

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

LAURENT GUILLOPÉ

**Séances de problèmes**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 5 (1986-1987), p. 175-177

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1986-1987\\_\\_5\\_\\_175\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__175_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Séances de Problèmes

*Laurent GUILLOPÉ*

Soit  $T_q$  un arbre homogène de valence  $q$ ,  $L^2(T_q)$  l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à la mesure de comptage sur  $T_q$ . Le laplacien combinatoire  $\Delta_{T_q}$  opérant dans  $L^2(T_q)$  ( $(\Delta_{T_q} u)_S = \sum_{V \in \mathcal{V}(S)} u_V$ , où  $\mathcal{V}(S)$  est l'ensemble des sommets voisins de  $S$ ) a pour spectre  $\sigma_q = [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$ , spectre absolument continu de multiplicité infinie.

Soit  $G$  un graphe fini,  $\Delta_G$  le laplacien combinatoire sur  $G$ . On suppose l'existence d'un élément  $(\lambda, \varphi)$  propre de  $\Delta_G$  avec  $\varphi$  nulle en un sommet  $S_0$  de  $G$ . Soit  $G \#_{S_0} T_q$  le graphe obtenu en attachant le graphe  $G$  à l'arbre  $T_q$ , via l'identification de  $S_0$  et d'un sommet de  $T_q$ . La valeur propre  $\lambda$  est encore valeur propre de  $G \#_{S_0} T_q$ , avec fonction propre la fonction de support  $G \setminus S_0$  et coïncidant avec  $\varphi$  sur ce support.

La perturbation  $T_q \#_{S_0} G$  de  $T_q$  a même spectre (absolument) continu que  $T_q$  et, dans certains cas, la valeur propre  $\lambda$  est immergée dans le spectre continu  $\sigma_q$ .

Peut-on construire d'autres exemples de graphes avec valeurs propres immergées dans le spectre continu? Y-a-t-il une série perturbative pour la valeur propre  $\lambda$  (éventuellement considérée comme une résonance) pour une petite perturbation du laplacien  $\Delta_{G \#_{S_0} T_q}$ ?

*Colette ANNÉ*

Y-a-t-il un principe de Dirichlet pour les formes différentielles? C'est-à-dire si  $\omega$  est une forme harmonique sur une variété à bord, nulle sur le bord (sa partie tangente et sa partie normale) est-elle nécessairement identiquement nulle sur la variété?

**n.b.** : la réponse est oui, la démonstration est en cours de rédaction.

**Problème 1**

Sur une variété riemannienne fermée  $X$ , soit  $\lambda$  une valeur propre du Laplacien et  $E$  l'espace propre correspondant. Soit  $(u_i)$  une base orthonormée de  $E$ .

Existe-t-il un principe de prolongement analytique pour les fonctions de l'espace vectoriel engendré par

$$\{uv | u \in E, v \in E\} ?$$

Précisément, est-ce que

$$\sum_{i \leq j} \alpha_{ij} u_i(x) u_j(x) \equiv 0 \text{ pour } x \in U \text{ ouvert de } X$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i \leq j} \alpha_{ij} u_i(x) u_j(x) \equiv 0 \text{ pour } x \in X$$

( $\alpha_{ij} \in \mathbf{R}$  non tous nuls).

C'est vrai si  $\dim E \leq 2$  (exercice) ou si la métrique est analytique réelle car les fonctions propres le sont.

**Problème 2**

Sur une surface fermée orientable  $X$  de genre  $\gamma \geq 2$  on note  $m_i(g)$  la multiplicité de la  $i^{\text{ième}}$  valeur propre non nulle du Laplacien associé à la métrique  $g$ . Que vaut

$$M(\gamma) = \sup\{m_1(g) | g \text{ à courbure constante} = -1\} ?$$

On sait que  $E \left( \frac{1+\sqrt{8\gamma+1}}{2} \right) \leq M(\gamma) \leq 4\gamma + 3$ .

**Problème 3**

Avec les mêmes notations, si  $g$  est une métrique *fixée* à courbure constante *fixée*, est-ce que

$$\sup_i (m_i(g)) < +\infty ?$$

(La réponse est non si  $\gamma = 0$  ou 1).

*Yves COLIN DE VERDIÈRE*

**Triangulations des surfaces :** existe-t-il des triangulations totalement géodésiques d'une surface riemannienne  $(X, g)$ , compacte, telle que tous les triangles aient des angles  $< \pi/2$ ? Ce problème apparaît lorsque l'on souhaite que les matrices servant à calculer les valeurs propres du Laplacien par la méthode des éléments finis, associée à la triangulation, soient des opérateurs de la classe  $\mathcal{O}_\Gamma$ , où  $\Gamma$  est le 1-squelette de la triangulation et la classe  $\mathcal{O}_\Gamma$  est l'ensemble des matrices symétriques  $(a_{ij} \text{ } (i, j \text{ sommets de } \Gamma))$  telles que :  $a_{ij} < 0$  si  $i \sim j$ ,  $a_{ij} = 0$  si  $i \sim j$  et  $i \neq j$ . J'ai introduit cette classe d'opérateurs dans l'étude de la multiplicité des valeurs propres (TSG 86-87, Exposé de Gérard Besson).

[Note (nov. 87) : la réponse est oui ; je l'ai démontré avec A. Marin (prépublication I.F., n°88, soumis à J. of Diff. Geometry)].