_p à $p + 1$ éléments de $SO(3)$ tel que :

$$\delta_{S_p} = 2\sqrt{p} .$$

THÉORÈME C . — Si on pose $\#S_p^{(s)} = N_{p,s}$, on a :

$$\delta_{S_p^{(s)}} \leq C.\text{Log} (N_{p,s})\sqrt{N_{p,s}} .$$

Le théorème A est comparativement facile et dépend de résultats de Kesten ([K]) sur le support de la mesure spectrale associée à un groupe de type fini. Le théorème B dépend des conjectures de Weil, démontrées par Deligne, via une majoration asymptotique des coefficients de Fourier de formes modulaires convenables. Le théorème C est une conséquence assez simple du théorème B.

Dans cet exposé, nous nous contentons de décrire les résultats de Kesten, la preuve du théorème A et la construction des ensembles S_p .

3. Mesure spectrale d'un graphe homogène

Soit Γ un graphe homogène sous l'action d'un groupe G . On suppose Γ de degré (valence) $q + 1$ et muni de la mesure qui donne la masse 1 à chaque sommet. Sur $L^2(G)$, on définit un opérateur T par la formule :

$$(Tf)(x) = \sum_{x' \sim x} f(x') .$$

T est relié au laplacien combinatoire standard par $T = (q + 1)\text{Id} - \Delta$.

L'exemple fondamental est le *graphe de Cayley*, Γ_G d'un groupe G associé à un système S *symétrique* de $2l = q + 1$ générateurs : les sommets de Γ_G sont les points de G , il y a une arête entre g et g' chaque fois qu'il existe $\gamma \in S$ tel que $\gamma g = g'$. Γ est homogène sous l'action de G par translation à droite sur lui-même. Si G est libre, Γ est un arbre homogène.

On a une notion de *mesure spectrale* associée au graphe homogène Γ , qui est un cas particulier de la notion chère aux physiciens de *densité d'états* (voir à ce sujet, par exemple [CV 1]).

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue; par le calcul fonctionnel, est associé à f un opérateur $f(T)$ sur $L^2(\Gamma)$, qui admet une matrice $[f(T)]_{x,x'}$. A cause de l'homogénéité de Γ , on a évidemment :

$$\forall x, x' \quad [f(T)]_{x,x} = [f(T)]_{x',x'} .$$

On considère alors, pour $x_0 \in \Gamma$ fixé, la forme linéaire sur $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ définie par :

$$L(f) = [f(T)]_{x_0,x_0} .$$

L est une forme linéaire positive ($f \geq 0 \Rightarrow f(T) \geq 0 \Rightarrow [f(T)]_{x_0, x_0} \geq 0$); $L(1) = 1$ et donc L définit une mesure de probabilité μ sur \mathbf{R} , c'est la mesure spectrale de Γ .

Dégageons quelques propriétés de μ :

i) Si Γ a $N < \infty$ sommets, on a : $\mu = 1/N \sum_{i=1}^N \delta(\lambda_i)$, où $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ sont les valeurs propres de T ; en effet, on a :

$$\text{Tr} f(T) = \sum_{x \in \Gamma} [f(T)]_{x, x} = N \int f d\mu .$$

ii) Support (μ) = spectre (T) .

En effet :

a) si $]a, b[\cap \text{Spectre}(T) = \emptyset$ et $f \in C_0(]a, b[), \mathbf{R})$, on a $f(T) = 0$ et donc $]a, b[\cap \text{Supp}(\mu) = \emptyset$.

b) Réciproquement, si $]a, b[\cap \text{Supp}(\mu) = \emptyset$, on a, pour toute f à support dans $]a, b[$,

$$[f^2(T)]_{x, x} = 0$$

et comme

$$[f^2(T)]_{x, x} = \sum_{x' \in \Gamma} ([f(T)]_{x, x'})^2 ,$$

$f(T) = 0$. En particulier $\text{Supp} \mu \subset [-2l, 2l]$.

iii) $\int t^s d\mu = m_s$ est le nombre de lacets d'origine x et de longueur s , où la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes parcourues. En particulier, on a : $m_s(\Gamma) \geq m_s(A_q)$, où A_q est l'arbre homogène de degré $q + 1$.

iv) $\|T\| = \limsup(m_s)^{1/s}$. En effet, soit $F(\lambda) = \int (\lambda - t)^{-1} d\mu(t)$, c'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \text{Spectre}(T)$, la relation précédente découle du calcul du rayon de convergence de la série de Laurent de F .

v) Calcul de μ à partir de la résolvante; on a :

$$\mu = \frac{1}{2i\pi} [(t + i0 - T)^{-1} - (t - i0 - T)^{-1}]_{x, x} .$$

vi) Soit G_n une suite décroissante de sous-groupes de G , d'indices finis et dont l'intersection est $\{e\}$, on a :

$$\mu_G = \lim \mu_{G_n \setminus G}$$

La preuve consiste à regarder la limite des $m_s(G_n)$.

Venons-en au théorème de Kesten, concernant le cas du graphe de Cayley d'un groupe G de générateurs S :

THÉORÈME (KESTEN 1959) . — Soit (G, S) , avec $\#S = 2l$ et $d_{G,S}$ la norme de l'opérateur T associé, on a :

$$2\sqrt{2l-1} \leq d_{G,S} \leq 2l$$

avec :

$$\begin{aligned} d_{G,S} = 2\sqrt{2l-1} &\iff (G, S) \text{ libre} \\ d_{G,S} = 2l &\iff G \text{ moyennable .} \end{aligned}$$

Preuve. — La majoration de $d_{G,S}$ est évidente par définition de T_S qui est somme de $2l$ opérateurs de norme 1; la minoration résulte de iii) et iv) : en effet ces relations prouvent que $\|T\|$ est minimale à l fixé, lorsque Γ est un arbre. Il reste à prouver que $d = 2\sqrt{2l-1}$ lorsque (G, S) est libre, ce qui sera fait au §4.

La caractérisation des groupes libres comme un minimum absolu de $d_{G,S}$ est faite dans [K]; elle est délicate, mais cette caractérisation n'est pas utile pour ce qui suit.

L'autre extrême, le cas moyennable, est plus accessible. Rappelons qu'un groupe est *moyennable* s'il existe une moyenne invariante définie sur toute fonction bornée de G dans \mathbf{R} , positive sur les fonctions positives, telle que la fonction 1 soit de moyenne 1.

La propriété de moyennabilité admet une interprétation géométrique, c'est la condition de Følner :

(F) G est dit de Følner si $\forall \varepsilon > 0$, il existe une partie finie $A \subset G$ telle que $\#bA \leq \varepsilon \#A$, où $\#bA$ est le nombre d'arêtes joignant A au complémentaire de A dans le graphe de Cayley de G . Cette propriété est indépendante du système de générateurs, c'est une propriété isopérimétrique.

On a alors le :

THÉORÈME . — G , de type fini, est moyennable si et seulement si G est de Følner.

La preuve se trouve dans [GL].

Il est alors facile de relier la condition (F) et la condition spectrale $d_{G,S} = 2l$, en effet cette condition se traduit sur le laplacien par $\inf(\text{Spectre } \Delta) = 0$: l'équivalence résulte alors du minimax appliqué à la fonction caractéristique de A dans un sens et de l'inégalité de Cheeger dans l'autre ([DK]).

4. Cas des arbres

Ici Γ est un arbre homogène de degré $2l = q + 1$.

4a. *Spectre et résolvante.* — La matrice de la résolvante s'obtient par résolution de :

$$(\lambda - T)f = \delta(x_0), \quad f \in L^2(\Gamma).$$

Par symétrie, $f(x)$ est une fonction u_n de la distance n de x à x_0 . Cette suite doit satisfaire

$$\lambda u_0 - (q + 1)u_1 = 1 \quad (1)$$

$$\lambda u_n - (u_{n-1} + qu_{n+1}) = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 (q + 1) q^{n-1} < +\infty \quad (3)$$

On est amené à chercher u_n sous la forme $u_n = C\alpha^n$, où α est solution de

$$q\alpha^2 - \lambda\alpha + 1 = 0 \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{1}{\lambda - (q + 1)\alpha}.$$

L'équation caractéristique n'a de solution vérifiant (3) que si $\lambda \notin I_q = [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$.

Dans ce cas, on obtient pour $\lambda \notin \text{Spectre}(T)$:

$$[(\lambda - T)^{-1}]_{x,x} = \frac{2q}{(q - 1)\lambda - (q + 1)F(\lambda)},$$

où $F(\lambda)$ est la détermination de $\sqrt{\lambda^2 - 4q}$ dans $\mathbf{C} - I_q$ équivalente à λ lorsque λ est grand. Les propriétés 3.iii et 3.v montrent alors que : $\text{spectre}(T) = I_q$ et donc $d_\Gamma = \sqrt{2q}$. On a aussi par le calcul de μ dans 4.v :

$$d\mu = \frac{(q + 1)\sqrt{4q - t^2}}{2\pi((q + 1)^2 - t^2)} dt.$$

On vérifie en particulier que $\int d\mu = 1$.

4b. *Calcul fonctionnel.* — On définit des opérateurs T_n par $(T_n f)(x) = \sum_{d(x,x')=n} f(x')$. Il est clair que les T_n sont donnés par des polynômes $T_n = P_n(T_1)$.

Par exemple :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = t, \quad P_2 = t^2 - (q + 1), \dots$$

On a le résultat suivant :

$$a_{n,m} = \int P_n(t)P_m(t)d\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (q - 1)q^{n-1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Preuve. — D'après la définition de μ , on a : $a_{n,m} = [P_n P_m(T)]_{x,x}$; comme $P_n P_m(T) = P_n(T) \circ P_m(T)$, on a :

$$a_{n,m} = \sum_{d(x,x')=n} \sum_{d(x',x)=m} 1.$$

Les polynômes $P'_n = ((q - 1)q^{n-1})^{-1/2} P_n$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}, \mu)$.

Calcul des P_n : ce calcul est fait par les auteurs, on trouve :

$$P_n = Q_n - Q_{n-2} \text{ où } Q_n(2\sqrt{q} \cos \theta) = q^{n/2} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} .$$

5. Preuve du théorème A

Comme T_S commute avec le laplacien, il préserve les espaces propres du laplacien canonique de S^2 , les espaces H_n d'harmoniques sphériques. Rappelons (cf [BGM]) que H_n est l'espace vectoriel des restrictions à S^2 des polynômes homogènes de degré n , harmoniques dans \mathbf{R}^3 et qu'on a $\dim(H_n) = 2n + 1$. et

$$H_n = \text{Ker}(\Delta - n(n+1)) .$$

Définissons des mesures μ_n sur \mathbf{R} à support dans $[-2l, 2l]$ par

$$\mu_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_{n,j} ,$$

où $\lambda_{n,1} \leq \dots \leq \lambda_{n,2n+1}$ sont les valeurs propres de $T_S|_{H_n}$.

Le théorème A est alors une conséquence immédiate du :

THÉORÈME . — *Lorsque $n \rightarrow \infty$, les mesures μ_n convergent vaguement vers une mesure μ qui est la mesure spectrale du groupe G_S relativement aux générateurs de S .*

(Le théorème A s'en déduit immédiatement puisque visiblement tout point du support de μ est un point du spectre essentiel de T_S , car point d'accumulation de valeurs propres de T_S).

Preuve. — Le théorème précédent est conséquence d'une mini-formule de traces qui s'écrit ainsi :

$$(*) \quad \text{Tr}(T_S^s|_{H_n}) = \sum_{\gamma}^{(s)} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta_{\gamma}}{\sin \frac{\theta_{\gamma}}{2}} ,$$

où $\sum^{(s)}$ est la somme sur les mots de longueur s par rapport à S et si γ est un tel mot considéré comme une rotation, $\theta_{\gamma} \in [0, \pi]$ est l'angle de cette rotation.

La formule (*) est élémentaire, on a :

$$(T_S^s f)(z) = \sum_{\gamma}^{(s)} f(\gamma z)$$

et donc si T_γ est défini par :

$$T_\gamma f(z) = f(\gamma z) ,$$

on a $T_S^s = \sum_\gamma^{(s)} T_\gamma$, et :

$$\text{Tr} T_{S|H_n}^s = \sum_\gamma^{(s)} \text{Tr}(T_{\gamma|H_n}) ,$$

puis la trace de $T_{\gamma|H_n}$ (valeur du caractère χ_n de la représentation naturelle de $SO(3)$ dans H_n sur γ) se calcule en diagonalisant T_γ par rapport à la base usuelle des harmoniques sphériques relative à l'axe de la rotation γ (les $Y_{l,n}$).

$$\text{Tr} T_{\gamma|H_n} = \chi_n(\gamma) = \sum_{|l| \leq n} e^{il\theta_\gamma} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta_\gamma}{\sin \frac{\theta_\gamma}{2}} .$$

Cela conclut la preuve de (\star). Il serait intéressant d'étendre cette formule à un contexte plus général (espaces symétriques compacts, espaces homogènes).

Considérons maintenant les μ_n , on a :

$$\int t^s d\mu_n = \frac{1}{2n+1} \text{Tr}(T_{S|H_n}^s) ,$$

et donc, en appliquant (\star) :

$$\int t^s \mu_n \rightarrow \#\{\gamma | \theta_\gamma = 0\} = m_s ,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. On en déduit le résultat cherché. Il est remarquable que μ ne dépend pas la représentation de G_S dans $SO(3)$, mais seulement du groupe abstrait G_S et de son système de générateurs S .

6. Construction des S_p

Soit \mathbf{H} le corps des quaternions. Un élément q de \mathbf{H} est $q = x + yi + zj + tk$ de norme $N(q) = q\bar{q} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, et on peut associer à tout quaternion non nul une rotation \hat{q} de $\mathbf{H}_1 = \{q | x = 0\}$ par

$$\hat{q}.z = \frac{1}{N(q)} qz\bar{q} .$$

On désigne par $\mathbf{H}(\mathbf{Z})$ l'ensemble des quaternions à coordonnées entières.

Pour tout p premier, il existe $8(p+1)$ quaternions entiers de norme p ([HW]). Lorsque $p \equiv 1 \pmod{4}$, il existe $p+1$ de ces quaternions tels que $x > 0$, y, z, t pairs.

$$p = 5 \quad 1 \pm 2i, 1 \pm 2j, 1 \pm 2k$$

$$p = 13 \quad 1 \pm i \pm j \pm k, 3 \pm 2i, 3 \pm 2j, 3 \pm 2k$$

$$p = 17 \quad 1 \pm 4i, 1 \pm 4j, 1 \pm 4k, 3 \pm 2i \pm 2j, 3 \pm 2j \pm 2k, 3 \pm 2i \pm k$$

S_p est l'ensemble des $p + 1$ rotations associées à ces quaternions.

7. Problèmes

Dans [LPS3] et [LPS4], les mêmes auteurs appliquent des méthodes du même type pour construire des graphes explicites de degré $q + 1$ ayant un λ_1 le plus grand possible relativement au nombre de sommets.

Je mentionne ici en conclusion quelques problèmes de nature variée :

i) *Analyse numérique* : comment calculer efficacement les valeurs propres et vecteurs propres des T_p ?

ii) *Analyse harmonique* : il est facile de voir que les T_p ($p \equiv 1 \pmod{4}$) commutent entre eux. On met ainsi en évidence une base orthonormée spéciale des harmoniques sphériques : les $W_{n,j}$ ($n = 0, 1, \dots ; 1 \leq j \leq 2n + 1$). Quelles sont leurs propriétés ?

a) Du point de vue du développement d'une fonction arbitraire en série de Fourier ?

b) A-t-on $\|W_{n,j}\|_{L^\infty} \leq \text{constante}$?

c) A-t-on des propriétés d'ergodicité analogue à celles de [CV2], c'est à dire, si $\mu_{j,n} = |W_{n,j}|^2 \sigma_0$, est-ce que les $\mu_{j,n}$ convergent vers σ_0 lorsque $n \rightarrow \infty$?

Il est en effet vraisemblable que pour beaucoup de problèmes la base $(W_{n,j})$, ne privilégiant plus une des directions des axes de \mathbf{R}^3 , a de meilleures propriétés que la base usuelle des $(Y_{l,n})$.

8. Bibliographie

- [BGM] BERGER, GAUDUCHON, MAZET . — *Le spectre d'une variété riemannienne compacte*, LNM 194, Springer, 1974.
- [C] CARTIER. — *Harmonic analysis on trees*, Proc. Symp. Pure Math., **26** (1973), 419-424.
- [CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Minoration des sommes de valeurs propres d'un domaine et conjecture de Polya*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Chambéry- Grenoble, **3** (1984-1985), VII-VIII.
- [CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Comm. Math. Phys., **102** (1985), 497-502.

- [D] DELIGNE. — *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES, **43** (1974), 273-307.
- [DK] DODZIUK. — *Difference equations, isoperimetric inequalities and transience of certain random walks*, Trans. AMS, **284** (1984), 787-794.
- [GF] GREENLEAF. — *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand, 1969.
- [GV] GROMOV . — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par Lafontaine et Pansu, Cedic-Nathan, 1980.
- [HW] HARDY, WRIGHT. — *An introduction to number theory*, Oxford U.P., 1962.
- [K] KESTEN. — *Symmetric random walks on groups*, Trans. AMS, **92** (1959), 336-354.
- [LPS1] LUBOTZKY, PHILLIPS, SARNAK. — *Hecke operators and distributing points on the sphere I*, preprint, (1986), 0-65.
- [LPS2] LUBOTZKY, PHILLIPS, SARNAK. — *Hecke operators and distributing points on the sphere II*, preprint, (1986), 0-35.
- [LPS3] LUBOTZKY, PHILLIPS, SARNAK. — *Explicit expanders and the Ramanujan conjectures*, preprint, (1986), 0-7.
- [LPS4] LUBOTZKY, PHILLIPS, SARNAK. — *Ramanujan graphs*, preprint, (1986), 0-33.