THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

ÉLOI LEFEBVRE

Propriétés d'une famille de fonctions à une infinité de branches

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1939

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1939__220__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Série A, 1868
N° D'ORDRE :
2735

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Éloi LEFEBVRE

1re **THÈSE.** — PROPRIÉTÉS D'UNE FAMILLE DE FONCTIONS A UNE INFINITÉ DE BRANCHES.

2e **THÈSE.** — LES CONGRUENCES RECTILIGNES.

Soutenues le Mars 1939, devant la Commission d'Examen.

MM. P. MONTEL *Président.*
R. GARNIER } *Examinateurs.*
G. VALIRON }

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1939

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires { H. LEBESGUE. Émile PICARD. Léon BRILLOUIN. GUILLET. PÉCHARD. | FREUNDLER. AUGER. BLAISE. DANGEARD. LESPIEAU. MARCHIS. | VESSIOT. P. PORTIER. M. MOLLIARD. L. LAPICQUE. G. BERTRAND. H. ABRAHAM. | Charles FABRY. Léon BERTRAND. WINTREBERT. O. DUBOSCQ. BOHN. RABAUD.

PROFESSEURS

M. CAULLERY..... T Zoologie (Evolution des êtres organisés).
Émile BOREL..... T Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN..... T Chimie physique.
E. CARTAN..... T Géométrie supérieure.
A. COTTON..... T Recherches physiques.
J. DRACH..... T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ... T Zoologie.
M. GUICHARD..... T Analyse et mesures chimiques.
Paul MONTEL.. .. T Théorie des fonctions et théorie des transformations.
L. BLARINGHEM... T Botanique.
G. JULIA ..... T Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN..... T Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY.. T Pétrographie.
H. BÉNARD..... T Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY ..... T Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD... ... T Géographie physique et Géologie dynamique.
Eugène BLOCH ... T Physique.
G. BRUHAT..... T Physique théorique et Physique Céleste.
E. DARMOIS..... T Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE ..... T Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR..... T Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER..... Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND. T Botanique.
M. JAVILLIER... . T Chimie biologique.
ROBERT-LÉVY..... T Physiologie comparée.
F. PICARD..... . Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT .... T Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB..... T Géologie.
P. PASCAL..... T Chimie générale.
M. FRÉCHET... .. T Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON ... T Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS. T Chimie organique.
H. BÉGHIN ..... T Mécanique physique et expérimentale.
FOCH ..... Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER..... Physique (P. C. B.).
De BROGLIE..... T Théories physiques.
CHRÉTIEN ..... Optique appliquée.
P. JOB ..... Chimie générale.
LABROUSTE..... Physique du Globe.
PRENANT... ..... T Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY..... Mécanique physique et expérimentale.
COMBES .. .. T Physiologie végétale.
GARNIER..... T Mathématiques générales.
PÉRÈS ..... Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL ..... Chimie minérale.
LAUGIER ..... Physiologie générale.
TOUSSAINT..... T Technique Aéronautique.
M. CURIE..... Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD..... Hautes températures.
CHAZY..... T Mécanique rationnelle.
GAULT ..... T Chimie (P. C. B.).
CROZE .... Recherches physiques.
DUPONT ..... T Théories chimiques.
LANQUINE ..... T Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON ..... . Mathématiques générales.
BARRABÉ..... Géologie structurale et Géologie appliquée.
MILLOT..... Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN..... Théories physiques.
VAVON ..... Chimie organique.
G. DARMOIS..... Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.
CHATTON..... Biologie maritime.
AUBEL ..... T Chimie biologique.
Jacques BOURCART Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE. Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL..... Biologie végétale (P.C.B.).
CABANNES..... Enseignement de Physique.
GRASSÉ ..... Biologie animale (P.C.B.).
PRÉVOST..... Chimie (P.C.B.).
BOULIGAND..... Mathématiques.

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.

INSTITUT H. POINCARÉ
1, Rue Pierre-Curie
PARIS-5e

A LA MÉMOIRE

DES SAVANTS MORTS POUR LA FRANCE

PENDANT LA GUERRE DE 1914-1918

QUI N'ONT PU ACCOMPLIR LEUR ŒUVRE

M. R. Garnier, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, a bien voulu suivre et examiner les résultats de mes efforts en m'aidant de ses conseils, avec un dévouement et une patience inlassables. Je suis heureux de lui en exprimer ici ma profonde reconnaissance.

Je veux aussi exprimer ma gratitude à mes Maîtres de la Faculté des Sciences et du Collège de France qui ont formé ma pensée scientifique : M. E. Picard, M. P. Montel, dont j'ai été longtemps l'élève et qui a bien voulu présenter à l'Académie des Sciences les principaux résultats de ce travail, M. H. Lebesgue qui, dans des conférences d'analyse, a attiré mon attention sur les fonctions multiformes, M. J. Hadamard, M. E. Borel dont les livres ont été pour moi des guides précieux.

Je remercie M. G. Valiron de bien vouloir constituer mon Jury avec MM. Montel et Garnier.

J'évoque enfin, dans ma reconnaissance, la mémoire de mon père : le sculpteur Hippolyte Lefebvre, qui m'a donné la possibilité de poursuivre ce travail et l'exemple d'une vie consacrée à la recherche.

PREMIÈRE THÈSE

PROPRIÉTÉS

D'UNE

FAMILLE DE FONCTIONS

A UNE

INFINITÉ DE BRANCHES

INTRODUCTION.

L'objet de cette étude est la recherche des propriétés des fonctions $z(x)$ qui peuvent être définies par une relation

$$\text{(I)} \qquad PLz + Q = xR,$$

dans laquelle P, Q, R sont des polynomes en z à coefficients complexes ou réels, de degrés p, q, r.

Les fonctions $z(x)$ qui en résultent sont formées, en général, par une infinité de branches, lorsque x varie.

Les fonctions multiformes à une infinité de valeurs se présentent naturellement comme solutions de problèmes d'inversion et aussi comme solutions des problèmes de prolongement de fonctions analytiques à partir d'un élément de fonction : ces exemples suffisent à montrer l'importance et l'intérêt que présente leur étude.

Des fonctions dont l'étude est abordable, comme celle de la famille définie par (I), nous ont semblé propres à préciser de façon concrète la

notion de fonction multiforme; en attendant que des théories générales, suggérées probablement d'ailleurs par des propriétés caractéristiques de familles importantes de telles fonctions, puissent nous en donner une notion plus abstraite. La forme particulière que nous considérons s'est présentée au cours de l'étude de fonctions analogues à celle citée, à titre d'exemple, par P. Boutroux ([1]),

$$z - \mathrm{L}z = x,$$

mais leur formation n'est pas purement arbitraire, car elles peuvent se rencontrer effectivement au cours d'opérations élémentaires. En particulier, l'équation $\frac{dz}{dx} = \mathcal{R}(z)$, fraction rationnelle, admet une intégrale de forme

$$\mathrm{P}[\lambda_1 \mathrm{L}(z - \alpha_1) + \lambda_2 \mathrm{L}(z - \alpha_2) + \ldots + \lambda_n \mathrm{L}(z - \alpha_n)] + \mathrm{Q} = \mathrm{P}x$$

qui, si $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, se réduit à une relation (I).

Les résultats que nous avons obtenus pour cette famille de fonctions peuvent être résumés de la manière suivante :

CHAPITRE I.

Le problème fondamental est la détermination des valeurs z qui vérifient (I) quand x a une valeur déterminée (I) devenant une équation

$$(\alpha) \qquad \mathrm{M}\,\mathrm{L}z - \mathrm{N} = 0.$$

En posant $z = \rho e^{i\theta}$ et en appelant plan $[k]$ l'ensemble des valeurs z pour lesquelles on a $2(k-1)\pi < \theta < 2k\pi$, nous montrons que *l'on peut séparer les racines z_k du plan $[k]$ de l'équation (α) par un nombre fini d'opérations algébriques.*

Nous montrerons dans les chapitres suivants que la détermination des valeurs z peut se faire, en général, c'est-à-dire en supposant soit k, soit $l = |x|$ assez grand, en tirant de (I) une expression de la forme

$$z = [f(x, z) + \psi(x, z)]^{\frac{1}{m}} = \varphi(x, z),$$

([1]) P. Boutroux, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre.* Paris, Gauthier-Villars, 1908, p. 85-88.

et en faisant $z_{n+1} = \varphi(x, z_n)$, z_0 vérifiant une relation

$$z_0 = [f(x, z_0)]^{\frac{1}{m}},$$

de nature à assurer la convergence des itérations.

La relation ci-dessus est en général l'une des équations (β), (β'), (γ) ou (γ') que nous résolvons dans ce chapitre et qui sont :

1° l'équation

$$(\beta) \qquad z - \mathrm{L}z = x.$$

Nous montrons d'abord, pour cette équation, que *z n'a qu'une racine z_k quel que soit k.*

En posant $x = \lambda + i\mu$, en supposant $\lambda < -1$ fixe, et en faisant croître μ, on constate que lorsque μ passe par la valeur $2k\pi$, deux branches z_k changent de plan et que si μ passe par $\ldots, 2(k+1)\pi, \ldots, 2(k+n)\pi, \ldots$ *une branche z passe successivement sur les plans* $\ldots, [k+1], \ldots [k+n], \ldots$, *de sorte que pour celle-ci, θ croît indéfiniment avec μ.*

Il en est de même si x décrit un rayon dans un demi-plan tel que l'on ait $\frac{\cos t}{\sin t} < 0$ (t étant l'argument fixe de x). Cette branche, que nous désignons par (e) à cause de cette propriété, est asymptote à une spirale logarithmique $\mathrm{R} = e^{\theta \frac{\cos t}{\sin t}}$.

Nous retrouvons ensuite le double mode d'échange des branches z, déjà décrit par P. Boutroux.

2° l'équation

$$(\beta') \qquad \lambda'' \mathrm{L}z - z^n = x.$$

Nous montrons qu'*il existe ici n racines z_k.*

3° l'équation

$$(\gamma) \qquad z\mathrm{L}z = x.$$

Il existe ici une seule racine z_k pour laquelle on a

$$t + 2(k-1)\pi < \theta_k < t + 2k\pi,$$

sauf pour l'intervalle $(-2\pi + t, t)$ qui contient 2θ.

4° l'équation

$$(\gamma') \qquad u^m \mathrm{L} u = y.$$

On a ici m racines z_k dont les θ_k sont dans un intervalle d'étendue 2π et ces θ_k diffèrent d'environ $\frac{2\pi}{m}$.

La fin du Chapitre I est consacrée aux notations employées dans la suite et aux définitions nécessaires, en particulier celle de la surface (Σ) sur laquelle nous représentons z et celle de l'ordre de deux quantités variables. Nous donnons aussi le schéma des démonstrations de convergence qui suivent et établissons l'inégalité ($\mathcal{J}$)

$$(\mathcal{J}) \qquad \left| [1+\alpha]^{\frac{1}{m}} - 1 \right| < |\alpha|^{\frac{1}{m}},$$

d'un emploi fréquent dans celles-ci.

CHAPITRE II.

L'objet de ce chapitre est *la détermination des racines z_k, pour une valeur quelconque, mais fixe, de x et la recherche des propriétés de ces racines lorsque k croît indéfiniment.*

Comme les cas particuliers déjà étudiés portent à le penser, $\log \rho$ a pour ces propriétés une influence négligeable, tandis que θ, au contraire, est un élément perturbateur. Il est donc naturel de ranger les z_k par ordre d'arguments croissants et de chercher leurs propriétés quand θ croît indéfiniment. Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

1° *Le nombre des z_k est, en général, c'est-à-dire en exceptant un nombre fini de valeurs k, le plus grand des nombres p, q, r.*

2° *Quand k croît indéfiniment, p de ces z_k tendent vers les homologues, sur le plan $[k]$, des racines η_i de $\mathrm{P} = 0$, tandis que $(q-p)$ ou $(r-p)$ ont leur module ρ_k de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}}$ ou $k^{\frac{1}{r-p}}$*

CHAPITRE III.

Pour une branche z_k, la croissance de ρ dépend en général de la variation de θ, il convient donc de distinguer les branches (o) pour

lesquelles la variation de θ, étant bornée quand l croît indéfiniment, t restant fixe, n'influe pas sur la croissance de ρ, des branches (e) pour lesquelles il n'en est pas ainsi.

L'objet de ce chapitre est de *rechercher comment varie ρ pour une branche* (o) *et de déterminer ces branches pour un plan* $[k]$ *déterminé quand l est assez grand.*

Nous obtenons les résultats suivants :

a. Si r est supérieur à p et q, il y a r branches z_k qui tendent vers les homologues sur le plan $[k]$ *des racines η'_i de* $R = 0$;

b. Si $r = p > q$, il en est de même, sauf pour une valeur particulière de t où il peut exister une branche pour laquelle θ tend vers o *et ρ croît comme e^{kl};*

c. Si p est supérieur à q et r, il y a, outre les r branches ci-dessus, $(p-r)$ branches pour lesquelles ρ croît comme $l^{\frac{1}{p-r}}$, θ tendant vers une limite qui dépend de t;

d. Si q est supérieur à p et r, on a de même $(q-r)$ branches pour lesquelles ρ croît comme $l^{\frac{1}{q-r}}$.

En étudiant directement la croissance de ρ pour $z(x)$ définie par (γ), on obtient pour ce cas une évaluation plus précise par les inégalités

$$\frac{l}{\log l + 2k\pi + \log[\log l + 2k\pi]} < \rho_{k-1} < \frac{l}{\log l - \log\log l - 1}$$

que nous utilisons dans la suite.

Nous déterminons les branches (o) *du plan* $[k]$, pour les branches bornées en partant des homologues des η_i et, s'il existe des racines voisines de zéro, en partant des racines d'une équation auxiliaire (γ'); pour les branches grandes avec l, nous partons encore d'une racine d'une équation (γ') ou d'une racine d'une équation algébrique. Nous montrons enfin qu'*il n'y a pas d'autres branches z_k que celles qui ont été déterminées.*

CHAPITRE IV.

Nous considérons ici la croissance et la détermination des branches (e).

Pour $r \neq p$ et en supposant l'existence d'une branche (e), nous montrons que, pour une telle branche, ρ tend vers o *avec* $\frac{1}{l}$.

Sous les conditions que x soit dans un demi-plan déterminé et que $a_0 c_0 \neq 0$, *nous déterminons une branche* (e) *et montrons qu'elle est unique.*

Pour $r = p$, *il peut exister, si* $r = p > q$, *outre une branche* (e_1) *voisine de zéro, une branche* (e_2) *grande avec* l, *ce qui n'a pas lieu si* $r = p < q$. Nous montrons enfin que *les conditions supposées sont nécessaires.*

CHAPITRE V.

L'étude des singularités montre, au chapitre VI, que l'origine (et si $a_0 = 0$) le point $X = \frac{b_0}{c_0}$ peuvent être seuls des points singuliers transcendants ou des limites de points critiques algébriques. Il importe donc, pour étudier le rôle de ces points dans l'échange des branches, *de déterminer combien de branches* z_k *tendent vers* ∞ *ou vers* 0 *quand* x *tend vers* 0 *ou vers* X.

Dans le cas général où l'on a

$$a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0, \quad a_m \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad b_1 = \ldots = b_{g-1} = 0,$$
$$b_g \neq 0, \quad c_0 \neq 0, \quad c_1 = \ldots = c_{h-1} = 0, \quad c_h \neq 0.$$

l'on trouve, quand x tend vers X, que *m branches* z_k *tendent vers zéro, si* $m \leqq \nu$, ν *étant le plus petit des nombres* g *et* h, *et que* ν *branches* z_k *tendent vers* 0 *si* $m > \nu$.

Quand x tend vers 0, $(r - p)$ *branches* z_k *sont grandes avec* $\frac{1}{x}$, *si* $r > p > q$, *et* $(r - q)$ *branches, si* $r > q > p$.

Les p ou q autres branches tendent vers les racines de $PLz + Q = 0$.

CHAPITRE VI.

Pour déterminer les singularités de $z(x)$ définie par (I), nous considérons

$$\frac{dz}{dx} = \frac{zPR}{xz(P'R - R'P) + z(Q'P - P'Q) + P^2} = \frac{P_1(z)}{Q_1(x, z)},$$

et appliquons à cette équation les résultats de Painlevé. *Nous détermi-*

nons d'abord les points algébriques ξ par résolution de l'équation (E) obtenue en éliminant $x = \frac{PLz + Q}{R}$ dans Q_1 et en considérant le dénominateur.

Nous trouvons que *les* ξ *n'ont d'autres points-limites que* : 1° *l'infini*, 2° *l'origine*, *si* $r > q > p$, 3° *le point* X, si $a_0 = 0$ et $m > \nu$.

Nous trouvons comme *points critiques transcendants* : 1° *l'infini*, 2° *l'origine*, si r est supérieur à p et q, 3° *le point* X, si $a_0 = 0$.

Nous montrons ensuite qu'un contour fermé échangeant deux branches z quelconques peut toujours être formé sur le plan (x) : *les branches* $z(x)$ *définies par une relation* (I) *ne forment donc qu'une seule fonction.*

Nous cherchons enfin l'effet d'un petit cercle (C) décrit autour de l'origine quand r est supérieur à p et q dans les deux cas :

1° $r > p > q$. — Pour les $(r - p)$ branches z_k grandes avec $\frac{1}{l}$, *la valeur finale coïncide avec la valeur initiale de la branche qui la précède ou qui la suit* dans la suite formée par les valeurs initiales, de sorte que l'on peut écrire, si t augmente de 2π,

$$\ldots \bar{\bar{z}}_{k,l-1} = \bar{z}_{k,l}, \qquad \bar{\bar{z}}_{kl} = \bar{z}_{k,l+1}, \qquad \bar{\bar{z}}_{k,l+1} = \bar{z}_{k,l+2}, \quad \ldots.$$

2° $r > q > p$. — *Le résultat précédent subsiste quand, toutefois,* (C) *ne contient pas les* ξ_k *qui correspondent à la valeur* k *considérée.*

On a un résultat analogue pour un petit cercle décrit autour de X.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS FONDAMENTALES. DÉFINITIONS ET DÉMONSTRATION PRINCIPALE.

1. Étude de l'équation (α)

$$(\alpha) \qquad \mathrm{M}\mathrm{L}z - \mathrm{N} = 0,$$

où M et N sont des polynomes en z, à coefficients complexes, de degrés m et n.

Nous dirons que $z = \rho e^{i\theta}$ appartient au plan $[k]$ si $2(k-1)\pi < \theta < 2k\pi$. En posant

$$\mathrm{M} = \mathrm{M} + i\mathrm{M}'' = \sum_0^m |\alpha_j| e^{i\sigma_j} z^j, \qquad \mathrm{N} = \mathrm{N}' + i\mathrm{N}'' = \sum_0^n |\beta_j| e^{i\tau_j} z^j,$$

on tire de (α)

$$(1) \qquad \log\rho = \frac{\mathrm{N}'\mathrm{M}' + \mathrm{N}''\mathrm{M}''}{\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}''^2},$$

$$(2) \qquad \theta = \frac{\mathrm{N}''\mathrm{M} - \mathrm{N}'\mathrm{M}''}{\mathrm{M}'^2 + \mathrm{M}'^2}.$$

Soit (γ_k) un cercle de centre (O) et de rayon δ_k. Si δ_k est assez petit, le second membre de (1) est voisin de $\left|\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right| \cos(\sigma_0 - \tau_0)$, tandis que $|\log\rho|$ est grand; l'égalité est donc impossible et (α) n'a pas de racines dans (γ_k).

Soit (Γ_k) un cercle de centre (O) et de rayon Δ_k. Si $m > n$, les seconds membres de (1) et (2) sont petits pour $\rho \geqq \Delta_k$ choisi assez grand et les égalités sont impossibles. Si $m < n$, l'un des seconds membres au moins est d'ordre ρ^{n-m} et l'égalité avec θ au $\log\rho$ est encore impossible.

Le cas $m = n$ se ramène au précédent en posant $z = y e^{\frac{\beta_m}{\alpha_m}}$.

Il en résulte qu'en réunissant (γ_k) et (Γ_k) par une coupure, pratiquée, par exemple, suivant l'axe réel positif, nous limitons une aire (A) dans laquelle $F(z) = ML z - N$ est holomorphe et qui contient toutes les racines z_k de (α) sur le plan $[k]$.

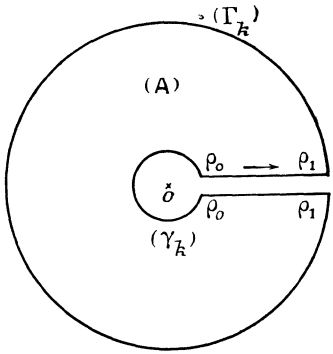

Fig. 1.

Nous allons montrer que l'on peut séparer les racines par un nombre fini d'opérations algébriques.

Considérons $f(z) = Lz - \frac{N}{M}$, qui est méromorphe dans (A), dont les m pôles sont les racines de $M = 0$ et les ν zéros sont les zéros de (α). On peut écrire, en désignant par K_A le facteur de 2π dans la variation de l'argument de $f(z)$ quand z décrit (C) formé par (Γ_k), (γ_k) et les bords de l'axe réel, et qui limite (A),

$$\nu = m + K_A.$$

Pour déterminer K_A, posons $f(z) = X + iY$. On a

$$X = \log\rho - \frac{N'M' + N''M''}{M'^2 + M''^2}, \qquad Y = \theta - \frac{N''M' - M''N'}{M'^2 + M''^2}$$

et, en posant $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = u$, $X(\rho, \theta)$ et $Y(\rho, \theta)$ deviennent

$$X(\rho, u) = \log\rho - \frac{N'M' + N''M''}{M'^2 + M''^2}, \qquad Y(\rho, u) = 2 \operatorname{arc\,tang} u - \frac{N''M - M''N'}{M'^2 + M''^2}.$$

Considérons d'une manière générale, un quadrilatère formé par deux rayons (ab) et (cd) et par deux arcs de cercles (bc) et (da).

Le long de (ab) et (cd), X et Y sont seulement fonctions de ρ et $\frac{\partial X}{\partial \rho}$,

$\frac{\partial Y}{\partial \rho}$ sont des fractions rationnelles $\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{Q}_1}$ et $\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{Q}_2}$; nous désignerons par σ le plus haut degré en ρ de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Soient, quand ρ varie de $|a|$ à $|b|$, $\rho'_1 \ldots \rho'_\sigma$ les racines de $\mathcal{P}_1 = 0$ et $\rho''_1 \ldots \rho''_\sigma$ celles de $\mathcal{P}_2 = 0$.

Soient X_j et Y_j les valeurs de X et Y pour $\rho = \rho'_j$ ou $\rho = \rho''_j$ et $\mathfrak{M}_j(X_j, Y_j)$ le point de la courbe (C_1) décrite par $Z = X + iY$ quand z décrit (ab).

Supposons les ρ' et ρ'' rangées par valeurs croissantes et considérons deux points Z_j et Z_{j+1} qui correspondent à deux valeurs ρ' ou ρ'' consécutives. Menons par ces points des parallèles à OX et OY et supposons que le rectangle ainsi formé ne renferme pas l'origine.

La portion de (C_1) décrite par $\mathfrak{M}$ quand ρ varie de ρ'_j à ρ'_{j+1} est continue dans ce rectangle et la variation de l'argument de $O\mathfrak{M}$ est $\arg Z_{j+1} - \arg Z_j$, ces arguments étant compris dans $[2(h-1)\pi, 2h\pi]$.

Il n'est besoin, pour ce calcul, que d'une détermination approchée des ρ' et ρ''.

Supposons, au contraire, que le rectangle renferme l'origine.

Il faut ici, pour avoir la variation de l'argument de $O\mathfrak{M}$, connaître la position de la courbe (C_1) par rapport à l'origine. Il suffit pour cela de connaître le signe de X quand $Y = 0$ et il suffit encore d'une valeur approchée de cette racine de $Y = 0$.

Comme u est constant, nous déterminerons la racine, ici algébrique, de $Y = 0$ et nous pourrons, pour la valeur ρ correspondante, calculer une valeur au moins approchée de X afin d'avoir son signe et par suite, la position de (C_1) et la variation de l'argument de Z.

Le long de (bc), comme X et Y sont seulement fonctions de u, ρ ayant la valeur constante $|b|$, nous déterminerons, pour u variant de u_a à u_b, les valeurs qui annulent $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial Y}{\partial u}$, qui sont des racines d'équations algébriques en u.

Nous déterminerons les Z qui correspondent à ces valeurs et nous obtiendrons la variation de l'argument de $O\mathfrak{M}$ comme dans le cas précédent. Toutefois si le rectangle, dont deux sommets opposés sont des Z_j contient l'origine, nous chercherons la valeur de Y quand $X = 0$, X étant ici une fraction rationnelle en u.

Nous pouvons donc obtenir l'indice K_A pour $(abcd)$ par une résolution approchée d'équations algébriques.

Nous pouvons diviser (A) en huit quadrilatères par des rayons dont les arguments sont des multiples de $\frac{\pi}{4}$. Pour chacun, u varie entre o et $\pm\infty$; nous pouvons obtenir le nombre H_i des racines qu'il contient et par suite $K_\lambda = H_1 + H_2 + \ldots + H_8$.

Nous pouvons subdiviser chacun de ces quadrilatères par un cercle passant par les milieux des rayons et par un rayon passant par les milieux des arcs de cercles. Après un nombre fini d'opérations, nous obtiendrons K_λ quadrilatères contenant chacun une racine. Nous pourrons donc obtenir chaque racine avec une approximation déterminée, puisque après 4^n opérations, ρ sera connu à $\left(\frac{\Delta_\lambda - \delta_\lambda}{2^n}\right)$ et θ à $\frac{\pi}{4.2^n}$ près, au plus.

Nous supposons que les racines de $ML z - N = o$ sont simples; dans le cas contraire, on aurait $\frac{M}{z} + M'_z Lz - N' = o$, d'où en éliminant Lz, l'équation $z(N'_z M - M'_z N) - MN = o$. Nous pouvons donc, en cherchant si les racines de cette dernière équation vérifient (α), reconnaître si (α) admet des racines multiples.

Remarquons que l'on peut avoir une borne supérieure de K_λ en fonction de m et n; en effet, soit H le nombre des racines de $\frac{\partial X}{\partial \rho} = o$, $\frac{\partial Y}{\partial \rho} = o$, $\frac{\partial X}{\partial u} = o$, $\frac{\partial Y}{\partial u} = o$ quand z décrit (C); ce nombre ne dépend que de m et n.

Soit $\mathfrak{M}_0(X_0, Y_0)$ pour laquelle, par exemple, $X_0 > o$, $Y_0 > o$. Si, pour une autre valeur $\mathfrak{M}_1(X_1, Y_1)$ telle que $X_1 > o$, $Y_1 > o$. $\arg O\mathfrak{M}$ a varié d'un multiple de 2π, X variant de X_0 à X_1 a pris des valeurs négatives, ce qui exige $\frac{\partial X}{\partial \rho} = o$ ou $\frac{\partial X}{\partial u} = o$ au moins une fois. Il en est de même pour Y pour chaque variation de 2π. Par conséquent K_λ ne peut dépasser $\frac{H}{2}$.

2. **Exemple.** — Soit, en supposant par exemple $\lambda > o$, $\mu > o$,

$$F(z) = Lz - z + \lambda + i\mu,$$

ici $f(z) = Lz - z + \lambda + i\mu$, dont on tire

$$X = \log\rho - \rho\cos\theta + \lambda, \qquad Y = \theta - \rho\sin\theta + \mu,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} - \cos\theta, \qquad \frac{\partial X}{\partial \theta} = \rho\sin\theta, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \rho} = -\sin\theta, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \theta} = 1 - \rho\cos\theta.$$

Faisons varier z le long de (C), $\rho_0 = \delta_k$ et $\rho_1 = \Delta_k$ étant déterminés, en supposant $k > 0$ par les considérations suivantes :

Pour $\rho_0 = e^{-\lambda-1}$, on a $X(\rho_0, \theta) = -1 - \rho_0 \cos\theta < 0$ et par suite, $f(z)$ ne peut être nul dans (γ_k).

Nous prendrons ρ_1 tel que

$$(1) \qquad \frac{\log \rho_1 + \lambda}{\rho_1} < \frac{1}{2}$$

et

$$(2) \qquad \rho_1 > \frac{4}{3}(2k\pi + \mu).$$

La première condition est réalisée si, par exemple, $\rho_1 > 4\lambda$ et $\rho_1 > e^{\lambda}$.

Considérons les valeurs de X et Y quand z décrit le contour (C) tracé sur le plan $[k]$.

Pour $\theta = 2[k-1]\pi$ et $\rho = \rho_0$, l'on a

$$X_0 = -1 - e^{-\lambda-1} < 0 \qquad \text{et} \qquad Y_0 = 2(k-1)\pi + \mu > 0.$$

Le long de l'axe réel, de ρ_0 à ρ_1, Y est constant et égal à Y_0, d'autre part $\frac{\partial X}{\partial \rho} = 0$ pour $\rho = 1$, donc X croît de X_0 à $X(1) = \lambda - 1$, puis décroît jusqu'à $X(\rho_1) < 0$ car $\rho_1 > 2(\log \rho_1 + \lambda)$.

Le long de (Γ_k), $\rho = \rho_1$ et θ varie de $\theta_0 = 2(k-1)\pi$ à $\theta_0 + 2\pi$. On a

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{pour } \theta_0,\ \theta' = \theta_0 + \pi,\ \theta'' = \theta_0 + 2\pi$$

et

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{pour } \theta_2 = \theta_0 + \frac{\pi}{2} - \omega \text{ et } \theta_3 = \theta_0 + 3\frac{\pi}{2} + \omega$$

tels que $\cos\theta_2 = \cos\theta_3 = \frac{1}{\rho_1}$.

On a $X = 0$ quand $\cos\theta = \frac{\log \rho_1 + \lambda}{\rho_1}$, ce qui a lieu pour $\theta_1 = \theta_0 + \frac{\pi}{2} - \Omega$ et $\theta_4 = \theta_0 + 3\frac{\pi}{2} + \Omega$.

Or, d'après la condition (1), on a $\cos\theta_1 = \cos\theta_4 < \frac{1}{2}$, d'où $\sin\theta_1 > \frac{3}{4}$ et $\sin\theta_4 < -\frac{3}{4}$; il en résulte, d'après (2), $Y(\theta_1) < 0$ et $Y(\theta_4) > 0$.

Les valeurs remarquables de θ sont donc, en supposant $\Omega > \omega$,

$$\theta_0, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta', \quad \theta_3, \quad \theta_4, \quad \theta''.$$

Pour θ_0, on a $\frac{\partial X}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial Y}{\partial \theta} < 0$ et, pour θ variant de θ_0 à θ', $\frac{\partial X}{\partial \theta} > 0$;

Pour θ_1, on a $X = 0$, $Y < 0$;

Pour θ_2, on a $\frac{\partial Y}{\partial \theta} = 0$ et, pour θ variant de θ_2 à θ_3, $\frac{\partial Y}{\partial \theta} > 0$;

Pour θ', on a $\frac{\partial X}{\partial \theta} = 0$, $X = \log \rho_1 + \rho_1 + \lambda$ et $Y = \theta' + \mu = \theta_0 + \pi$;

Pour θ_3, on a $\frac{\partial Y}{\partial \theta} = 0$ et, pour θ variant de θ_3 à θ'', $\frac{\partial Y}{\partial \theta} < 0$.

Pour θ_4, on a $X = 0$, $Y > 0$;

Pour θ'', on a $X = X(\theta_0)$ et $Y = \theta_0 + 2\pi + \mu = Y(\theta_0) + 2\pi$.

Le long de $\rho_1 \rho_0$ suivant l'axe réel, on a pour (C_1) un segment de parallèle à Ox égal à celui obtenu pour z variant de ρ_0 à ρ_1 et distant de 2π.

Le long de (γ_k), X varie de $\log \rho_0 + \lambda - \rho_0$ à $\log \rho_0 + \lambda + \rho_0$ et revient à $\log \rho + \lambda - \rho_0$, tandis que Y décroît de $Y(\theta'') = Y(\theta_0) + 2\pi$ à $Y(\theta_0)$ puisque, pour θ diminuant de 2π, on a $\frac{\partial Y}{\partial \theta} = 1 - \rho_0 \cos\theta < 0$.

La variation de l'argument de $O\mathfrak{M}$, quand $\mathfrak{M}$ décrit (C_1) en passant

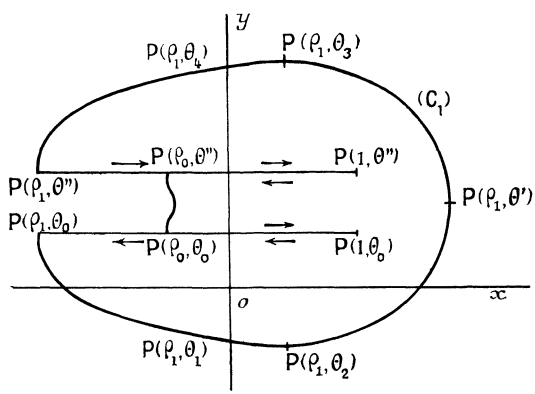

Fig. 2.

par les points $P(\rho_0, \theta_0)$, $P(1, \theta_0)$, $P(\rho_1, \theta_0)$, $P(\rho_1, \theta_1)$, $P(\rho_1, \theta_2)$, $P(\rho_1, \theta')$, $P(\rho_1, \theta_3)$, $P(\rho_1, \theta_4)$, $P(\rho_1, \theta'')$, $P(1, \theta'')$, $P(\rho_0, \theta'')$, $P(\rho_0, \theta_0)$ est, d'après la figure suivante, de 2π et $K_A = 1$.

Si $x = -\lambda - i\mu$, on voit que, pour $k > 0$, $Lz - z - x = 0$ a une racine z sur chaque plan $[k]$, résultat que nous obtiendrons d'ailleurs d'autre manière.

3. Étude des solutions de l'équation (β) pour $\mathcal{R}\left(\frac{x}{i}\right)$ constant

$$(\beta) \qquad \mathrm{L}\, z - z = x,$$

x ayant une valeur déterminée.

Posons $x = \lambda + i\mu$, $z = \rho e^{i\theta}$. On obtient le système

$$\log\rho - \rho\cos\theta = \lambda, \qquad \theta - \rho\sin\theta = \mu$$

dont on tire l'équation en θ

$$\frac{\theta - \mu}{\sin\theta} - e^{(\theta-\mu)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\lambda} = 0.$$

Posons

$$\alpha(\theta) = \frac{\theta - \mu}{\sin\theta}, \qquad \beta(\theta) = e^{(\theta-\mu)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\lambda}, \qquad \delta(\theta) = \alpha(\theta) - \beta(\theta) = 0.$$

Considérons α et β pour θ dans un intervalle $[2h\pi,\ 2h\pi + 2\pi]$, h pouvant prendre toute valeur entière de $-\infty$ à $+\infty$.

Il suffit de considérer $\mu > 0$, car α et β prennent les mêmes valeurs pour $\theta = \omega$, $\mu = m$ et pour $\theta = -\omega$, $\mu = -m$.

A. Considérons d'abord l'intervalle $[2k\pi,\ 2k\pi + 2\pi]$ contenant, au sens strict, la valeur de μ et supposons de plus $2k\pi < \mu < 2k\pi + \pi$, puisque, pour deux couples de valeurs μ et θ qui diffèrent de $2k\pi + \pi$ de la même quantité, α et β prennent les mêmes valeurs.

Le cas où μ est un multiple de 2π sera considéré au paragraphe 4.

On a seulement $\alpha > 0$ pour $\mu < \theta < 2k\pi + \pi$ et, dans cet intervalle, α croissante car, pour $\theta < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, il résulte des inégalités

$$(\theta - \mu) < (\theta - 2k\pi) < \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

l'inégalité

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\sin\theta - (\theta - \mu)\cos\theta}{\sin^2\theta} > 0$$

qui reste vérifiée quand on a $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2k\pi + \pi$, car alors $\cos\theta < 0$.

a. Supposons $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \mu < 2k\pi + \pi$.

Quand θ varie de μ à $2k\pi + \pi$, α croît de 0 à $+\infty$, tandis que β décroît

de e^λ à o, car on a $\cos\theta < o$ et $(\theta - \mu) > o$, d'où résulte

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{\beta[\sin\theta\cos\theta - (\theta - \mu)]}{\sin^2\theta} < o.$$

On a donc $\delta = o$ pour une seule valeur θ de l'intervalle.

b. Supposons $2k\pi < \mu < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

On a encore $\frac{d\beta}{d\theta} \leqq o$ pour θ entre $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ et $2k\pi + \pi$ et, d'autre part $\frac{d\alpha}{d\theta} > o$ et, pour $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\beta = e^\lambda > \frac{\pi}{2} > \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \mu$, si λ est assez grand. D'autre part, on a $\beta = o$ et $\alpha = +\infty$ pour $\theta = 2k\pi + \pi$ et par suite, $\delta = o$ pour une seule valeur θ dans cet intervalle

$$\left[2k\pi + \frac{\pi}{2},\ 2k\pi + \pi\right].$$

L'intervalle $\left[\mu,\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ ne contient pas de racines, car α croît de o à $2k\pi + \frac{\pi}{2} - \mu$, tandis que β croît de e^λ à $e^{\cos^2\theta' + 1}$, qui correspond à θ' telle que $(\theta' - \mu) = \sin\theta'\cos\theta'$, valeur pour laquelle $\frac{d\beta}{d\theta} = o$, et décroît ensuite jusqu'à e^λ. On a donc $\beta > \alpha$ dans tout cet intervalle.

Il reste à montrer que, μ étant fixe, $\delta = o$ admet toujours une racine quand λ varie. Or

$$\delta = \frac{\theta - \mu}{\sin\theta} - e^{(\theta - \mu)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1} = o$$

définit θ comme fonction de λ. Considérons inversement λ comme fonction de θ en écrivant

$$y = e^\lambda = \frac{\theta - \mu}{\sin\theta} e^{-(\theta - \mu)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}.$$

A toute valeur θ comprise entre μ et $2k\pi + \pi$ correspond une valeur λ et, d'autre part, dans

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[(\theta - \mu)^2 - 2(\theta - \mu)\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta]}{\sin^3\theta} e^{-(\theta - \mu)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

le crochet, supérieur à $[\theta - \mu - \sin\theta]^2$, est toujours positif.

Il en résulte que λ est une fonction monotone de θ, qui varie dans l'intervalle précédent et, inversement, qu'à toute valeur λ correspond

une seule valeur θ dans cet intervalle, et cela quel que soit $\mu \neq 2k\pi$, car nous n'avons fait aucune hypothèse sur k.

Vérifions-le en procédant par continuité. Pour $\lambda = \log\left[2k\pi + \frac{\pi}{2} - \mu\right]$ on a $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ et l'on peut calculer θ de proche en proche en partant de cette valeur puisque, en supposant $\mu \neq 2k\pi$, on ne peut avoir $\frac{d\delta}{d\theta} = 0$.

Il faudrait en effet pour cela $\alpha = \beta$ et $\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d\beta}{d\theta}$; or,

$$\sin\theta - (\theta - \mu)\cos\theta = \beta[\sin\theta\cos\theta - (\theta - \mu)]$$

nécessiterait, en divisant par $\sin\theta$,

$$1 - \alpha\cos\theta = \alpha\cos\theta - \alpha^2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} > 0,$$

donc $\cos\theta = 1 = \alpha$.

On aurait $\cos\theta = 1 = e^{1+\lambda}$, donc $\lambda = -1$ et $\theta = 2k\pi = \mu$.

Donc l'intervalle $[2k\pi,\ 2k\pi + 2\pi]$ dans lequel $(\theta - \mu)$ s'annule, ne contient qu'une racine θ de $\delta = 0$.

B. Considérons maintenant l'intervalle $[2h\pi, 2h\pi + 2\pi]$ avec $h > k$, ce qui donne $(\theta - \mu) > 0$.

Pour avoir $\alpha > 0$, il faut $\sin\theta > 0$, donc θ compris entre $2h\pi$ et $2h\pi + \pi$.

On a ici $\frac{d\beta}{d\theta}$ toujours négative, tandis que $\frac{d\alpha}{d\theta}$ s'annule une fois.

Pour $\theta = 2h\pi + \varepsilon$, α est grand, mais β est grand comme e^{α} et l'on a $\beta > \alpha$.

Pour $\theta = 2h\pi + \pi - \varepsilon$, α est grand, tandis que β est petit et l'on a $\beta < \alpha$.

On a donc $\delta = 0$ pour un nombre impair de valeurs θ dans l'intervalle.

Or le minimum de α correspondant à une valeur θ'' pour laquelle $(\theta'' - \mu)\frac{\cos\theta''}{\sin\theta''} = 1$, ce qui donne $\alpha = \frac{1}{\cos\theta''}$ et $\beta = e^{1+\lambda}$.

On a donc, pour λ assez grand, $\beta > \alpha$ et, comme entre θ'' et $2h\pi + \pi$, δ est croissante, il y a une seule racine de $\delta = 0$ dans $[\theta'', 2h\pi + \pi]$.

Il ne peut y avoir, d'autre part, qu'un nombre pair de racines dans $[2h\pi, \theta'']$. Pour une telle racine, on aurait $\beta = \alpha$ ainsi que

$$\frac{\partial\delta}{\partial\theta} = \frac{\sin^2\theta - 2(\theta - \mu)\sin\theta\cos\theta + (\theta - \mu)^2}{\sin^3\theta} > 0.$$

Or le signe de $\frac{d\delta}{d\theta}$ ne pouvant être le même pour toutes les racines, le nombre des racines est donc nul.

On a donc une seule racine θ dans $[2h\pi, 2h\pi + 2\pi]$ pour λ assez grand et l'on verrait comme plus haut qu'il en est de même quand λ varie.

On a le même résultat pour $[2h\pi, 2h\pi + 2\pi]$ avec $h < k$, par une discussion analogue; toutefois, comme $(\theta - \mu) < 0$, il faut $\sin\theta < 0$.

En définitive, *pour toute valeur x pour laquelle μ n'est pas multiple de 2π, on a, pour toute valeur entière de h, une seule racine z_h d'argument θ_h compris entre $2(h-1)\pi$ et $2h\pi$.*

4. Étude des solutions de l'équation (β) pour $\mathcal{R}(x)$ constant. — D'après ce qui précède, lorsque λ varie, μ restant fixe et différent de $2k\pi$, chaque θ_h reste intérieur à l'intervalle qui lui correspond. Faisons maintenant varier μ en laissant $\lambda \neq -1$ fixe.

Chaque θ_h définie par $\delta = 0$ est une fonction continue de μ, pour $\mu \neq 2k\pi$, puisque

$$\frac{\partial\theta}{\partial\mu} = -\frac{\partial\delta}{\partial\mu} : \frac{\partial\delta}{\partial\theta} = \frac{\sin\theta[\sin\theta - (\theta-\mu)\cos\theta]}{\sin^2\theta - 2(\theta-\mu)\sin\theta\cos\theta + (\theta-\mu)^2}$$

a une valeur finie bien déterminée.

Il en résulte que si μ croît d'une valeur μ_0, comprise entre $2k\pi - 2\pi$ et $2k\pi$ jusqu'à $2k\pi$, les θ_h prennent les valeurs que l'on détermine en faisant $\mu = 2k\pi$ dans les relations initiales.

Or θ_k et θ_{k+1} comprises, pour $\mu = \mu_0$, dans $[2k\pi - 2\pi, 2k\pi]$ et $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$ peuvent seules prendre avec μ la valeur $2k\pi$, les autres racines restant dans des intervalles séparés les uns des autres.

Si $\theta = \mu = 2k\pi$, on doit avoir $\log\rho - \rho = \lambda$.

Pour déterminer les valeurs de λ pour lesquelles cette équation a des racines, posons $v(\rho) = \log\rho$, $w(\rho) = \rho + \lambda$ et construisons la courbe (v) et la droite (w) de coefficient 1. Ici $\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho}$ est égale à 1 pour $\rho = 1$ et la tangente (τ) correspondante coupe l'autre axe au point -1.

Par suite (w) rencontre (v), si $\lambda < -1$, en deux points d'abscisses $\rho_1 < 1$ et $\rho_2 > 1$ ou, si $\lambda > -1$, ne la rencontre pas.

Si l'on a $\lambda < -1$, θ_k et θ_{k+1} prennent la valeur $2k\pi$ avec μ et, lorsque μ dépasse cette valeur, θ_k passe dans $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$ et θ_{k+1} dans $[2k\pi - 2\pi, 2k\pi]$.

En effet posons avant la traversée de la valeur $2k\pi$

$$\mu = 2k\pi - \varepsilon, \qquad \theta_k = 2k\pi - \eta_k \qquad (\varepsilon > 0,\ \eta_k > 0);$$

la limite de $\frac{\varepsilon}{\eta_k}$ reste finie quand ε tend vers 0, car la seconde relation

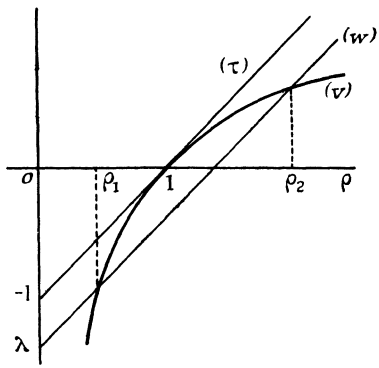

Fig. 3.

initiale donne $2k\pi - \eta_k - \rho[-\eta_k, \ldots] = 2k\pi - \varepsilon$, d'où $\frac{\varepsilon}{\eta_k} = 1 - \rho$ et comme ρ doit tendre vers ρ_1 ou ρ_2, ceci exclut $\rho_2 > 1$ et l'on a $\lim \frac{\eta_k}{\varepsilon} = \frac{1}{1-\rho_1}$. De même, en posant $\theta_{k+1} = 2k\pi + \eta_{k+1}$, on a

$$\lim \frac{\eta_{k+1}}{\varepsilon} = \frac{1}{\rho_2 - 1}.$$

Comme les dérivées des racines θ_k et θ_{k+1} par rapport à μ sont : la première positive et la seconde négative quand μ traverse la valeur $2k\pi$, il en résulte qu'après cette traversée, θ_k est comprise dans l'intervalle $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$ et θ_{k+1} dans l'intervalle $[2k\pi - 2\pi, 2k\pi]$.

Si μ passe par la valeur $2k\pi + 2\pi$, θ_k passe dans $[2k\pi + 2\pi, 2k\pi + 4\pi]$ tandis que θ_{k+2} passe dans $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$, ... Si μ croît indéfiniment, il en est de même de θ_k, tandis que θ_{k+1}, θ_{k+2}, ... passent successivement dans l'intervalle inférieur à celui dans lequel est comprise leur valeur initiale et y demeurent ensuite.

Considérons les variations de ..., θ_{k-1}, θ_k, θ_{k+1}, θ_{k+2} ... quand μ croît de $\mu_0 < 2k\pi$ à $\mu > 2(k+2)\pi$, λ restant fixe et inférieur à -1.

La valeur initiale de θ_{k-1} est comprise dans $[2(k-2)\pi + \pi, 2(k-1)\pi]$ puisque $(\theta - \mu) < 0$; $\sin\theta_{k-1}$ ne pouvant s'annuler, θ_{k-1} demeure dans

cet intervalle et tend vers $2(k-2)\pi + \frac{3\pi}{2}$ puisque $\left|\frac{\theta_{k-1}-\mu}{\sin\theta_{k-1}}\right|$ croissant indéfiniment, $\cos\theta_{k-1}$ doit tendre vers o en restant positif.

Comme l'équation $\frac{\theta_{k-1}-\mu}{\sin\theta_{k-1}} = e^{\lambda}$ n'a pas de racine pour

$$\mu > e^{\lambda} + 2(k-1)\pi$$

la différence $\theta_{k-1} - \left[2(k-2)\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ demeure positive ; pour la branche z_{k-1} correspondante, $\rho_{k-1} = \frac{\theta_{k-1}-\mu}{\sin\theta_{k-1}}$ croît comme μ. Les conclusions seraient les mêmes pour une branche d'indice inférieur à $k-1$.

Passons à θ_k. Nous supposons $2k\pi - \pi < \mu < 2k\pi$. La valeur initiale de θ_k est elle-même comprise entre $2k\pi - \pi$ et $2k\pi$ car, dans

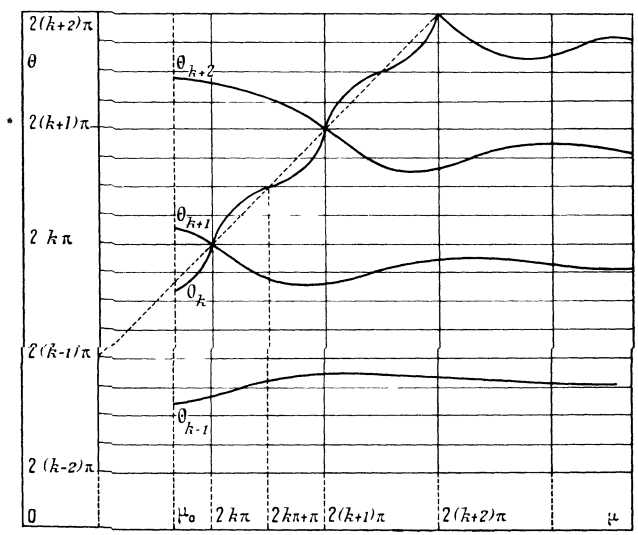

Fig. 4.

$[2k\pi - 2\pi,\ 2k\pi - \pi]$, on aurait $(\theta_k - \mu) < 0$ et $\sin\theta_k > 0$, ce qui est impossible.

Comme nous le savons, θ_k tend vers $2k\pi$ avec μ et $\left(\frac{\partial\theta_k}{\partial\mu}\right) = \frac{1}{1-\rho_1}$; pour cette valeur, ρ_k prend la valeur ρ_1.

Pour μ compris dans $[2k\pi,\ 2k\pi + \pi]$, θ_k est comprise dans le même intervalle. Quand μ passe par la valeur $2k\pi + \pi$, θ_k prend aussi cette valeur puisque μ devenant compris dans $[2k\pi + \pi,\ 2k\pi + 2\pi]$, θ_k doit

aussi être comprise dans cet intervalle. Quand $\mu = 2k\pi + \pi = \theta_k$, ρ_k prend la valeur ρ', unique racine de $\log\rho + \rho = \lambda$, quel que soit λ.

La courbe $\theta_k(\mu)$ est symétrique par rapport au point $\mu = 2k\pi + \pi = \theta_k$, puisque, si pour $\mu' = 2k\pi + \pi - \omega$, l'on a $\theta'_k = 2k\pi + \pi - \tau$, pour $\mu'' = 2k\pi + \pi + \omega$, l'on a $\theta''_k = 2k\pi + \pi + \tau$.

D'autre part, ρ_k varie de ρ_1 à ρ', puis de ρ' à ρ_1; en effet considérons $\rho_k = \dfrac{\theta_k - \mu}{\sin\theta_k}$: on a, d'après la valeur de $\dfrac{\partial\theta_k}{\partial\mu}$,

$$\frac{\partial\rho_k}{\partial\mu} = \frac{\dfrac{\partial\theta_k}{\partial\mu} - 1}{\sin\theta_k} - \frac{(\theta_k - \mu)\cos\theta_k}{\sin^2\theta_k}\frac{\partial\theta_k}{\partial\mu} = \frac{-(\theta_k - \mu)^2\sin\theta_k}{\sin^2\theta_k - 2(\theta_k - \mu)\sin\theta_k\cos\theta_k + (\theta_k - \mu)^2},$$

qui est nulle pour $2k\pi$, $2k\pi + \pi$, $2k\pi + 2\pi$, $\frac{\eta'}{\xi}$ restant fini.

Passons à θ_{k+1}. Sa valeur initiale est comprise entre $2k\pi$ et $2k\pi + \pi$, et θ_{k+1} passe par la valeur $2k\pi$ avec μ; on a alors $\left(\dfrac{\partial\theta_{k+1}}{\partial\mu}\right) = \dfrac{1}{1 - \rho_2} < 0$, ρ_2 étant la valeur correspondante de ρ_{k+1}. Quand μ dépasse $2k\pi$, θ_{k+1} devenue inférieure à $2k\pi$ se comporte comme θ_{k-1}.

De même θ_{k+2} passe par la valeur $2(k+1)\pi$ ainsi que θ_k, quand μ atteint cette valeur.

Au contraire, si $\lambda > -1$, tous les θ restent dans leurs intervalles initiaux. Donc, si l'on considère de petits circuits (c_1), (γ), (c_2) décrits

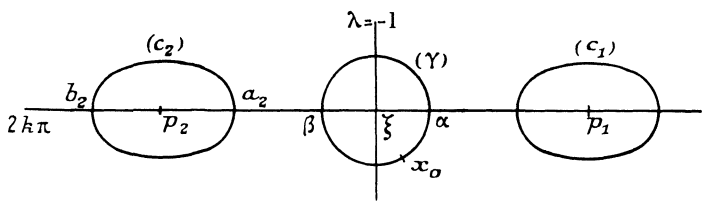

Fig. 5.

autour des points $p_1(\mu = 2k\pi,\ \lambda > -1)$, $\xi(\mu = 2k\pi,\ \lambda = -1)$, $p_2(\mu = 2k\pi,\ \lambda < -1)$ on voit que l'effet de (c_1) est nul. Il en est de même de (c_2) car quand x passe par a_2, θ_{k+1} devient inférieur à $2k\pi$ et θ_k supérieur, mais quand x passe par b_2, θ_{k+1} redevient supérieur à $2k\pi$ et θ_k inférieur.

Pour (γ) au contraire, lorsque x passe en α, θ_k et θ_{k+1} restent respectivement inférieur et supérieur à $2k\pi$, tandis que lorsque x passe en β, θ_k devient supérieur à $2k\pi$ et θ_{k+1} inférieur, jusqu'au retour de x en x_0.

On a donc, en désignant par $\bar{z}_k$ et $\bar{\bar{z}}_k$ la valeur initiale et la valeur finale de z_k pour $x = x_0$,

$$\bar{\bar{z}}_k = \bar{z}_{k+1}, \qquad \bar{\bar{z}}_{k+1} = \bar{z}_k.$$

5. **Étude des solutions de l'équation (β) quand x décrit un rayon.** — Considérons maintenant la variation d'une branche z_k quand x décrit un rayon d'argument t, de sorte que $\lambda = l\cos t$, $\mu = l\sin t$.

Si $\cos t < 0$, on a $\lambda < -1$ pour l assez grand et, par ce qui précede, nous savons qu'un θ croît indéfiniment avec μ.

La racine ρ_1 de $\log\rho - \rho = \lambda = l\cos t$ tend vers 0 quand λ décroît indéfiniment et il en est de même de $\theta - l\sin t$, puisque $\rho = \frac{\theta - \mu}{\sin\theta}$.

Il y a donc ici une branche de croissance exceptionnelle, que nous désignerons par (e), *dont l'argument croît comme* $l\sin t$, *tandis que le module tend vers* 0 *comme* $e^{l\cos t}$, comme nous le verrons au § 41. Pour les autres branches, que nous désignerons par (0), ρ croît comme $\frac{-l}{\cos t}$ et θ varie d'une quantité inférieure à 4π, puisque θ demeure dans l'intervalle inférieur à l'intervalle initial, quand μ croît indéfiniment.

Si $\cos t \geqq 0$, il n'y a pas de branche (e).

Si nous comparons ces résultats avec ceux que l'on obtient quand x décrit la droite $\lambda = \lambda_0 < -1$, nous constatons que les branches z_{k+h} varient comme les branches (0), c'est-à-dire ρ_{k+h} croissant comme μ au lieu de l et θ_{k+h} variant dans les deux cas d'une quantité bornée. Au contraire, z_k décrit une infinité de fois une courbe fermée ρ_k, variant entre ρ_1 et ρ', dont les valeurs sont indépendantes de μ et restent invariables.

Ici, ρ_k de z_k tend vers 0 comme $e^{l\cos t}$ et z_k, qui est (e), admet comme asymptote la spirale $R = e^{\theta\frac{\cos t}{\sin t}}$.

En effet, en posant $Z = Re^{i\theta}$, $LZ = x$ donne

$$Re^{i\theta} = e^{l\cos t + il\sin t}, \qquad \text{d'où} \quad R = e^{\theta\frac{\cos t}{\sin t}};$$

ici, $\rho = e^{l\cos t + \rho\cos\theta}$ donne, puisque $l = \frac{\theta - \rho\sin\theta}{\sin t}$,

$$\rho = e^{\theta\frac{\cos t}{\sin t} + \rho\frac{\sin(t-\theta)}{\sin t}};$$

il en résulte $\frac{R - \rho}{\rho} = e^{-\rho\frac{\sin(t-\theta)}{\sin t}} - 1$, qui tend vers 0 avec ρ.

6. **Étude de l'échange des branches de $z(x)$ définie par (β).** — On peut échanger la branche (e) avec une branche (o) quelconque en faisant tourner x autour du ξ_k correspondant.

Elle admet donc, comme l'écrivait P. Boutroux, tous les ξ_k comme points critiques, tandis qu'une branche (o) n'en admet que deux, qui sont, pour z_h, les points ξ_{h-1} et ξ_h.

En effet, soient (γ_k), (γ_{k+1}), (γ_{k+2}) des contours entourant ξ_k, ξ_{k+1}, ξ_{k+2} et reliés par des chemins simples situés dans le demi-plan pour lequel $\lambda > -1$.

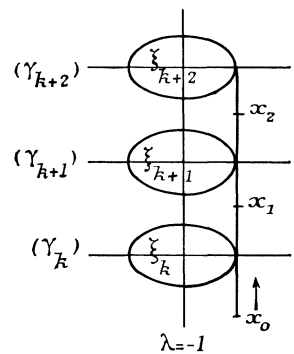

Fig. 6.

Si x part de x_0, décrit (γ_k) et arrive en x_1, la branche dont l'argument est alors dans $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, est z_k, z_{k+1} ayant son argument dans $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$. De même x, partant de x_1, décrivant (γ_{k+1}) et arrivant en x_2 amène l'argument de z_k dans $[2(k+1)\pi, 2(k+2)\pi]$. Si alors x, partant de x_2, décrit (γ_{k+2}) et revient en x_2, l'argument de z_k arrive et demeure dans $[2(k+2)\pi, 2(k+3)\pi]$, tandis que celui de z_{k+3} devient compris dans $[2(k+1)\pi, 2(k+2)\pi]$.

Si x revient ensuite en x_0 en décrivant (γ_{k+1}) et (γ_k) en sens inverse, z_{k+3} prend comme valeur finale la valeur initiale de z_k; la valeur finale de z_k étant la valeur initiale de z_{k+3}.

On a donc échangé z_k et z_{k+3} en tournant successivement autour de ξ_k, ξ_{k+1}, ξ_{k+2}.

Mais on peut aussi, en déplaçant x dans le demi-plan pour lequel $\lambda < -1$, en tournant autour de ξ_{k+2} et en revenant en x_0, échanger z_k et z_{k+3}.

En effet, dans le demi-plan gauche, z_k devient (e), son argument passe

de l'intervalle $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$ à l'intervalle $[2(k+1)\pi, 2(k+2)\pi]$ quand x décrit x_0x'; puis, quand x décrit (γ_{k+2}), notre branche s'échange avec z_{k+3} et son argument demeure dans $[2(k+2)\pi, 2(k+3)\pi]$

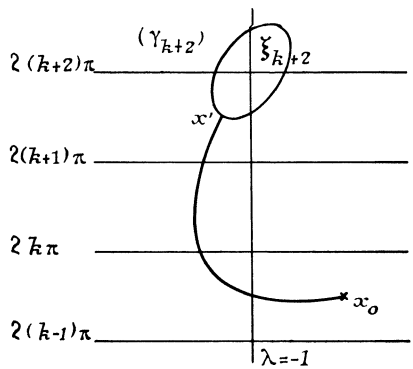

Fig. 7.

quand x revient de x' à x_0; z_{k+3}, qui est (e), prend comme valeur finale la valeur initiale de z_k.

On a donc échangé z_k et z_{k+3} en tournant seulement autour de ξ_{k+2}.

7. Extension des résultats précédents à l'équation

$$(\beta') \qquad \lambda'' \mathrm{L} z - z^n = x.$$

λ'' étant une constante complexe quelconque.

Posons $z = y e^{\frac{x}{\lambda''}}$; il vient dans (β')

$$\lambda'' \mathrm{L} y - y^n e^{n\frac{x}{\lambda''}} = 0.$$

On peut donc, en supposant cette transformation effectuée, écrire (β')

$$(\beta') \qquad \lambda' \mathrm{L} z - z^n = 0.$$

Nous voulons montrer que cette équation, que nous rencontrerons dans la suite, admet n racines d'arguments θ_k compris dans un intervalle d'étendue 2π.

Posons $z^n = v = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $\lambda' = n e^{-\lambda - i\mu}$; il faut résoudre

$$v = e^{-\lambda - i\mu} \mathrm{L} v$$

et, en posant encore $v = e^{-\lambda - i\mu} w$,

$$w = -\lambda - i\mu + \mathrm{L}w$$

dont, en posant $w = \rho_2 e^{i\theta_2}$, on tire l'équation $\frac{\theta_2 - \mu}{\sin\theta_2} = e^{(\theta_2 - \mu)\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} + \lambda}$, qui a une seule racine θ_2 par intervalle d'étendue 2π, d'après le paragraphe **3**, Il en résulte, pour $\theta_1 = \theta_2 - \mu$, une racine θ_1 dans chacun des intervalles

$$[2kn\pi - \mu, (2kn+2)\pi - \mu], \quad \ldots, \quad [(2kn+2n-2)\pi - \mu, (2kn+2n)\pi - \mu]$$

et, par suite, n racines θ dans $\left[2k\pi - \frac{\mu}{n}, 2k\pi + 2\pi - \frac{\mu}{n}\right]$; pour chacune desquelles ρ est d'ordre $k^{\frac{1}{n}}$.

Ici $\cos\theta_2$ tend vers o avec $\frac{1}{k}$ et les θ ont n limites distinctes, qui diffèrent d'environ $\frac{2\pi}{n}$.

8. Étude de l'équation (γ)

$$(\gamma) \qquad z\mathrm{L}z = x.$$

Nous supposons que $x = le^{it}$ a une valeur déterminée et nous nous proposons de montrer qu'il existe une branche z_k dont l'argument θ_k est compris dans l'intervalle $[t + 2(k-1)\pi, t + 2k\pi]$ quel que soit l'entier k. Nous rechercherons en outre vers quelles valeurs tendent θ_k et $\rho_k = |z_k|$ lorsque k croît indéfiniment.

En posant $z = \rho e^{i\theta}$, on a le système

$$\rho \log\rho \cos\theta - \rho\theta \sin\theta = l\cos t, \qquad \rho\log\rho\sin\theta + \rho\theta\cos\theta = l\sin t$$

dont on tire les relations

$$\rho\log\rho = l\cos(t-\theta), \qquad \rho\theta = l\sin(t-\theta)$$

et dont la résolution revient à chercher les racines de $\delta_1(\theta) = 0$, en posant

$$\alpha_1(\theta) = \frac{l\sin(t-\theta)}{\theta}, \qquad \beta_1(\theta) = e^{\theta\frac{\cos(t-\theta)}{\sin(t-\theta)}}, \qquad \delta_1(\theta) = \alpha_1(\theta) - \beta_1(\theta).$$

Considérons les variations de α_1 et β_1 lorsque θ varie dans un intervalle d'étendue 2π pour lequel on a $\alpha_1 \geqq 0$.

Si l'on suppose $\theta > 0$, on doit avoir $2n\pi + t + \pi < \theta < 2n\pi + t + 2\pi$.

Considérons les valeurs de α_1 et β_1 pour des valeurs θ' et θ'' voisines des extrémités de cet intervalle.

Pour $\theta'' = 2n\pi + t + 2\pi - \varepsilon$, α_1 est petit, β_1 est grand et l'on a $\delta_1(\theta'') < 0$.

Pour $\theta' = 2n\pi + t + \pi + \varepsilon$, α_1 est voisin de $\frac{l\varepsilon}{2n\pi + t + \pi}$ et β_1 de $e^{-\left(\frac{2n\pi + t + \pi}{\varepsilon}\right)}$.

On a donc $\delta_1(\theta') > 0$ pour ε assez petit et par suite, $\delta_1 = 0$ pour un nombre impair de valeurs de l'intervalle.

Ce nombre se réduit à 1 car, dans le cas contraire, le signe de δ'_1 ne serait pas le même pour toutes les racines, or

$$\frac{d\delta_1}{d\theta} = -l\left[\frac{\theta\cos(t-\theta) + \sin(t-\theta)}{\theta^2}\right] - \left[\frac{\cos(t-\theta)}{\sin(t-\theta)} + \frac{\theta}{\sin^2(t-\theta)}\right] e^{\theta\frac{\cos(t-\theta)}{\sin(t-\theta)}}$$

devient, si $\alpha_1 = \beta_1$,

$$\frac{d\delta_1}{d\theta} = -\frac{l}{\theta}\left[2\cos(t-\theta) + \frac{\sin(t-\theta)}{\theta} + \frac{\theta}{\sin(t-\theta)}\right].$$

Comme l'on a $\left|\sigma + \frac{1}{\sigma}\right| \geqq 2$, quel que soit σ, on voit, en posant $\sigma = \frac{\sin(t-\theta)}{\theta}$, que le signe du crochet est celui de $\sin(t-\theta)$, qui est $+$ dans tout l'intervalle considéré; on aurait donc $\delta'_1(\theta_i) < 0$, quelle que soit la racine θ_i.

Il en résulte $\delta_1 = 0$ pour une seule racine dans

$$[t + (2n+1)\pi,\ t + 2(n+1)\pi]$$

et, par suite dans $[t + 2n\pi,\ t + 2(n+1)\pi]$.

Il en est de même pour $\theta < 0$. En effet, à tout système de valeurs t_2 et $\theta^{\text{IV}} < 0$ correspond le système $t_1 = 2\pi - t_2$ et $\theta''' = -\theta^{\text{IV}}$ pour lequel α_1 et β_1 prennent les mêmes valeurs que pour le premier.

On a donc, quel que soit n, $\delta_1 = 0$ pour une seule racine θ dans tout intervalle $[t + 2n\pi,\ t + 2(n+1)\pi]$, sauf toutefois pour $[2\pi + t,\ t]$, qui contient la valeur 0 pour laquelle α_1 est discontinue.

Cet intervalle contient, par exception, deux racines θ de $\delta_1 = 0$.

Supposons, par exemple, $0 < t < \pi$.

L'intervalle $[t - 2\pi,\ t - \pi]$ est analogue à ceux déjà considérés, il contient donc une racine θ_{-1} de $\delta_1 = 0$.

Dans $[t - \pi,\ t]$, on a $\alpha_1 < 0$ entre $t - \pi$ et 0. On a ensuite, pour $\theta = \varepsilon$, α_1 grand positif, tandis que β_1 est voisin de 1, d'où $\delta_1(\varepsilon) > 0$; pour

$\theta = t - \varepsilon$, α_1 est voisin de o, tandis que β_1 est grand, d'où $\delta_1(t-\varepsilon) < 0$.

On a donc $\delta_1 = 0$ pour une valeur θ_0 de l'intervalle.

Il en est de même si l'on suppose $\pi < t < 2\pi$ dans $[t - 2\pi, 0]$ et $[t-\pi, t]$. Comme θ_k croît indéfiniment avec k, $\rho_k = \frac{l \sin(t-\theta_k)}{\theta_k}$ tend vers o et $\theta_k \frac{\cos(t-\theta_k)}{\sin(t-\theta_k)}$ doit tendre vers $-\infty$, il faut donc que

$$\cos(t-\theta_k) < 0.$$

En posant $\frac{\sin(t-\theta_k)}{\theta_k} = \eta$, $\cos(t-\theta_k) = \zeta$, $\delta_1(\theta_k) = 0$ donne $l\eta = e^{\frac{\zeta}{\eta}}$ ou $\zeta = \eta \log l + \eta \log \eta$, ce qui nécessite que ζ soit petit avec η; donc, si $0 < t < \pi$ et $\theta_k > 0$, θ_k tend vers $t + 2(k-1)\pi - \frac{\pi}{2}$, $\sin(t-\theta_k)$ devant être positif.

9. **Extension des résultats précédents à l'équation**

$$(\gamma') \qquad u^m \mathrm{L} u = y.$$

(γ') devient, en posant $u^m = z$, $my = x$, l'équation (γ).

Si $u = \tau e^{i\omega}$, on voit qu'aux racines $\theta_{mk+1}, \theta_{mk+2}, \ldots, \theta_{mk+m}$ de $\delta_1 = 0$ qui correspondent aux intervalles

$$[2mk\pi, 2mk\pi + 2\pi], \quad [2mk\pi + 2\pi, 2mk\pi + 4\pi], \quad \ldots,$$
$$[2mk\pi + 2(m-1)\pi, 2mk\pi + 2m\pi],$$

correspondent m racines ω_{k+1} dans $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$, qui diffèrent d'une quantité voisine de $\frac{2\pi}{m}$, puisque les racines θ diffèrent d'une quantité voisine de 2π.

D'autre part, τ_{k+1} est de l'ordre de $k^{-\frac{1}{m}}$, puisque les modules ρ sont de l'ordre de k^{-1}.

10. **Notations et définitions.** — Soient p, q, r les degrés respectifs des polynomes P, Q, R qui figurent dans

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathrm{PL}z + \mathrm{Q} = x\mathrm{R},$$

où

$$\mathrm{P} = a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p, \qquad \mathrm{Q} = b_0 + b_1 z + \ldots + b_q z^q,$$
$$\mathrm{R} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_r z^r;$$

nous poserons

$$a_j = |a_j| e^{i\sigma_j}, \qquad b_j = |b_j| e^{i\tau_j}, \qquad c_j = |c_j| e^{i\upsilon_j}.$$

Nous supposerons q différent de p et r, ce qui ne restreint pas la généralité, car si $q = p$, en posant $z = z' e^{-\frac{b_p}{a_p}}$, on a $q = p - 1$ dans la nouvelle relation (I) en z'.

De même, si $q = r$, il suffit de poser $x = x' + \frac{b_r}{c_r}$ pour avoir $q = r - 1$ dans la nouvelle relation en x'.

Plan $[k]$. — En posant $z = \rho e^{i\theta}$, nous dirons que z_k appartient au plan $[k]$ si l'on a $2(k-1)\pi \leqq \theta_k < 2k\pi$.

Surface (Σ). — Nous appellerons surface (Σ) la surface formée par l'ensemble des plans $[k]$, pour k variant de $-\infty$ à $+\infty$; le plan $[k]$ étant relié par le bord supérieur de l'axe réel positif au bord inférieur de l'axe réel positif du plan $[k+1]$.

Ordre. — Nous dirons que b est de l'ordre de a si $\left|\frac{b}{a}\right|$ demeure compris entre deux nombres fixes M_1 et M_2 non nuls quand $|a|$ croît indéfiniment ou tend vers o.

De même, b est d'ordre inférieur à a si $\left|\frac{b}{a}\right|$ tend vers o.

Points ζ *et* ξ. — Nous appellerons ζ les racines de l'équation (E), de forme (α), que nous rencontrerons au cours de l'étude de $\frac{dz}{dx}$,

$$\text{(E)} \qquad z(P'R - R'P)Lz + z(Q'R - R'Q) + PR = 0,$$

et nous désignerons par ξ les valeurs x qui leur correspondent lorsque l'on fait $z = \zeta$ dans (I).

Nous poserons, en général, $x = le^{it}$, $z = \rho e^{i\theta}$ et nous désignerons par η et η' les racines de $P = 0$ et $R = 0$.

11. **Démonstration fondamentale.** — Pour déterminer les racines de (I), nous utiliserons un calcul d'approximations que nous développerons de la manière suivante :

Soit z_0 une constante ou une racine d'une équation (β) ou (β'), γ ou (γ'), que nous formerons suivant la nature de la relation (I) et la

valeur particulière de x, de manière à annuler les termes prépondérants dans (I).

Nous écrirons (I) sous la forme

$$z = \varphi(z);$$

nous partirons de z_0 et nous formerons successivement

$$z_1 = \varphi(z_0), \qquad z_2 = \varphi(z_1), \qquad \ldots, \qquad z_{n+1} = \varphi(z_n).$$

Nous tracerons, de z_0 comme centre avec un rayon $\sigma\rho_0$, un cercle (c), σ étant assez petit pour que (c) ne renferme pas certains points qui sont singuliers pour $\varphi(z)$, et nous établirons la convergence des approximations en montrant que les z_n restent dans (c) quel que soit n si l'on a

1° $$|z_1 - z_0| < \frac{\sigma}{2}\rho_0,$$

2° $$|\varphi'_z| < \frac{1}{2},$$

quand z est dans (c).

Pour réaliser la première condition, nous écrirons $\varphi(z_0)$

$$\varphi(z_0) = z_0[1 + \psi(z_0)]^{\frac{1}{m}};$$

il faudra donc

$$|\varphi(z_0) - z_0| = \rho_0 \left|[1 + \psi(z_0)]^{\frac{1}{m}} - 1\right| < \frac{\sigma}{2}\rho_0,$$

ou

$$\left|[1 + \psi(z_0)]^{\frac{1}{m}} - 1\right| < \frac{\sigma}{2}.$$

Nous remplacerons cette inégalité par la suivante :

$$|\psi(z_0)|^{\frac{1}{m}} < \frac{\sigma}{2},$$

en établissant au préalable l'inégalité $(\mathcal{J})$

$(\mathcal{J})$ $$\left|[1 + \alpha]^{\frac{1}{m}} - 1\right| \leqq |\alpha|^{\frac{1}{m}},$$

vérifiée pour $|\alpha|$ assez petit et $m \geqq 1$.

Si $|1+\alpha|>1$, on a évidemment

$$|1+\alpha|^{\frac{1}{m}} \leqq (1+|\alpha|)^{\frac{1}{m}} < 1+|\alpha|^{\frac{1}{m}},$$

d'où ($\mathcal{J}$), puisque le premier membre est supérieur à 1.

Si $|1+\alpha|<1$, posons $1-[1+\alpha]^{\frac{1}{m}}=v$; il vient

$$1+\alpha = 1 - mv + \frac{m(m-1)}{2}v^2 - \ldots \qquad \text{et} \qquad |\alpha| = |mv|\left|1 - \frac{(m-1)}{2}v + \ldots\right|.$$

Comme $|v|$ est petit avec $|\alpha|$, on peut écrire $\left|1 - \frac{(m-1)}{2}v + \ldots\right| > 1-\varepsilon$, ε étant petit avec $|v|$, il en résulte $|\alpha| > |mv|(1-\varepsilon)$ ou enfin

$$|v| < \frac{1}{(1-\varepsilon)}\frac{|\alpha|}{m} < \gamma|\alpha|^{\frac{1}{m}}, \qquad \left|1-[1+\alpha]^{\frac{1}{m}}\right| < \gamma|\alpha|^{\frac{1}{m}}.$$

Nous poserons pour notre démonstration $\psi(z_0)=\alpha$ et nous devrons établir que $|\psi|(z_0)$ tend vers o si z_0 est déterminé par des conditions initiales convenablement choisies.

On déduit de l'égalité

$$z_{n+1} - z_n = \varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1}) = \int_{z_{n-1}}^{z_n} \varphi'_z\, dz$$

l'inégalité

$$|z_{n+1} - z_n| < |z_n - z_{n-1}| \max|\varphi'_z| \qquad \text{le long de } z_{n-1}z_n.$$

Soit $N<1$ le maximum de $|\varphi'_z|$ dans (C). Comme l'on a

$$|z_{n+1} - z_0| < |z_{n+1} - z_n| + |z_n - z_{n-1}| + \ldots + |z_2 - z_1| + |z_1 - z_0|$$

il en résulte

$$|z_{n+1} - z_0| < \frac{|z_1 - z_0|}{1-N}.$$

En particulier, si la seconde condition est remplie, c'est-à-dire si l'on a $|\varphi'_z| < N < \frac{1}{2}$, il résultera

$$|z_{n+1} - z_0| < 2|z_1 - z_0| < \sigma\rho_0,$$

qui montre que z_{n+1} sera dans (C) quel que soit n.

Comme $|z_{n+1} - z_n|$ tend vers o avec $\frac{1}{n}$, les z_n ont un point limite Z dans (C).

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DES BRANCHES z POUR UNE VALEUR x QUELCONQUE.

12. Détermination des branches z_k qui restent bornées quand k croît indéfiniment. — Supposons d'abord $a_0 \neq 0$.

Nous supposons x quelconque, mais distinct des p valeurs $x_i = \frac{Q(\eta_i)}{R(\eta_i)}$, η_i étant l'une des racines de $P = 0$. Pour une telle valeur, $z_{k_i} = \eta_i$ vérifie (I). Lorsque k croît, il en est de même de $|Lx| = \sqrt{(\log\rho)^2 + \theta^2}$, tandis que $|xR - Q|$ reste borné si ρ est borné. Il faut donc que $|P(z)|$ tende vers 0, c'est-à-dire que les z_{k_i} soient voisins de η_i.

Proposons-nous de déterminer une branche z_{k_i} voisine de η_i, en négligeant d'écrire les indices k et i dans ce qui suit.

Pour la marche, analogue à celle du paragraphe **11**, nous prendrons $z_0 = \eta$, c'est-à-dire $\rho_0 = |\eta|$, $\theta_0 = \arg\eta + 2(k-1)\pi$, avec $0 < \arg < 2\pi$.

Posons, si η est racine d'ordre m de $P = 0$, $P = (z - \eta)^m S$, il vient

$$z = z_0 + \left[\frac{xR - Q}{SLz}\right]^{\frac{1}{m}} = \varphi(z).$$

Supposons le rayon δ du cercle (C) de centre z_0 assez petit pour que (C) ne renferme pas l'origine, ni aucune racine de $xR - Q$, ni aucun homologue d'une autre racine η.

On a, pour la condition 2° (§ **11**),

$$\varphi'_z = \frac{1}{m}\left[\frac{xR' - Q'}{SLz} - \frac{(xR - Q)(zS'Lz + S)}{zS^2(Lz)^2}\right]\left[\frac{xR - Q}{SLz}\right]^{\frac{1}{m}-1};$$

le module du premier crochet est de l'ordre de $|Lz|^{-1}$, celui du second, de l'ordre de $|Lz|^{1-\frac{1}{m}}$, par suite $|\varphi'_z|$ est de l'ordre de $|Lz|^{-\frac{1}{m}}$ et comme $|Lz| > 2(k-1)\pi$, on a, dans (C), pour $|k| > k'_0$ assez grand, $|\varphi'_z| < \frac{1}{2}$.

On a, pour la condition 1° (§ **11**), si $m = 1$,

$$|z_1 - z_0| = \left|\frac{x\mathrm{R}(z_0) - \mathrm{Q}(z_0)}{\mathrm{S}(z_0)\mathrm{L}z_0}\right|,$$

et, comme δ est ici indépendant de k, on a, si $|k| > k''_0$ assez grand,

$$|z_1 - z_0| < \frac{\delta}{2}.$$

Si $m > 1$, les m points $z_1 = \varphi(z_0)$ qui résultent des m déterminations du crochet sont les sommets d'un polynome régulier de centre z_0, distants entre eux de $2d = 2|z_1 - z_0| \sin\frac{\pi}{m}$. Pour une détermination φ_h de $\varphi(z_0)$, on peut tracer un cercle (C′) de centre Z_{1h} et de rayon $d = |z_1 - z_0| \sin\frac{\pi}{m}$ et déterminer k''_0 tel que pour $|k| > k''_0$, l'on ait $|z_1 - z_0| < \frac{\delta}{2}$, de sorte que (C′) soit contenu dans (C).

En désignant par $\mathrm{N} < 1$ le maximum de $|\varphi'_z|$ dans (C), on a

$$|z_{n+1} - z_0| < |z_1 - z_0|[\mathrm{N} + \mathrm{N}^2 + \ldots + \mathrm{N}^n] < |z_1 - z_0| \frac{\mathrm{N}}{1 - \mathrm{N}}.$$

Si $\mathrm{N} < \dfrac{\sin\frac{\pi}{m}}{1 + \sin\frac{\pi}{m}}$, on a $\dfrac{\mathrm{N}}{1 - \mathrm{N}} < \sin\frac{\pi}{m}$, et z_{n+1} est dans (C′), quel que soit n. On peut encore déterminer k'_0 tel que pour $|k| > k'_0$, l'on ait dans (C), et par suite aussi dans (C′), $|\varphi'_z| < \mathrm{N}$.

En partant des m points z_1, nous déterminerons ainsi m branches Z limites des z_n, chacune dans un cercle (C′) contenu dans (C).

En opérant ainsi pour les p racines η, quand $|k| > \mathrm{K}_0$, lui-même supérieur aux différents k'_0 et k'_0 qui leur correspondent; *nous déterminerons, sur tout plan* $[k]$ *p branches* Z *voisines des* η.

13. Nous allons compléter le calcul précédent dans le cas où $a_m \neq 0$, mais $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$, afin de déterminer les branches voisines de l'origine.

Comme nous ne pouvons prendre $z_0 = 0$ comme valeur initiale, nous partirons, en posant $y = \dfrac{c_0 x - b_0}{a_m}$, de l'une des racines, sur le plan $[k]$, de l'équation (γ'),

$$z_0^m \mathrm{L}z_0 = y,$$

qui, d'après le paragraphe 9, admet m racines voisines de o et dont le module ρ_0 est d'ordre $k^{-\frac{1}{m}}$.

Posons

$$P = z^m(a_m + a_{m+1}z + \ldots + a_p z^{p-m}) = z^m S$$

et écrivons (I)

$$z^m L z = \frac{c_0 x - b_0 + z[c_1 x - b_1 + z(c_2 x - b_2) + z^2(c_3 x - b_3) + \ldots]}{a_m + a_{m+1}z + \ldots + a_p z^{p-m}},$$

et, en posant

$$A = a_{m+1} + \ldots + a_p z^{p-m-1},$$

$$B = [c_1 x - b_1 + z(c_2 x - b_2) + z^2(c^2 x - b_3) + \ldots],$$

$$z^m L z = \frac{c_0 x - b_0}{a_m} + \frac{z[a_m B - A(c_0 x - b_0)]}{a_m(a_m + zA)},$$

dont on tire, en posant $\chi(z) = \dfrac{[a_m B - A(c_0 x - b_0)]}{a_m(a_m + zA)}$,

$$z = \left[\frac{y + z\chi(z)}{Lz}\right]^{\frac{1}{m}} = \varphi(z).$$

On a

$$z_0 = \left[\frac{y}{Lz_0}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad z_1 = \left[\frac{y + z_0\chi(z_0)}{Lz_0}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad \ldots, \qquad z_{n+1} = \left[\frac{y + z_n\chi(z_n)}{Lz_n}\right]^{\frac{1}{m}},$$

ce qui donne

$$|z_1 - z_0| = \left|\frac{y}{Lz_0}\right|^{\frac{1}{m}} \left|\left[1 + \frac{z_0\chi(z_0)}{y}\right]^{\frac{1}{m}} - 1\right| = \rho_0 \left|\left[1 + \frac{z_0\chi(z_0)}{y}\right]^{\frac{1}{m}} - 1\right|.$$

La quantité $\psi(z_0)$ du paragraphe 11 est ici $\dfrac{z_0\chi(z_0)}{y}$.

Comme ρ_0 est petit, $\chi(z_0)$ est voisine de $\chi(o)$, c'est-à-dire de

$$\frac{B(o) - yA(o)}{a_m} = \frac{x(a_m c_1 - a_{m+1}c_0) - (a_m b_1 - a_{m+1}b_0)}{a_m^2},$$

donc $|\psi(z_0)|$ est de l'ordre de ρ_0 et, d'après l'inégalité ($\mathcal{J}$), $|z_1 - z_0|$ est d'ordre inférieur ou égal à $\rho_0^{1+\frac{1}{m}}$.

Nous savons, d'après 9 que les θ_0 du plan $[k]$ diffèrent d'environ $\dfrac{2\pi}{m}$, nous pouvons donc, de chaque z_0 comme centre, décrire un cercle (C') de rayon δ' ne contenant pas d'autre z_0, tel que l'on ait $\delta' \geqq 2|z_1 - z_0|$, la distance de deux z_0 étant de l'ordre de ρ_0.

On peut donc supposer $2|z_1 - z_0| < \delta' < \frac{\rho_0}{2}$ et par suite, pour z dans (C′),

$$\frac{1}{2}\rho_0 < \rho < \frac{3}{2}\rho_0.$$

Considérons

$$\varphi'_z = \frac{1}{m}\left[\frac{\chi + z\chi'}{\mathrm{L}z} - \frac{(y + z\chi)}{z(\mathrm{L}z)^2}\right]\left[\frac{y + z\chi}{\mathrm{L}z}\right]^{\frac{1}{m}-1}$$

$$= \frac{1}{m}\left[x + z\chi' - \frac{(y + z\chi)}{z\mathrm{L}z}\right]\left[\frac{1}{y + z\chi}\right]^{1-\frac{1}{m}}[\mathrm{L}z]^{-\frac{1}{m}}.$$

Supposons $m > 1$.

Comme $|\mathrm{L}z|$ est d'ordre k_1, $|z\mathrm{L}z|$ est d'ordre $k^{1-\frac{1}{m}}$. D'autre part, $(y + z\chi)$ est voisine de y et par suite $\left|\chi + z\chi' - \frac{(y + z\chi)}{z\mathrm{L}z}\right| |y + z\chi|^{\frac{1}{m}-1}$ est borné et, à cause du facteur $[\mathrm{L}z]^{-\frac{1}{m}}$, on a, pour k assez grand, $|\varphi'_z| < \frac{1}{2}$.

Supposons $m = 1$.

Ici $|z_1 - z_0| = \rho_0\left|\frac{z_0\chi(z_0)}{\mathrm{L}z_0}\right|$ est d'ordre inférieur à ρ_0^2; d'autre part $|z\mathrm{L}z|$ dans (C′) est voisin de $|z_0\mathrm{L}z_0| = |y|$ et, par suite $|\varphi'_z|$, tend encore vers o avec $\frac{1}{k}$.

On a donc m branches Z *limites des* z_n *et voisines de l'origine.*

14. **Déterminations des branches qui ne restent pas bornées quand** k **croît et qui existent lorsque** p **n'est pas le plus grand des nombres** p, q, r. — On peut poser, pour une valeur x déterminée,

$$x\mathrm{R} - \mathrm{Q} = \mathrm{S} = d_s z^s + d_{s-1}z^{s-1} + \ldots + d_1 z + d_0$$

et écrire (I), en posant $s - p = n$ et divisant par $d_s z^p$

$$z^n = \frac{a_p}{d_s}\mathrm{L}z + \frac{1}{d_s}\left(\frac{a_{p-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^p}\right)\mathrm{L}z - \frac{1}{d_s}\left(d_{s-1}z^{n-1} + \ldots + \frac{d_0}{z^p}\right)$$

et, en posant encore

$$\lambda' = \frac{a_p}{d_s}, \qquad \mathrm{A} = \frac{1}{d_s}\left(\frac{a_{p-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^p}\right), \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{d_s}\left(d_{s-1}z^{n-1} + \ldots + \frac{d_0}{z^p}\right),$$

$$z^n = \lambda'\mathrm{L}z + \mathrm{A}\mathrm{L}z - \mathrm{B}, \qquad z = [\lambda'\mathrm{L}z + \mathrm{A}\mathrm{L}z - \mathrm{B}]^{\frac{1}{n}} = \varphi(z).$$

Soit z_0 une racine de l'équation (β')

$$z_0^n - \lambda' L z_0 = 0.$$

Formons

$$z_1 = [\lambda' L z_0 + A(z_0) L z_0 - B(z_0)]^{\frac{1}{n}}, \quad \ldots, \quad z_{n+1} = [\lambda' L z_n + A(z_n) L z_n - B(z_n)]^{\frac{1}{n}}.$$

Considérons

$$z_1 - z_0 = z_0 \left[\left[1 + \frac{A(z_0) L z_0 - B(z_0)}{\lambda' L z_0} \right]^{\frac{1}{n}} - 1 \right].$$

On a ici $|\psi(z_0)| = \left| \frac{A(z_0)}{\lambda'} - \frac{B(z_0)}{\lambda' L z_0} \right|$ au plus de l'ordre de ρ_0^{-1}; on peut donc écrire, M étant fixe et ne dépendant que des coefficients a et d,

$$|z_1 - z_0| < M \rho_0^{1-\frac{1}{n}}.$$

D'autre part

$$\varphi'_z = \frac{1}{n} \left[\frac{\lambda' + A}{z} + A' L z - B' \right] [\lambda' L z + A L z - B]^{\frac{1}{n}-1}.$$

Dans un cercle (C') de centre z_0 et de rayon $\sigma\rho_0$, où $\sigma < \sigma_0 < 1$, $|Lz|$ est de l'ordre de $|L z_0|$, c'est-à-dire de ρ_0^n; par suite, le module du premier crochet est d'ordre ρ_0^{n-2}, tandis que celui du second est d'ordre ρ_0^{1-n}; $|\varphi'_z|$ est donc d'ordre ρ_0^{-1} et l'on a, pour ρ_0 assez grand, $|\varphi'_z| < N < 1$. Il en résulte

$$|z_{n+1} - z_0| < \frac{|z_1 - z_0|}{1 - N} < \frac{M \rho_0^{1-\frac{1}{n}}}{1 - N},$$

et, pour avoir $|z_{n+1} - z_0| < \sigma\rho_0$, il suffit que $\rho_0^{\frac{1}{n}} > \frac{M}{\sigma(1 - N)}$.

Il en est ainsi pour k assez grand, puisque ρ_0 croît comme $k^{\frac{1}{n}}$.

Ainsi, pour $r > p$ ou $q > p$, on a, sur le plan $[k]$, $(s - p)$ branches z_k, s étant le plus grand des entiers r et q; ce qui donne, avec les p branches bornées, s branches. Si $p \geqq s$, on a p branches bornées.

Dans tous les cas, le nombre des branches est le plus grand des entiers p, q, r.

Ce qui précède n'est valable que pour $|k| > K$, K étant un entier ne dépendant que de x et des coefficients de P, Q, R.

Remarque. — Nous pouvons résoudre d'une manière générale, c'est-à-dire pour k assez grand, par une suite d'approximations, les équations (β) et (γ).

$$(\beta) \qquad z = \mathrm{L}z + x = \varphi_1(z).$$

Formons $z_{n+1} = \varphi_1(z_n)$, en prenant

$$\mathrm{L}x = \log|x| + i[t + 2(k-1)\pi] \qquad \text{et} \qquad z_0 = \mathrm{L}x + x,$$

ce qui donne

$$\left|\frac{z_1 - z_0}{z_0}\right| = \left|\frac{\mathrm{L}z_0 + x - \mathrm{L}x - x}{\mathrm{L}x + x}\right| = \left|\frac{\mathrm{L}z_0 - \mathrm{L}x}{\mathrm{L}x + x}\right|.$$

En prenant

$$\mathrm{L}z_0 = \log|z_0| + i \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathcal{I}(z_0)}{\mathcal{R}(z_0)}\right) + i2(k-1)\pi,$$

le module du numérateur est de l'ordre de $\log k$, tandis que le dénominateur est de l'ordre de k.

D'autre part $|\varphi'_1| = \left|\frac{1}{z}\right|$ est, dans le voisinage de z_0, de l'ordre de $\frac{1}{k}$, ce qui assure la convergence

$$(\gamma) \qquad z = \frac{x}{\mathrm{L}z} = \varphi_2(z).$$

Prenons ici $z_0 = \frac{x}{\mathrm{L}x}$ et encore $\mathrm{L}x = \log|x| + i[t + 2(k-1)\pi]$. On a

$$\left|\frac{z_1 - z_0}{z_0}\right| = \left|x\left[\frac{1}{\mathrm{L}z_0} - \frac{1}{\mathrm{L}x}\right] : \frac{x}{\mathrm{L}x}\right| = \left|\frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}z_0} - 1\right| = \left|\frac{\mathrm{L}x - \mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z_0}\right|,$$

en prenant encore

$$\mathrm{L}z_0 = \log|z_0| + i \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathcal{I}(z_0)}{\mathcal{R}(z_0)}\right) + i2(k-1)\pi,$$

on voit que le module du numérateur est encore de l'ordre de $\log|z_0|$, c'est-à-dire de $\log k$, tandis que $|\mathrm{L}z_0|$ est de l'ordre de k.

D'autre part $|\varphi'_2| = \left|\frac{-x}{z(\mathrm{L}z)^2}\right|$.

Or, dans le voisinage de z_0, $\left|\frac{x}{z}\right|$ est de l'ordre de $\left|\frac{x}{z_0}\right| = |\mathrm{L}x|$, qui est de l'ordre de k, ainsi d'ailleurs que $|\mathrm{L}z|$.

Par suite $|\varphi'_2|$ est encore de l'ordre de $\frac{1}{k}$, ce qui assure la convergence.

15. **Absence d'autres branches distinctes des Z.** — Nous voulons établir maintenant qu'il n'existe pas de branches z' distinctes des branches Z, obtenues dans les paragraphes 12, 13 et 14 par approximations à partir d'une valeur initiale z_0.

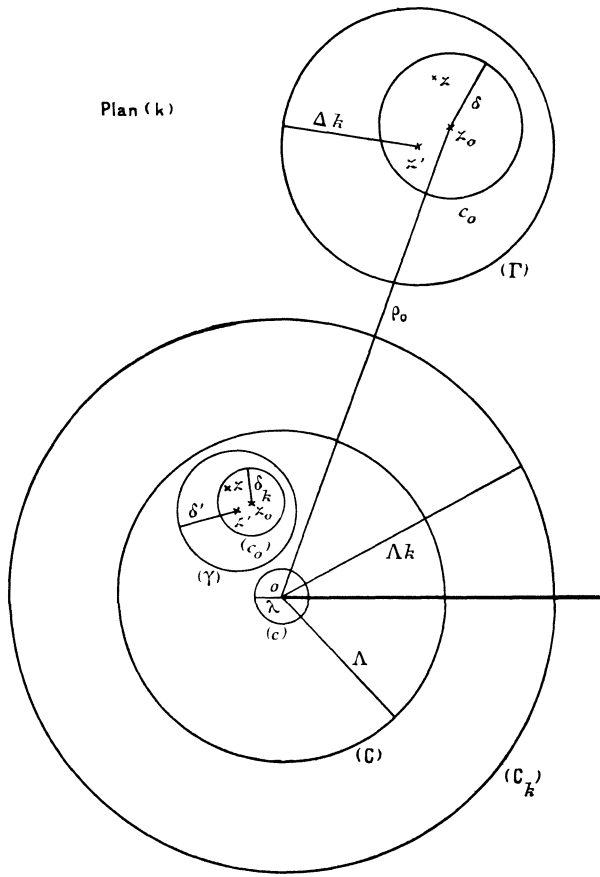

Fig. 8.

Pour les racines Z grandes avec k, nous montrerons dans les paragraphes 17 et 18 que :

1° *Pour toute racine z', il y a une valeur initiale z_0 telle que l'on ait $|z' - z_0| < \delta$, δ étant indépendant de k (mais non de x);*

2° *Comme on a de même $|Z - z_0| < \delta$, il en résulte $|z' - Z| < 2\delta$;*

3° *On peut décrire un cercle* (Γ) *de centre* z' *et de rayon* Δ_k *tel que* z' *soit la seule racine de* (I) *dans* (Γ);

4° *Comme* Δ_k *croît comme une puissance de* k, *on a* $\Delta_k > 2\delta$ *pour* k *assez grand*, Z *étant alors dans* (Γ) *doit se confondre avec* z'.

Pour les racines Z qui restent bornées, nous montrerons, dans les paragraphes 20, 21 et 22, que :

1° *Pour toute racine* z', *il y a une valeur initiale* z_0 *telle que l'on ait* $|z' - z_0| < \delta_k$. δ_k *tendant vers* o *avec* $\frac{1}{k}$, (x *étant fixe*);

2° *On a de même* $|Z - z_0| < \delta_k$, *d'où* $|z' - Z| < 2\delta_k$;

3° *On peut décrire un cercle* (γ) *de centre* z' *et de rayon* δ' *supérieur à un nombre fixe non nul indépendant de* k (*mais non de* x), *tel que* z' *soit la seule racine de* (I) *dans* (γ);

4° *Comme* δ_k *tend vers* o, *on a* $\delta' > 2\delta_k$ *pour* k *assez grand;* Z *étant alors dans* (γ) *doit se confondre avec* z'.

Enfin, dans les paragraphes 23, 24 et 25, nous considérerons le cas des racines voisines de o, qui demande une discussion plus détaillée, mais pour lesquelles on a un résultat analogue.

16. La démonstration suppose, dans le premier cas, que $\rho' = |z'|$ est supérieur à un nombre Λ_k fonction de k et de x, et dans le second cas, que ρ' est inférieur a un nombre Λ seulement fonction de x. Nous allons donc montrer d'abord que l'on peut tracer deux cercles (C_k) et (C) de centre O et de rayons Λ_k et Λ_1 tels que (I) n'ait pas de racines entre (C_k) et (C) quand k dépasse un certain nombre H.

Soit ρ_{0k} le module de la plus petite racine de l'équation auxiliaire (β') et m un nombre fixe supérieur à 1. Posons $\Lambda_k = \frac{\rho_{0k}}{m}$ et écrivons (I)

$$a_p z^p \mathrm{L}z - d_s z^s = - a_{p-1} z^{p-1} \mathrm{L}z \left(1 + \frac{a_{p-2}}{a_{p-1} z} + \ldots\right)$$
$$+ d_{s-1} z^{s-1} \left(1 + \frac{d_{s-2}}{d_{s-1} z} + \ldots\right) = g(z).$$

Nous désignerons, pour $\rho > \Lambda$, les modules des parenthèses par $(1 + \varepsilon)$ et $(1 + \varepsilon')$ et encore par n la différence $s - p$, supposée positive.

Évaluons une limite inférieure du module du premier membre, on a

$$|a_p z^p \mathrm{L}z - d_s z^s| > |a_p| \rho^p \left[|\mathrm{L}z| - \left|\frac{d_s}{a_p}\right| \rho^n\right] > |a_p| \rho^p \left[|\mathrm{L}z| - \left|\frac{d_s}{a_p}\right| \frac{\rho_0^n}{m^n}\right],$$

pour z entre (C_k) et (C), $|Lz|$ étant voisin de $\left|\frac{d_s}{a_p}\right|\rho_0^n$, d'après l'inégalité

$$2(k-1)\pi < |Lz| < 2k\pi + \log\Lambda_k.$$

On a, d'autre part, d'après **7** et **14**,

$$\rho_0'' = \rho_1 = \rho_2 e^{\lambda} = \frac{(\theta_2+\mu)}{\sin\theta_2} e^{\lambda} = \frac{|\lambda'|}{n}\frac{(\theta_2+\mu)}{\sin\theta_2} = \frac{1}{n}\left|\frac{a_p}{d_s}\right|\frac{(\theta_2+\mu)}{\sin\theta_2}$$

et

$$\theta_2 + \mu < 2kn\pi + 2\pi.$$

On peut poser $|\sin\theta_2| = 1 - \eta_k$, η_k tendant vers o avec $\frac{1}{k}$, ce qui donne

$$(\text{A}) \qquad \left|\frac{d_s}{a_p}\right|\rho_0'' < \frac{2(k+1)\pi}{1-\eta_k};$$

il en résulte

$$|a_p z^p Lz - d_s z^s| > 2(k-1)\pi\,|a_p|\,\rho^p\left[1 - \frac{\left(1+\frac{2}{k-1}\right)}{m^n(1-\eta_k)}\right].$$

D'autre part, on peut écrire pour le second membre $g(z)$

$$\begin{aligned}|g(z)| &< \rho^p\left[|a_{p-1}|\frac{|Lz|}{\rho}(1+\varepsilon) + |d_{s-1}|\rho^{n-1}(1+\varepsilon')\right]\\ &< \frac{\rho^p}{\Lambda}\left\{|a_{p-1}|(1+\varepsilon)\left[2k\pi + \log\frac{\rho_0}{m}\right] + |d_{s-1}|(1+\varepsilon')\rho^n\right\}\end{aligned}$$

et, en utilisant encore les inégalités (A) et $\rho < \frac{\rho_0}{m}$, on a

$$\begin{aligned}|g(z)| < |a_p|\frac{\rho^p}{\Lambda}2(k-1)\pi\Bigg\{&\left|\frac{a_{p-1}}{a_p}\right|(1+\varepsilon)\left[1+\frac{1}{k-1}+\frac{\log\frac{\rho_0}{m}}{2(k-1)\pi}\right]\\ &+\left|\frac{d_{s-1}}{d_s}\right|\frac{(1+\varepsilon')}{m^n(1-\eta_k)}\left(1+\frac{2}{k-1}\right)\Bigg\};\end{aligned}$$

l'égalité est impossible si

$$\begin{aligned}1-\frac{\left(1+\frac{2}{k-1}\right)}{m^n(1-\eta_k)} > \frac{1}{\Lambda}\Bigg\{&\left|\frac{a_{p-1}}{a_p}\right|(1+\varepsilon)\left[1+\frac{1}{k-1}+\frac{\log\frac{\rho_0}{m}}{2(k-1)\pi}\right]\\ &+\left|\frac{d_{s-1}}{d_s}\right|\frac{(1+\varepsilon')}{m^n(1-\eta_k)}\left(1+\frac{2}{k-1}\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Comme ρ_0 est d'ordre $k^{\frac{1}{n}}$, pour $k > H'$ assez grand, le crochet est

inférieur à un nombre fixe Λ' (qui peut toutefois dépendre de x), et si l'on a $\Lambda > \Lambda' : \left(1 - \frac{1}{m''}\right)$, l'inégalité est vérifiée; à condition toutefois d'avoir

$$\Lambda < \Lambda_k = \frac{\rho_0}{m}.$$

On peut prendre H'' tel que, pour $k > H''$, cette dernière inégalité soit vérifiée, puisque ρ_0 est d'ordre $k^{\frac{1}{n}}$. Il en résulte finalement que pour k supérieur à H' et H', (I) n'a pas de racines entre (C) et (C_k).

17. Considérons les racines z' telles que $\rho' > \Lambda_k = \frac{\rho_0}{2}$, en faisant $m = 2$. Nous voulons montrer d'abord que, pour toute racine z', on a une racine z_0 telle que $|z' - z_0| < \delta$, indépendant de k.

Supposons d'abord $n = 1$.

Considérons (I) sous la forme du paragraphe **14**, avec les mêmes notations

$$z'^n - \lambda' L z' - \Lambda L z' + B = 0.$$

Ici $|B|$ et $|\Lambda L z'|$ restent bornés, car on a $|L z'| < 2k\pi + \log\rho'$ et $\rho' > \frac{\rho_0}{2}$, qui est de l'ordre de k, puisque $n = 1$.

Posons $\Lambda L z' - B = \alpha e^{i\sigma}$, $\lambda' = \lambda_1 e^{i\omega}$, $z' = \rho' e^{i\theta'}$; (I) devient

$$\rho'(\cos\theta' + i\sin\theta') = \lambda_1(\cos\omega + i\sin\omega)(\log\rho' + i\theta') + \alpha(\cos\sigma + i\sin\sigma),$$

qui donne, par un calcul analogue à celui de (β), le système

$$\rho' = \frac{\lambda_1\theta' + \alpha\sin(\sigma - \omega)}{\sin(\theta' - \omega)} = e^{\frac{\lambda_1\theta'\cos(\theta' - \omega) - \alpha\sin(\theta' - \sigma)}{\lambda_1\sin(\theta' - \omega)}}$$

On voit que α restant borné, $\cos(\theta' - \omega)$ doit encore être de plus en plus petit pour la racine θ', quand θ' croît avec k. Il en résulte que θ' et ρ' sont respectivement voisins de $2(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} + \omega$ et $\lambda_1\theta' + \alpha\sin(\sigma - \omega)$. D'autre part, ρ_0 et θ_0 qui vérifient

$$\rho_0 = \frac{\lambda_1\theta_0}{\sin(\theta_0 - \omega)} = e^{\theta_0\frac{\cos(\theta_0 - \omega)}{\sin(\theta_0 - \omega)}}$$

sont respectivement voisins de $2(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} + \omega$ et $\lambda_1\theta_0$.

Posons

$$\theta' = 2(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon', \qquad \theta_0 = 2(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon_0;$$

on peut écrire

$$\frac{\theta'(\varepsilon' - \ldots)}{1 - \ldots} = \frac{\alpha \sin(\theta' - \sigma)}{\lambda_1(1 - \ldots)} + \log[\lambda_1 \theta' + \alpha \sin(\sigma - \omega)] - \log(1 - \ldots),$$

$$\frac{\theta_0(\varepsilon_0 - \ldots)}{1 - \ldots} = \log(\lambda_1 \theta_0) - \log(1 - \ldots)$$

qui montrent que ε' et ε_0 sont de l'ordre de $\frac{\log\theta'}{\theta'}$ et $\frac{\log\theta_0}{\theta_0}$ ou $\frac{\log k}{k}$; or

$$\rho' - \rho_0 = \alpha \frac{\sin(\sigma - \omega)}{1 - \frac{\varepsilon'^2}{2} + \ldots} + \lambda_1 \left[\frac{\theta'}{1 - \frac{\varepsilon'^2}{2} + \ldots} - \frac{\theta_0}{1 - \frac{\varepsilon_0^2}{2} + \ldots} \right];$$

le premier terme reste borné et le coefficient de λ_1 peut s'écrire

$$\theta'\left[1 + \frac{\varepsilon'^2}{2} + \ldots\right] - \theta_0\left[1 + \frac{\varepsilon_0^2}{2} + \ldots\right] = \varepsilon' - \varepsilon_0 + \theta' \frac{\varepsilon'^2}{2} - \theta_0 \frac{\varepsilon_0^2}{2} + \ldots$$

et, au plus, est de l'ordre de $\frac{(\log k)^2}{k}$.

Donc $\rho' - \rho_0$ reste borné et comme $\theta' - \theta_0$ tend vers o, $|z' - z_0|$ reste borné.

Supposons maintenant $n > 1$.

Si nous joignons z' à tous les z_0 du plan $[k]$, il existe au moins une droite $z'z_0$ pour laquelle le segment $\overline{z'z_0}$ ne contient pas l'origine, puisque les θ_0 diffèrent d'environ $\frac{2\pi}{n}$; la différence $(\theta' - \theta_0)$ ne sera donc pas voisine de π pour un z_0 au moins.

Supposons $\rho' > \rho_0$.

On a, en retranchant $z'^n - \lambda' \mathrm{L} z' = \mathrm{AL} z' - \mathrm{B}$ et $z_0^n - \lambda' \mathrm{L} z_0 = 0$ et divisant par z'^n,

$$1 - \left(\frac{z_0}{z'}\right)^n = -\frac{d_{s-1}}{d_s z'} - \ldots + \frac{1}{z'^n}(\lambda' \mathrm{L} z' - \lambda' \mathrm{L} z_0 + \mathrm{AL} z').$$

Désignons le second membre par $\beta e^{i\tau}$, β est de l'ordre de ρ'^{-1}, car

$$\frac{|\mathrm{L} z' - \mathrm{L} z_0|}{\rho'^n} = \frac{1}{\rho'^n} |\log\rho' - \log\rho_0 + i(\theta' - \theta_0)| < \frac{1}{\rho'^n} [\log\rho' + \log\rho_0 + 2\pi]$$

est d'ordre inférieur à ρ'^{-1}. Pour le terme $\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{L}\,z'}{z'^n}$, $|\mathrm{L}\,z'| < 2k\pi + \log\rho'$ et $\rho'^n > \rho_0^n$ qui est d'ordre k montrent que $\left|\frac{\mathrm{L}\,z'}{z'^n}\right|$ est borné, tandis que $|\mathrm{A}|$ est d'ordre ρ'^{-1}.

Donc $\left|\frac{z_0}{z'}\right| = \frac{\rho_0}{\rho'}$ est voisin de 1 et l'on peut poser $\rho_0 = \rho'(1-\varepsilon_1)$, $n(\theta_0 - \theta') = \omega_1$, ce qui donne

$$1 - \left(\frac{z_0}{z'}\right)^n = 1 - (1-\varepsilon_1)^n e^{i\omega_1} = \beta(\cos\tau + i\sin\tau)$$

et le système

$$1 - \cos\omega_1[1 - n\varepsilon_1 + \ldots] = \beta\cos\tau. \qquad -\sin\omega_1[1 - n\varepsilon_1 + \ldots] = \beta\sin\tau.$$

La seconde relation montre que ω_1, qui ne peut être voisin de π, est petit et d'ordre ρ'^{-1}; la première montre que ε_1 est aussi de l'ordre de ρ'^{-1}. On a donc, en désignant par m_1 un nombre borné indépendant de k

$$\rho' = \frac{\rho_0}{1-\varepsilon_1} = \rho_0[1 + \varepsilon_1 + \ldots] = \rho_0 + m_1.$$

D'autre part, $\rho'\sin(\theta' - \theta_0)$ reste fini, car $\theta_0 - \theta' = \frac{\omega_1}{n}$ est aussi d'ordre ρ'^{-1}.

Par conséquent $|z' - z_0| < \rho' - \rho_0 + \rho'\sin(\theta' - \theta_0)$ reste borné.

Supposons $\rho' < \rho_0$.

On peut écrire ici, en divisant par z_0^n,

$$\left(\frac{z'}{z_0}\right)^n - 1 = -\frac{1}{z_0}\left[\frac{d_{s-1}}{d_s}\left(\frac{z'}{z_0}\right)^{n-1} + \ldots\right] + \frac{1}{z_0^n}[\lambda'(\mathrm{L}\,z' - \mathrm{L}\,z_0) + \mathrm{A}\,\mathrm{L}\,z'].$$

On voit de même que le module du second membre est d'ordre ρ_0^{-1}, que $\frac{\rho'}{\rho_0}$ est voisin de 1 et que $(\theta' - \theta_0)$ est d'ordre ρ_0^{-1}, ce qui entraîne que $\rho_0\sin(\theta' - \theta_0)$ reste borné, ainsi que $|z' - z_0| < \rho_0 - \rho' + \rho_0\sin(\theta' - \theta_0)$.

On a donc $|z' - z_0| < \delta$, δ étant indépendant de k (mais non de x).

Comme nous n'avons fait sur z' d'autre hypothèse que d'être une racine de (I) pour laquelle $\rho' > \Lambda_k$, Z est aussi une racine z' et vérifie aussi l'inégalité $|\mathrm{Z} - z_0| < \delta$.

Par suite z' et Z sont dans un cercle de centre z_0 et de rayon δ et l'on a $|z' - \mathrm{Z}| < 2\delta$.

18. Nous allons montrer qu'il existe un cercle (Γ) de centre z' et de rayon Δ_k d'ordre $k^{\frac{1}{n}}$, dans lequel z' est la seule racine de (I).

Considérons la fonction $V(z) = P(z)Lz + Q(z) - xR(z)$.

A l'extérieur de (C_k) et sur le plan $[k]$, V est holomorphe et l'on a

$$(\mathcal{D}) \quad V(z) = (z - z')\left[V'(z') + \frac{(z-z')}{2}V''(z') + \ldots + \frac{(z-z')^{h-1}}{h!}V^{(h)}(z') + \ldots\right]$$

puisque, par hypothèse, $V(z') = 0$.

Nous allons déterminer $\Delta_k = |z - z'|$ tel que le module du crochet ne puisse être nul, Δ_k pouvant d'ailleurs dépasser tout nombre donné. On a, en remplaçant x par sa valeur tirée de (I),

$$V'(z') = \frac{1}{z'R}[z'Lz'(P'R - R'P) + z'(Q'R - R'Q) + PR].$$

Supposons q supérieur à p et r.

Montrons que l'on a, μ étant fixe et indépendant de k,

$$|V'(z')| > \mu\rho'^{q-1}.$$

Ici

$$Lz' = \frac{xR - Q}{P} = -\frac{b_q}{a_p}z'^{q-p} + \ldots, \qquad z'(P'R - R'P) = (p - r)a_p c_r z'^{p+r} + \ldots,$$
$$z'(Q'R - R'Q) = (q - r)b_q c_r z'^{q+r} + \ldots,$$

de sorte que

$$z'(P'R - R'P)Lz' + z'(Q'R - R'Q) + PR = (q - p)b_q c_r z'^{q+r} + \ldots,$$

d'où résulte l'inégalité cherchée.

Montrons maintenant que l'on a, M étant indépendant de k et ν,

$$(\mathcal{B}) \qquad \frac{|V^{(\nu)}(z')|}{\nu!} < M\frac{\rho'^{q-1}}{\rho'^{\nu-1}}.$$

On a évidemment, M' étant fixe (mais dépendant de x)

$$\left|\frac{d^\nu}{dz^\nu}(xR - Q)\right| < M'\frac{\rho'^{q-1}}{\rho'^{\nu-1}}.$$

Considérons

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu}(PLz) = P\frac{d^\nu Lz}{dz^\nu} + \frac{\nu}{1}P'\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}Lz + \ldots$$
$$+ \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-h+1)}{h!}P^{(h)}\frac{d^{\nu-h}}{dz^{\nu-h}}Lz + \ldots;$$

l'on a

$$\frac{d^{\nu-h}}{dz^{\nu-h}} \mathrm{L}z = (-1)^{\nu-h-1} \frac{(\nu-h-1)!}{z^{\nu-h}};$$

par suite, le coefficient de $\frac{\mathrm{P}^{(h)}}{z^{\nu-h}}$ devient $\frac{\nu!}{h!(\nu-h)}$, et l'on a

$$\left|\frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}(\mathrm{PL}z)\right|_{z=z'} < \nu!\left[\frac{1}{\nu}\left|\frac{\mathrm{P}}{z'^{\nu}}\right| + \frac{1}{\nu-1}\left|\frac{\mathrm{P}'}{z'^{\nu-1}}\right| + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{h!(\nu-h)}\left|\frac{\mathrm{P}^{(h)}}{z'^{\nu-h}}\right| + \ldots + \frac{1}{\nu!}|\mathrm{P}^{(\nu)}\mathrm{L}z'|\right].$$

On peut trouver M'' tel que l'on ait, quel que soit h,

$$\left|\frac{\mathrm{P}^{(h)}}{z'^{\nu-h}}\right| < \mathrm{M}''\frac{\rho'^{p-h}}{\rho'^{\nu-h}} < \mathrm{M}''\frac{\rho'^{q-h}}{\rho'^{\nu-h}} = \mathrm{M}''\frac{\rho'^{q-1}}{\rho'^{\nu-1}}.$$

D'après ce qui précède, on peut trouver aussi M''' tel que $|\mathrm{L}z'| < \mathrm{M}'''\rho'^{q-p}$. On aura donc

$$|\mathrm{P}^{(\nu)}\mathrm{L}z'| < \mathrm{M}''\rho'^{p-\nu}\mathrm{M}'''\rho'^{q-p} = \mathrm{M}''\mathrm{M}'''\frac{\rho'^{q-1}}{\rho'^{\nu-1}}$$

et. comme l'on a seulement $(p+1)$ termes, on peut trouver M^{IV} tel que

$$\left|\frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}(\mathrm{PL}z)\right|_{z=z'} < \nu!\,\mathrm{M}^{\mathrm{IV}}\frac{\rho'^{q-1}}{\rho'^{\nu-1}}$$

d'où résulte, si $\mathrm{M} = \mathrm{M}' + \mathrm{M}^{\mathrm{IV}}$, l'inégalité $(\mathcal{B})$. Il en résulte

$$\left|\frac{(z-z')^{\nu-1}}{\nu!}\mathrm{V}^{(\nu)}(z')\right| < \left(\frac{\Delta_k}{\rho'}\right)^{\nu-1}\mathrm{M}\rho'^{q-1}$$

et

$$\left|\frac{(z-z')}{2!}\mathrm{V}''(z') + \ldots + \frac{(z-z')^{h-1}}{h!}\mathrm{V}^{(h)}(z') + \ldots\right|$$
$$< \mathrm{M}\rho'^{q-1}\left[\frac{\Delta_k}{\rho'} + \ldots + \left(\frac{\Delta_k}{\rho'}\right)^{h-1} + \ldots\right] < \mathrm{M}\frac{\rho'^{q-1}\left(\frac{\Delta_k}{\rho'}\right)}{1-\left(\frac{\Delta_k}{\rho'}\right)}.$$

Pour obtenir

$$(\mathcal{J}_1) \qquad \mathrm{V}'(z')| > \left|\frac{(z-z')}{2!}\mathrm{V}''(z') + \ldots + \frac{(z-z')^{h-1}}{h!}\mathrm{V}^{(h)}(z') + \ldots\right|$$

il suffit d'avoir

$$\mu \geqq \mathrm{M}\frac{\left(\frac{\Delta_k}{\rho'}\right)}{1-\left(\frac{\Delta_k}{\rho'}\right)}.$$

Comme l'on a $\rho' > \lambda_k > \frac{\rho_0}{2}$, on peut prendre, si $M > \mu$, $\Delta_k = \frac{\mu\rho_0}{4M}$, et si $M < \mu$, $\Delta_k = \frac{\rho_0}{4}$, ces nombres sont d'ordre $k^{\frac{1}{n}}$ et, dans le cercle (Γ) de rayon $\Delta_k > 2\delta$ qui contient Z, $V(z) = 0$ n'a d'autre racine que z' qui, par suite, coïncide avec Z.

Supposons r supérieur à p et q.

Ici

$$Lz = \frac{xR - Q}{P} = x\frac{c_r}{a_p}z'^{r-p} + \ldots \quad \text{et} \quad z'Lz'(P'R - R'P) = (p-r)c_r^2 x z^{2r} + \ldots$$

les autres facteurs qui figurent dans $V'(z')$ étant de degré inférieur à $2r$, on peut trouver ici μ tel que $|V'(z')| > \mu\rho'^{r-1}$.

Mais on obtient ici d'autre part $\left|\frac{V^{(\nu)}(z')}{\nu!}\right| < M\frac{\rho'^{r-1}}{\rho'^{\nu-1}}$; en prenant encore $\Delta_k = \frac{\mu\rho_0}{4M}$ ou $\Delta_k \leqq \frac{\rho_0}{4}$, suivant que $M \geqq \mu$ ou $M < \mu$, on a encore l'inégalité $(\mathcal{J}_1)$ et la même conclusion.

Il n'y a pas à considérer $p = r > q$ ou p supérieur à r et q, puisque dans ce cas, toutes les racines sont bornées.

19. La démonstration qui précède suppose k supérieur à un entier déterminé, qui dépend des coefficients d_i de $S = xR - Q$, ou

$$\begin{aligned} &d_s z^s + d_{s-1} z^{s-1} + d_{s-2} z^{s-2} + \ldots \\ &\quad = x(c_r z^r + c_{r-1} z^{r-1} + \ldots) - b_q z^q - b_{q-1} z^{q-1} - \ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire des coefficients b, c et de x.

Comme les modules des a et d interviennent seuls dans les expressions que nous avons considérées et que les d dépendent de x, nous allons chercher maintenant quel doit être l'ordre de k en $l = |x|$, si l'on fait croître l.

Remarquons d'abord que dans l'équation des valeurs initiales

$$z'^n = \lambda' L x'.$$

$\lambda' = \frac{a_p}{d_s}$ donne, si $r > q$, $d_s = c_r x$ et $|\lambda'| = \frac{|a_p|}{|c_r|\, l}$ et $\rho_0 = |z_0|$, racine de l'équation ci-dessus, est d'ordre $l^{-\frac{1}{n}}$ et, par rapport à k, d'ordre $k^{\frac{1}{n}}$.

Il faut donc, pour que ρ_0 dépasse un nombre donné, que k soit d'ordre supérieur ou égal à l.

Dans la première partie, paragraphe 16, de notre démonstration, nous avons considéré l'expression

$$(1+\varepsilon') = \left| 1 + \frac{d_{s-2}}{d_{s-1}z} + \frac{d_{s-3}}{d_{s-1}z^2} + \ldots \right|.$$

Pour $q < r$, par exemple $q = r - 1$, on a

$$d_s = c_r x, \qquad d_{s-1} = c_{r-1}x - b_q,$$

$$d_{s-2} = c_{r-2}x - b_{q-1}, \ \ldots \qquad \text{et} \qquad \frac{d_{s-2}}{d_{s-1}} = \frac{c_{r-2}x - b_{q-1}}{c_{r-1}x - b_q}, \ \ldots$$

qui restent bornés quand l croît, ε' est donc petit avec $\frac{1}{\rho}$ et la limitation de k peut être choisie indépendante de x.

Pour $q > r + 1$, par exemple $q = r + 2$, on a $\left|\frac{d_{s-2}}{d_{s-1}}\right| = \left|\frac{c_r x - b_{q-2}}{-b_{q-1}}\right|$ d'ordre l et pour que ε' soit petit, il faut que ρ soit d'ordre supérieur à l.

D'autre part, dans l'expression qui limite $|g(z)|$, on a $\left|\frac{d_{s-1}}{d_s}\right|$ qui, pour $q = r + 1$, est égale à $\left|\frac{c_r x - b_{q-1}}{-b_q}\right|$ d'ordre l, ce qui entraîne Λ d'ordre l; il en est de même pour $q > r + 1$.

Pour avoir $\lambda < \lambda_k = \frac{\rho_0}{m}$ d'ordre $k^{\frac{1}{n}}$, il faut donc, si $q > r$, que k soit d'ordre supérieur ou au moins égal à l^n.

Passons à la deuxième partie de la démonstration. Nous avons considéré, dans le paragraphe 17, l'expression

$$z'' - \lambda' \mathrm{L} z' - \lambda \mathrm{L} z' + \mathrm{B} = 0,$$

où $|\mathrm{B}|$ est d'ordre l.

Pour $n = 1$, il en est de même de α et de $|z' - z_0| < \delta$.

Pour $n > 1$ et si $q > r$, β est d'ordre $\frac{l}{\rho_0}$ par le terme $\frac{d_{s-1}}{d_s z'}$, β est donc petit si ρ_0 est d'ordre supérieur à l, c'est-à-dire si k est d'ordre supérieur à l^n.

On a ε_1 d'ordre $\frac{l}{\rho_0}$ et finalement δ d'ordre l.

La troisième partie du paragraphe 18 de notre démonstration, avait introduit le nombre M qui dépend de M′ et des M″ et M‴.

Le nombre M′ est de l'ordre de l, tandis que M″ ne dépend pas de l. Le nombre M‴ est déterminé par la condition $|\mathrm{L}z'| < \mathrm{M}'''\rho'^{q-p}$ ou $\mathrm{M}''' > \frac{|\mathrm{L}z'|}{\rho'^n}$, puisque q est supérieur à r et p.

Or, pour $\rho' > \rho_0$, on a, d'après les notations du paragraphe 17 où $\rho' = \frac{\rho_0}{1-\varepsilon_1}$,

$$|Lz'| < 2k\pi + \log\rho' = 2k\pi + \log\rho_0 - \log(1-\varepsilon_1);$$

il suffit donc que

$$M''' > (1-\varepsilon_1)^n \frac{[2k\pi + \log\rho_0 - \log(1-\varepsilon_1)]}{\rho_0''}.$$

Nous savons que ε_1 est petit si k est d'ordre supérieur à l^n; ε_1 étant de l'ordre de ρ'^{-1} et ρ_0'' étant d'ordre $\frac{2k\pi}{l}$, M''' est alors d'ordre l et il en est de même pour M.

Il en résulte, quand $M > \mu$ et $\Delta_k = \frac{\mu\rho_0}{4M}$, que Δ_k est d'ordre $\frac{k^{\frac{1}{n}}}{l^{1+\frac{1}{n}}}$; pour avoir $\Delta_k > 2\delta$ qui est d'ordre l, il faut donc que k soit d'ordre supérieur à l^{2n+1}.

Pour $\rho' < \rho_0$, il suffit que $M''' > \frac{2k\pi + \log\rho_0}{\rho'^n}$ ou $M''' > \frac{(2k\pi + \log\rho_0)2^n}{\rho_0^n}$, puisque $\rho' > \frac{\rho_0}{2}$.

Comme ρ_0'' est d'ordre $\frac{2k\pi}{l}$, M''' est encore d'ordre l.

Il en résulte finalement que, si pour $l = l_0$, toutes les inégalités sont vérifiées pour $|k| \geqq K_0 = (Nl_0)^{2n+1}$, pour $l = l_1 > l_0$, elles seront encore vérifiées si $|k| \geqq K_1 = (Nl_1)^{2n+1}$.

La condition est donc de même forme que dans le cas $\rho' > \rho_0$, de plus elle entraîne celles obtenues dans les deux premières parties.

En définitive, pour être sûr qu'il n'existe pour (1) aucune racine non bornée distincte des racines Z que nous avons déterminées, il suffit de prendre k de l'ordre de l^{2n+1}.

20. Considérons maintenant les z' telles que l'on ait $\rho' < \Lambda$.

Supposons d'abord les racines η de $P = 0$ simples et non nulles.

Nous allons montrer que, pour k assez grand, à toute racine z' correspond une racine z_0 telle que l'on ait $|z' - z_0| < \delta_k$, δ_k tendant vers 0 avec $\frac{1}{k}$.

Dans le cercle (C), $|xR - Q|$ admet un certain maximum M_1, d'autre part, on a $|Lz'| > 2(k-1)\pi$; il faut donc $|P(z')| < \frac{M_1}{2(k-1)\pi}$.

Or, on peut écrire, puisque $P(z_0) = 0$,

$$|P(z')| > |z' - z_0| \left[|P'(z_0)| - \left| \frac{(z'-z_0)}{2!} P''(z_0) + \ldots + \frac{(z'-z_0)^{h-1}}{h!} P^{(h)}(z_0) + \ldots \right| \right].$$

On a $P'(z_0) \neq 0$ et, d'autre part, $|P^{(h)}(z_0)|$ admet un maximum dans (C).

Posons $|P'(z_0)| = 2\mu_1$, on peut donc déterminer $m_2(A)$ tel que pour $|z' - z_0| < m_2$, le module du crochet soit supérieur à μ_1; il en résulte

$$|z' - z_0| \mu < \frac{M_1}{2(k-1)\pi}, \qquad |z' - z_0| < \delta_k = \frac{M_1}{2(k-1)\pi\mu_1}, \qquad |z' - Z| < 2\delta_k.$$

Il en résulte aussi que ρ' est supérieur à un nombre λ, car $\overline{\rho_0}$ étant le plus petit module des racines de $P(z) = 0$, on a $\rho' > \overline{\rho_0} - \delta_k$, et cette dernière expression est elle-même supérieure à λ, si l'on a pris $\lambda < \overline{\rho_0}$ puisque δ_k tend vers 0 avec $\frac{1}{k}$.

21. Nous allons établir l'inégalité $(\mathcal{J}_1)$ du paragraphe **18** pour z' dans un cercle de rayon δ' indépendant de k.

Montrons d'abord que l'on peut trouver un nombre σ indépendant de k tel que

$$|V'(z')| = \left| \frac{P}{z'} + P'Lz' + Q' - xR' \right| > 2(k-1)\pi\sigma.$$

Nous avons vu, au paragraphe **12**, que les z' tendent vers les z_0 homologues des η et, dans notre hypothèse actuelle, les η sont distincts des racines de $P' = 0$, donc pour k assez grand, $|P'(z')|$ est supérieur à un nombre σ non nul.

Les modules des autres termes dans $V'(z')$ étant bornés, puisque $\rho' > \lambda$ et $|Lz'|$ étant supérieur à $2(k-1)\pi$, on a bien $|V'(z')| > 2(k-1)\pi\sigma$ pour k assez grand.

Montrons que l'on peut trouver Σ tel que l'on ait, pour $h > 1$,

$$V^{(h)}(z') = \left| \left[\frac{d^{(h)}}{dz^h}(PLz) + Q^{(h)} - xR^{(h)} \right]_{z=z'} \right| < \frac{h!\,2(k-1)\pi}{\lambda^h} \Sigma.$$

On peut écrire, comme au paragraphe **8**,

$$\left| \frac{d^h}{dz^h}(PLz)_{z=z'} \right| < h! \left[\frac{1}{h} \left| \frac{P}{z'^h} \right| + \ldots + \frac{1}{(h-1)!} \left| \frac{P^{(h-1)}}{z'} \right| + \frac{1}{h!} |P^{(h)} L z'| \right],$$

Comme $\rho' > \lambda$, on peut trouver Σ', indépendant de k et tel que la somme des h premiers termes du crochet soit moindre que $\frac{\Sigma'}{\lambda^h}$. D'autre part, on a, en désignant par λ' le plus grand des nombres Λ et $\frac{1}{\lambda}$, l'inégalité

$$|Lz'| < 2k\pi + \log\lambda'.$$

On peut trouver Σ'' indépendant de k tel que $|P^{(h)}| < \Sigma''$ et l'on a

$$|P^{(h)}Lz'| < 2(k-1)\pi\Sigma''\left[1 + \frac{1}{k-1} + \frac{\log\lambda'}{2(k-1)\pi}\right].$$

Enfin, on peut trouver Σ''' tel que l'on ait $|Q^{(h)} - xR^{(h)}| < \Sigma'''$, d'où

$$|V^{(h)}(z')| < \frac{h!\,2(k-1)\pi}{\lambda^h}$$
$$\times\left\{\frac{\Sigma'}{2(k-1)\pi} + \frac{\lambda^h\Sigma''}{h!}\left[1 + \frac{1}{k-1} + \frac{\log\lambda'}{2(k-1)\pi}\right] + \frac{\Sigma'''\lambda^h}{h!\,2(k-1)\pi}\right\},$$

car il suffit de prendre, pour $h = 1$ et en supposant $\lambda \leqq 1$, Σ supérieur au crochet pour avoir, quel que soit h, l'inégalité annoncée. Cela étant, supposons $|z - z'| < \tau\lambda$ et $\tau < \frac{1}{2}$; nous avons

$$\left|\frac{(z-z')^{h-1}}{h!}V^{(h)}(z')\right| < \frac{2(k-1)\pi}{\lambda}\Sigma\tau^{h-1}$$

et

$$\left|\frac{(z-z')}{2!}V''(z') + \ldots + \frac{(z-z')^{h-1}}{h!}V^{(h)}(z') + \ldots + \right| < \frac{2(k-1)\pi}{\lambda}\,\frac{\tau\Sigma}{1-\tau}$$

et, pour vérifier $(\mathcal{J}_4)$, il suffit d'avoir $\tau \leqq \frac{\lambda\sigma}{2\Sigma}$.

On peut donc prendre $\delta' = \lambda\tau = \frac{\lambda^2\sigma}{2\Sigma}$, qui est indépendant de k et, dans le cercle (γ) de centre z' et de rayon δ', $V(z) = 0$ n'a d'autre racine que z' qui, pour k assez grand, coïncide avec Z.

22. Nous allons reprendre la démonstration précédente en supposant que η est une racine d'ordre m de $P = 0$.

Soit encore z' une racine distincte de Z et z_1 l'une des valeurs de

$$z_1 = z_0 + \left[\frac{xR(z_0) - Q(z_0)}{S(z_0)Lz_0}\right]^{\frac{1}{m}},$$

nous allons voir que pour l'une d'elles, $|z' - z_1|$ est d'ordre $k^{-\frac{2}{m}}$.

Comme on peut écrire (I) sous la forme $(z'-z_0)^m \mathrm{S}\mathrm{L}z' = x\mathrm{R}-\mathrm{Q}$, on a

$$z' = z_0 + \left[\frac{x\,\mathrm{R}(z') - \mathrm{Q}(z')}{\mathrm{S}(z')\mathrm{L}z'}\right]^{\frac{1}{m}}.$$

et, en prenant pour le crochet la même détermination dans z_1,

$$(1)\quad |z'-z_1| = \left|\frac{x\,\mathrm{R}(z_0)-\mathrm{Q}(z_0)}{\mathrm{S}(z_0)\mathrm{L}z_0}\right|^{\frac{1}{m}}$$
$$\times\left|\left[\frac{x\,\mathrm{R}(z')-\mathrm{Q}(z')}{\mathrm{S}(z')} : \frac{x\,\mathrm{R}(z_0)-\mathrm{Q}(z_0)}{\mathrm{S}(z_0)}\right]^{\frac{1}{m}}\left(\frac{\mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z'}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right|.$$

Le premier facteur est d'ordre $k^{-\frac{1}{m}}$. Pour évaluer l'ordre du second, posons

$$\frac{x\,\mathrm{R}(z')-\mathrm{Q}(z')}{\mathrm{S}(z')} : \frac{x\,\mathrm{R}(z_0)-\mathrm{Q}(z_0)}{\mathrm{S}(z_0)} = 1+\beta \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z'} = 1+\beta'.$$

On voit que, pour x quelconque, $|\beta|$ est de l'ordre de $|z'-z_0|$, or, on a $|z'-z_0| < |z'-z_1| + |z_1-z_0|$, donc $|\beta|$ est de l'ordre de $k^{-\frac{1}{m}}$.

D'autre part, on a les inégalités

$$\frac{2(k-1)\pi}{2k\pi+\log\lambda'} < \left|\frac{\mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z'}\right| < \frac{2k\pi+\log\lambda'}{2(k-1)\pi}$$

qui montrent que $|\beta'|$ est d'ordre k^{-1}; d'après l'inégalité ($\mathcal{J}$) du paragraphe **11**, et en posant $\alpha = \beta+\beta'+\beta\beta'$, on voit que le second facteur de (1) est aussi d'ordre $k^{-\frac{1}{m}}$ et $|z'-z_1|$ d'ordre $k^{-\frac{2}{m}}$, ainsi que $|z'-\mathrm{Z}|$ et δ_k du paragraphe **20**.

Nous allons montrer maintenant que $\mathrm{V}(z)=0$ n'a d'autre racine que z' dans un cercle de centre z' dont le rayon δ' est ici d'ordre $k^{-\frac{1}{m}}$. Considérons l'inégalité ($\mathcal{J}_1$) du paragraphe **18**.

Lorsque $|z'-z_0|$ reste petit, soit de l'ordre de $k^{-\frac{1}{m}}$, $|\mathrm{Q}'-x\mathrm{R}'|$ reste borné supérieurement; il en est de même de $\left|\frac{\mathrm{P}}{z'}\right|$, puisque nous écartons le cas où $z_0=0$. L'ordre de $|\mathrm{V}'(z')|$ est donc celui de $|\mathrm{P}'\mathrm{L}z'|$, or on a

$$\mathrm{P}(z_0) = \ldots = \mathrm{P}^{m-1}(z_0) = 0, \qquad \mathrm{P}^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

et par suite

$$P'(z') = \frac{(z'-z_0)^{m-1}}{(m-1)!}[P^{(m)}(z_0)+\ldots].$$

De même, pour $h \leqq p$, on a un terme

$$P^{(h)}(z')Lz' = \frac{(z'-z_0)^{m-h}}{h!}[P^{(m)}(z_0)+\ldots]Lz'$$

dans $V^{(h)}(z')$, qui est donc d'ordre $k^{\frac{h}{m}}$.

On peut donc encore trouver Σ' tel que $|V^{(h)}(z')| < \frac{h!}{\lambda^h} k^{\frac{h}{m}} \Sigma'$ et si l'on a $|z-z'| < \delta' = \tau\lambda k^{-\frac{1}{m}}$, il en résulte

$$\left|\frac{(z-z')^{h-1}}{h!} V^{(h)}(z')\right| < \frac{k^{\frac{1}{m}}}{\lambda} \tau^{h-1} \Sigma'$$

et l'on voit encore que $\left(\text{puisque l'on peut écrire } |V'(z')| > \sigma' k^{\frac{1}{m}}\right)$ pour τ inférieur à $\frac{1}{2}$ et à $\frac{\lambda\sigma'}{2\Sigma}$, $(\mathcal{J}_1)$ est vérifiée. Ainsi δ' sera d'ordre $k^{-\frac{1}{m}}$ et comme δ_k est d'ordre $k^{-\frac{2}{m}}$, on pourra sûrement réaliser l'inégalité $\delta' > 2\delta_k$, et notre démonstration est terminée.

23. Il reste à montrer que, si $a_0 = 0$, (I) n'a d'autres branches voisines de l'origine que les Z déterminées au paragraphe **13**.

Traçons, dans le plan $[k]$, un cercle (c) de rayon fixe λ ne contenant aucune racine de $S = 0$ et un cercle (c_k) de rayon variable λ_k, l'origine étant le centre des deux cercles.

Considérons les racines z' pour lesquelles on a $\rho' < \lambda$.

Les racines z_0 de l'équation auxiliaire (γ') du paragraphe **13**, et les Z qui en résultent sont intérieurs à (c) pour k assez grand, car ρ_0^m est inférieur à une quantité de l'ordre de $\frac{|y|}{2(k-1)\pi}$.

Montrons d'abord que l'on peut déterminer λ_k tel que l'on ait $\rho' > \lambda_k$. On a

$$\rho'^m[2k\pi + |\log\rho'|] > \left|\frac{xR-Q}{S}\right|.$$

Comme on suppose $y \neq 0$, on a aussi $x \neq \frac{b_0}{c_0}$ et par suite $\left|\frac{xR - Q}{S}\right|$ admet un minimum non nul $2\mu_1^m$ pour $\rho' < \lambda$ assez petit.

Or on a, pour λ assez petit, $\rho'^m |\log\rho'| < \mu_1^m$, d'où $\rho' > \mu_1 (2k\pi)^{-\frac{1}{m}}$, mais $\rho' < \lambda$.

Il en résulte que, si l'on prend $\lambda_k = \mu_1 (2k\pi)^{-\frac{1}{m}} < \lambda$, on aura $\rho' > \lambda_k$. D'autre part, pour $|z|$ assez petit, $\left|\frac{xR - Q}{S}\right|$ admet un maximum μ_2^m et comme $|Lz'| > 2(k-1)\pi$, on a $\rho' < \mu_2 [2(k-1)\pi]^{-\frac{1}{m}}$.

On peut donc écrire, μ_3 et μ_4 étant deux nombres fixes,

$$\mu_3 k^{-\frac{1}{m}} < \rho' < \mu_4 k^{-\frac{1}{m}}.$$

24. Nous allons encore montrer que toute racine z' est voisine d'une racine z_0 et évaluer $|z' - z_0|$ en fonction de k.

Considérons (I) sous la forme du paragraphe 13, ainsi que l'équation (γ')

$$z'^m Lz' - y - z'\chi(z') = 0, \qquad z_0^m Lz_0 - y = 0.$$

Montrons que l'argument θ' de z' est voisin d'un θ_0 et évaluons $\theta' - \theta_0$. Posons $z'^m = r'' e^{i\omega'}$, $my = l' e^{it'}$, $mz'\chi(z') = \alpha' e^{i\sigma'}$, il vient

$$r''(\cos\omega' + i\sin\omega')(\log r'' + i\omega') = l'(\cos t' + i\sin t') + \alpha'(\cos\sigma' + i\sin\sigma'),$$

dont on tire l'équation que doit vérifier ω'

$$\frac{l'\sin(t' - \omega') + \alpha'\sin(\sigma' - \omega')}{\omega'} = e^{\omega'}\left[\frac{l'\cos(t' - \omega') + \alpha'\cos(\sigma' - \omega')}{l'\sin(t' - \omega') + \alpha'\sin(\sigma' - \omega')}\right].$$

Il faut encore, comme à la fin du paragraphe 8, que

$$l'\cos(t' - \omega') + \alpha'\cos(\sigma' - \omega')$$

tende vers 0 avec $\frac{1}{k}$.

Or $|\chi(z')|$ est voisin de $|\chi(0)|$ et borné, par suite α' est de l'ordre de ρ' ou $k^{-\frac{1}{m}}$, il faut donc que $\cos(t' - \omega')$ tende vers 0 comme l'expression $\cos(t' - \omega)$ du paragraphe 8. Par suite, tout ω' est voisin d'un ω ou en diffère d'une quantité voisine de π et tout $\theta' = \frac{\omega'}{m}$ est

voisin d'un $\theta_0 = \frac{\omega}{m}$ ou en diffère d'une quantité bornée pour k grand.

On tire des relations initiales

$$\left(\frac{z'}{z_0}\right)^m = \left(\frac{y + z'\chi(z')}{y}\right)\left(\frac{\mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z'}\right),$$

$$m(\theta' - \theta_0) = \arg\left[1 + \frac{z'\chi(z')}{y}\right] + \arg\left(\frac{\mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z'}\right);$$

le premier argument est de l'ordre de ρ' ou $k^{-\frac{1}{m}}$.

On peut écrire d'autre part $\frac{\mathrm{L}z^0}{\mathrm{L}z'} = 1 + \frac{\log\rho_0 - \log\rho' + i(\theta_0 - \theta')}{\log\rho' + i\theta'}$, ce qui montre que le second argument est de l'ordre de $\frac{\log k}{k}$, au plus. Donc $(\theta' - \theta_0)$ est d'ordre $k^{-\frac{1}{m}}$ si $m > 1$ et d'ordre $k^{-1}\log k$, au plus, si $m = 1$. Pour évaluer $\rho' - \rho_0$, posons $\alpha'' = \frac{z'\chi(z')}{y}$, $\frac{\mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z'} = 1 + \alpha'''$, et considérons

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \left|1 + \frac{z'\chi(z')}{y}\right|^{\frac{1}{m}}\left|\frac{\mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z'}\right|^{\frac{1}{m}} = |1 + \alpha''|^{\frac{1}{m}}\,|1 + \alpha'''|^{\frac{1}{m}} = |1 + \alpha'' + \alpha''' + \alpha''\alpha'''|^{\frac{1}{m}}.$$

Il résulte encore de $(\mathcal{J})$ que $\rho' - \rho_0$ est d'ordre $\rho_0(k^{-1}\log k)^{\frac{1}{m}}$, au plus. Par suite, comme l'on a $|z' - z_0| < \rho' - \rho_0 + \rho'|\theta' - \theta_0|$, si $\rho' > \rho_0$ et encore $|z' - z_0| < \rho_0 - \rho' + \rho_0|\theta' - \theta_0|$, si $\rho_0 > \rho'$, on a $|z' - z_0|$ de l'ordre de $k^{-\frac{2}{m}}(\log k)^{\frac{1}{m}}$ au plus.

Il en est de même de $|\mathrm{Z} - z_0|$ et, par suite, de $|z' - \mathrm{Z}|$.

25. Il reste à montrer que $(\mathcal{J}_1)$ est vérifiée quand $(z - z')$ est d'ordre $k^{-\frac{1}{m}}$. On a ici

$$|\mathrm{V}'(z')| = |mz'^{m-1}\mathrm{S}\mathrm{L}z' + z'^{m-1}\mathrm{S} + z^m\mathrm{S}'\mathrm{L}z' + \mathrm{Q}' - x\mathrm{R}'|$$

de l'ordre de $\rho'^{m-1}|\mathrm{L}z'|$, c'est-à-dire de l'ordre de $k^{-\frac{(m-1)}{m}+1} = k^{\frac{1}{m}}$ ou de ρ'^{-1}. Considérons encore, en posant $\mathrm{P} = z^m\mathrm{S}$,

$$\mathrm{V}^{(h)}(z') = \left[\frac{d^h}{dz^h}(\mathrm{P}\mathrm{L}z) + \mathrm{Q}^{(h)} - x\mathrm{R}^{(h)}\right]_{z=z'}.$$

Comme $\rho' < \mu_n k^{-\frac{1}{m}}$, on peut écrire, T'_h étant borné,

$$|\mathrm{Q}^{(h)} - x\mathrm{R}^{(h)}|_{z=z'} < \mathrm{T}'_h.$$

Supposons d'abord $h > p$ et considérons

$$\frac{d^{(h)}}{dz^h}(\mathrm{PL}\,z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=p} \frac{h(h-1)\ldots(h-\nu+1)}{\nu\,!}\,\mathrm{P}^{(\nu)}\,\frac{d^{(h-\nu)}}{dz^{h-\nu}}\,\mathrm{L}z$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=p} (-1)^{h-\nu-1}\,\frac{h\,!}{\nu\,!(h-\nu)}\,\frac{\mathrm{P}^{(\nu)}}{z^{h-\nu}},$$

formée de p fractions rationnelles et qui ne contient pas $\mathrm{L}z$.

En désignant par S, un polynome dont les coefficients, qui dépendent des a, de m et de ν, sont bornés puisque $\nu \leqq p$, on peut écrire

$$\mathrm{P}^{(\nu)} = \frac{d^{(\nu)}}{dz^\nu}(z^m\,\mathrm{S})$$
$$= z^m\,\mathrm{S}^{(\nu)} + \frac{\nu}{1}\,mz^{m-1}\,\mathrm{S}^{(\nu-1)} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}{1}\,z^{m-\nu}\,\mathrm{S} = z^{m-\nu}\,\mathrm{S}_\nu.$$

et, en désignant par T''_h une constante supérieure à tous les $|\mathrm{S}_\nu|$ pour $\rho' < \mu_1 k^{-\frac{p}{m}}$,

$$\left|\frac{d^{(h)}}{dz^h}(\mathrm{PL}\,z)\right|_{z=z} = \left|\frac{1}{z'^{h-m}}\left[\mathrm{S}_0 + \frac{h}{h-1}\,\mathrm{S}_1 + \quad . + \frac{h\,!}{\nu\,!(h-\nu)}\,\mathrm{S}_\nu + \ldots + \mathrm{S}_p\right]\right|$$
$$< \frac{h\,!(p+1)}{\rho'^{h-m}}\,\mathrm{T}''_h.$$

On peut donc écrire, T_h désignant une autre constante,

$$|\mathrm{V}^{(h)}(z')| < \frac{h\,!(p+1)}{\rho'^{h-m}}\,\mathrm{T}''_h + \mathrm{T}'_h < \frac{h\,!\,\mathrm{T}_h}{\rho'^{h-m}}.$$

Posons $|z - z'| = \Delta' = \tau\rho'$; on peut donc écrire

$$\left|\frac{(z-z')^{h-1}}{h\,!}\,\mathrm{V}^{(h)}(z')\right| < \tau^{h-1}\,\frac{\rho'^{h-1}}{\rho'^{h-m}}\,\mathrm{T}_h = \tau^{h-1}\,\mathrm{T}_h\,\rho'^{m-1}.$$

Supposons $h \leqq p$; ici $\frac{d^{(h)}}{dz^h}(\mathrm{PL}z)$ renferme $\mathrm{P}^{(h)}\mathrm{L}z = z^{m-}\mathrm{S}_h\mathrm{L}z$, en^h module d'ordre $k^{-\frac{(m-h)}{m}+1}$ ou $k^{\frac{h}{m}}$.

Le module des autres termes est d'ordre $k^{-\frac{(m-h)}{m}} = k^{\frac{h}{m}-1}$, donc $\left|\frac{\mathrm{V}^{(h)}(z')}{h\,!}\right|$ est d'ordre $k^{\frac{h}{m}}$ ou de ρ'^{-h}; on peut donc écrire ici

$$\left|\frac{(z-z')^{h-1}}{h\,!}\,\mathrm{V}^{(h)}(z')\right| < \tau^{h-1}\,\mathrm{T}_h\,\frac{\rho'^{h-1}}{\rho'^{h}} = \tau^{h-1}\,\mathrm{T}_h\,\rho'^{-1},$$

et, en désignant par T un nombre supérieur à tous les T_h,

$$\left|\frac{(z-z')}{2!}V''(z')+\ldots+\frac{(z-z')^{h-1}}{h!}V^{(h)}(z')+\ldots\right|$$
$$<\frac{T}{\rho_1}[\tau+\ldots+\tau^{h-1}+\ldots]<T\rho'^{-1}\frac{\tau}{1-\tau}.$$

Comme on peut trouver T′ tel que $|V'(z')|>T'\rho'^{-1}$, $(\mathcal{J}_1)$ sera vérifiée pour $\tau<\frac{1}{2}$ et $\tau<\frac{T'}{2T}$.

26. Résumé des résultats précédents. — *Nous avons obtenu, quand* $|k|$ *dépasse un certain entier* K, *p*, *q ou r racines* Z_k *de* (I) *et nous avons montré qu'il n'y a pas d'autres racines que celles-ci.*

Nous avons d'autre part, pour les 2K plans exclus de la démonstration et qui ne contiennent, d'après le paragraphe 1, qu'un nombre fini de racines, pu déterminer celles-ci sur chaque plan $[k]$ pour l'équation (α) correspondante, comme au paragraphe 2.

Nous savons donc déterminer toutes les racines de (I) *pour une valeur x quelconque.*

27. Nous allons chercher quel doit être l'ordre de k suivant l pour que les démonstrations qui précèdent, qui concernent les racines bornées, pour lesquelles $\rho'<1$, soient encore valables si l croît. Considérons d'abord, pour les racines z voisines des η non nulles, les expressions qui se présentent dans la démonstration.

Dans le paragraphe 20, on a δ_k d'ordre $\frac{l}{k}$, λ étant indépendant de l et k. Dans le paragraphe 21, comme $|P'(z')|$ est voisin de $|P'(z_0)|$ qui est indépendant de k et l, il en est de même de σ, si k est d'ordre supérieur à l.

Considérons les Σ qui dépendent des Σ', Σ'', Σ''', les Σ' et Σ'' sont indépendants de l et k; au contraire, Σ''' doit être de l'ordre de l et il en est de même de Σ.

Il en résulte que τ est de l'ordre de l^{-1} ainsi que δ', tandis que δ_k est d'ordre $\frac{l}{k}$; il faut donc, pour avoir $\delta'>2\delta_k$, que k soit d'ordre l^2.

Considérons le paragraphe 22 qui concerne les Z de multiplicité m. On a $|z'-z_0|$ d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Évaluons l'ordre de $|z'-z_1|$; le premier facteur est d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$. Pour évaluer $|\beta|$, écrivons

$$\begin{aligned}
&x[R(z_0)+(z'-z_0)R'(z_0)+\ldots]S(z_0)\\
&\quad -xR(z_0)[S(z_0)+(z'-z_0)S'(z_0)+\ldots]\\
&\quad -[Q(z_0)+(z'-z_0)Q'(z_0)+\ldots]S(z_0)\\
&\quad +Q(z_0)[S(z_0)+(z'-z_0)S'(z_0)+\ldots]=\beta S(z')[xR(z_0)-Q(z_0)],
\end{aligned}$$

qui montre que $|\beta|$ est d'ordre $|z'-z_0|$ ou $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$.

D'autre part, $|\beta'|$ est d'ordre k^{-1} et le second facteur est donc aussi d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$; par suite, $|z'-z_1|$ est d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{2}{m}}$ ainsi que δ_k.

Considérons $|V'(z')|=|P'Lz'+\frac{P}{z'}+Q'-xR'|$.

Nous savons que $|P'(z')|$ est de l'ordre de $|z'-z_0|^{m-1}$ ou $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{m-1}{m}}$; par suite, $|P'Lz'|$ est d'ordre $l^{\frac{m-1}{m}}k^{\frac{1}{m}}$, tandis que $|xR'|$ est d'ordre l. Si k est d'ordre supérieur à l, $|V'(z')|$ est d'ordre $l^{\frac{m-1}{m}}k^{\frac{1}{m}}$.

Considérons $|V^{(h)}(z')|$.

Pour $h\leqq p$, on a $|P^{(h)}Lz'|$ d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{m-h}{m}}k=l^{\frac{m-h}{m}}k^{\frac{h}{m}}$, qui est aussi l'ordre de $|V^{(h)}(z')|$.

Pour $p<h\leqq r$, $|V^{(h)}(z')|$ est d'ordre l et pour $h>r$, $|V^{(h)}(z')|$ est borné. On a donc, dans tous les cas, $|V^{(h)}(z')|$ d'ordre inférieur à $l^{\frac{m-1}{m}}k^{\frac{h}{m}}$, par suite, Σ' et σ' de l'ordre de $l^{\frac{m-1}{m}}$; δ' ne dépend pas de l et est d'ordre $k^{-\frac{1}{m}}$.

Pour avoir $\delta'>2\delta_k$, il faut que $\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$ soit d'ordre supérieur à $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{2}{m}}$, il suffit pour cela que k soit d'ordre supérieur à l^2.

Considérons maintenant les racines z voisines de l'origine au paragraphe 23.

Pour que les z_0 soient intérieurs à (C), il faut $\rho_0^m < \frac{|y|}{2(k-1)\pi}$ qui est d'ordre $\frac{l}{k}$, puisque $y = \frac{c_0 x - b_0}{a_m}$; il suffit donc que k soit d'ordre supérieur à l.

On a la même condition pour avoir $\mu_1(2k\pi)^{-\frac{1}{m}} = \lambda_k < \lambda$, μ_1^m étant d'ordre l. Alors ρ' est d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Considérons le paragraphe 24.

On voit que $\cos(t' - \omega')$ doit tendre vers zéro quel que soit l, car l' est d'ordre l, tandis que $\alpha' = m|z'\chi(z')|$ est d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}} l$; petit par rapport à l' si k est d'ordre supérieur à l.

On a ensuite $\arg\left[1 + \frac{z'\chi(z')}{y}\right]$ d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$ puisque $|y|$ est d'ordre l.

Pour $\arg\left(\frac{Lz_0}{Lz'}\right)$, comme ρ_0, d'après (γ'), est aussi d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$, on voit que $\log\rho_0 - \log\rho'$ est borné et $\arg\left(\frac{Lz_0}{Lz'}\right)$ est d'ordre k^{-1}.

Pour $\frac{\rho'}{\rho_0}$, on voit que $|\alpha''|$ est d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$ et $|\alpha'''|$ d'ordre k^{-1}. Par suite, $\rho' - \rho_0$ est d'ordre $\rho_0\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$ ou $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{2}{m}}$, ainsi que $|z' - z_0|$ et δ_k.

Considérons le paragraphe 25.

On a $|V'(z')|$ d'ordre $\rho'^{m-1}|Lz'|$ ou $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{m-1}{m}} k = l^{\frac{m-1}{m}} k^{\frac{1}{m}} > l$ pour k d'ordre supérieur à l.

On a ensuite T'_h d'ordre l ainsi que T_h, T''_h étant indépendant de l. Il en résulte que T est aussi d'ordre l.

Comme il faut que $T\rho'^{-1}\frac{\tau}{1-\tau}$, qui est d'ordre $l\left(\frac{l}{k}\right)^{-\frac{1}{m}} = l^{\frac{m-1}{m}} k^{-\frac{1}{m}}$ soit inférieur à $|V'(z')|$ qui est du même ordre, on voit que τ peut être indépendant de l et k.

Pour que $\tau\rho' = \delta'$, qui est d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$, soit d'ordre supérieur à δ_k, d'ordre $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{2}{m}}$, il suffit encore que k soit d'ordre supérieur à l. Nous trouvons, en résumé, que dans le cas $\rho' < \Lambda$, il suffit que k soit d'ordre supérieur à l^2.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DES BRANCHES z_k, D'INDICE DONNÉ POUR x DE GRAND MODULE ET D'ARGUMENT FIXE.

28. Limites des branches (o) **de module borné.** — Par définition, nous disons qu'*une branche est ordinaire ou* (o) *si* θ *ne varie que d'une quantité bornée* λ *quand* $l = |x|$ *varie de* l_0 *à l'infini.*

Nous allons voir que, pour les branches considérées (θ borné), ρ *et* θ *tendent vers le module et l'argument d'une racine* η' *de* $R = o$. Soit ρ_1 supérieur à 1 et aux modules de toutes les racines η' de $R = o$, et $\rho_2 > \rho_1$; nous allons trouver un nombre L tel que pour $l \geqq L$, on ne puisse avoir $\rho_1 < \rho < \rho_2$.

Soit, pour $\rho_1 < \rho < \rho_2$, R' le minimum de $|R|$, et $|P''|$ et $|Q''|$ les maxima de $|P|$ et $|Q|$. On a $R' > o$ d'après le choix de ρ_1 et

$$\left|\frac{xR - Q}{P}\right| > \frac{lR' - Q''}{P''},$$

qui croît avec l. D'autre part, θ_0 désignant la valeur de θ pour $l = o$, on a, pour $\rho_1 < \rho < \rho_2$,

$$|Lz| < M = \sqrt{(\log \rho_2)^2 + (|\theta_0| + \lambda)^2}.$$

Il en résulte que pour $l \geqq L$ tel que $\frac{R'L - Q''}{P''} = M$, on n'aura pas

$$|Lz| = \left|\frac{xR - Q}{P}\right|.$$

Remarquons que, ρ_1 étant fixe, L ne dépend que de ρ_2, on a donc seulement, pour $l \geqq L$, deux cas à considérer : $\rho < \rho_1$ et $\rho > \rho_2$.

Considérons (I) sous la forme

$$Lz = \frac{xR - Q}{P}.$$

En désignant par $P = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z} + \ldots + \overline{a}_p \overline{z}^p$ le polynome conjugué de P, d'après les notations du paragraphe 10, on peut écrire

$$Lz = \frac{x R\overline{P} - Q\overline{P}}{P\overline{P}},$$

dont on tire le système

$$(1) \qquad \log \rho = \frac{l[\alpha_0 + \alpha_1 \rho + \ldots + \alpha_{r+p} \rho^{r+p}] - [\gamma_0 + \gamma_1 \rho + \ldots + \gamma_{p+q} \rho^{q+p}]}{|a_0^2| + 2|a_0 \quad a_1| \rho \cos[\sigma_1 - \sigma_0 + \theta] + \ldots + \quad a_p^2| \rho^{2p}},$$

$$(2) \qquad \theta = \frac{l[\beta_0 + \beta_1 \rho + \ldots + \beta_{r+p} \rho^{r+p}] - [\delta_0 + \delta_1 \rho + \ldots + \delta_{p+q} \rho^{q+p}]}{|a_0^2 \quad + 2|a_0||a_1| \rho \cos[\sigma_1 - \sigma_0 + \theta] + \ldots + \quad a_p^2 \quad \rho^{2p}},$$

dans lequel

$$\begin{array}{ll}
\alpha_0 = |a_0| \; c_0 \cos[t + \upsilon_0 - \sigma_0], & \beta_0 = |a_0||c_0| \sin[t + \upsilon_0 - \sigma_0], \\
\gamma_0 = |a_0| \; b_0| \cos(\tau_0 - \sigma_0), & \delta_0 = |a_0||b_0| \sin(\tau_0 - \sigma_0), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{r+p} = |a_p| \; c_r| \cos[t + \upsilon_r - \sigma_p + (r-p)\theta], & \beta_{r+p} = |a_p| \; c_r| \sin[t + \upsilon_r - \sigma_p + (r-p)\theta], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_{p+q} = |a_p| \; b_q| \cos[\tau_q - \sigma_p + (q-p)\theta], & \delta_{p+q} = |a_p| \; b_q| \sin[\tau_q - \sigma_p + (q-p)\theta].
\end{array}$$

Considérons d'abord $\rho < \rho_1$.

Soit ε inférieur à $|a_0^2|$, β_0, δ_0. On peut trouver ρ_0 tel que, pour $\rho < \rho_0$ inférieur aux modules des racines de $R = 0$, l'on ait les inégalités

$$a_0^2 - \varepsilon < |a_0^2 + \ldots < a_0^2 + \varepsilon, \qquad \beta_0 - \varepsilon < \beta_0 + \beta_1 \rho + \ldots| < \beta_0 + \varepsilon,$$
$$\delta_0 - \varepsilon < \delta_0 + \delta_1 \rho + \ldots < \delta_0 + \varepsilon.$$

Or, on peut trouver L′ tel que, pour $l \geqq L'$, on ne puisse avoir $\rho < \rho_0$.

En effet, prenons L′ tel que $\dfrac{L'(\beta_0 - \varepsilon) - \delta_0 - \varepsilon}{|a_0^2 + \varepsilon} = |\theta_0| + |\lambda|$; si l'on avait $\rho < \rho_0$ pour $l > L'$, il résulterait

$$\theta| > \frac{l(\beta_0 - \varepsilon) - \delta_0 - \varepsilon}{a_0^2 + \varepsilon} > \frac{L'(\beta_0 - \varepsilon) - \delta_0 - \varepsilon}{|a_0^2 + \varepsilon} = |\theta_0| + |\lambda|.$$

On a donc $\rho_0 < \rho < \rho_1$ pour l supérieur à L et L′; par suite $|Lz|$ restant borné, il doit en être de même de $\left|\dfrac{xR - Q}{P}\right|$, ce qui nécessite que R tende vers o.

Par suite, si le module ρ d'une branche (o) reste borné, il tend vers celui d'une racine η' de $R = 0$, θ_λ de cette branche différant de l'argument de η' compris entre o et 2π d'une quantité voisine de $2(k-1)\pi$.

29. Croissance des branches (o) **de module non borné.** — Cherchons maintenant l'ordre suivant l des branches qui croissent avec l.

a. Supposons r supérieur à p et q.

Ici ρ ne peut croître indéfiniment avec l, car les coefficients α_{r+p} et β_{r+p} ne pouvant être petits simultanément, l'un des seconds membres de (1) et (2) serait d'ordre $l\rho^{r-p}$ et l'égalité avec $\log\rho$ ou θ serait impossible.

b. Supposons $r = p > q$.

Pour $\sin[t + \upsilon_r - \sigma_p] \neq 0$, le second membre de (2) croîtrait comme l, tandis que θ resterait borné et l'égalité serait impossible.

Pour $\sin[t + \upsilon_r - \sigma_p] = 0$, le second membre de (1) croissant comme l, ρ devrait croître comme $e^{l\left|\frac{c_r}{a_p}\right|}$. Le second membre de (2) tendant vers o comme $\frac{l}{\rho}$, θ tendrait vers o.

Ce cas peut se présenter, comme nous le verrons au paragraphe 32.

c. Supposons p supérieur à q et r.

On peut écrire (1) et (2) sous la forme

$$(1') \qquad \log\rho = \frac{l\left[\alpha_{r+p} + \frac{A_1}{\rho^{r+p}} + \frac{B_1}{l\rho^{r+p}}\right]}{\rho^{p-r}\left(a_p^2 + \frac{C}{\rho^{2p}}\right)},$$

$$(2') \qquad \theta = \frac{l\left[\beta_{r+p} + \frac{A_2}{\rho^{r+p}} + \frac{B_2}{l\rho^{r+p}}\right]}{\rho^{p-r}\left(a_p^2 + \frac{C}{\rho^{2p}}\right)},$$

A_1 et A_2 étant de degré $r+p-1$, B_1 et B_2 de degré $p+q$, C de degré $2p-1$.

Montrons d'abord que $\rho^{q-r} : l$ tend vers o, même si $q > r$.

Supposons qu'en certains points, ρ soit d'ordre $l^{\frac{1}{q-r}+u}$, avec $u \geqq 0$.

Alors $|xR|$ est d'ordre $l^{\frac{q}{q-r}+ru}$, $|Q|$ d'ordre $l^{\frac{q}{q-r}+qu}$ et $|xR - Q|$ est d'ordre au plus égal au plus grand des ordres précédents, tandis que $|P|$ est d'ordre $l^{\frac{p}{q-r}+pu}$

Par suite $\left|\frac{xR - Q}{P}\right|$ tend vers o, tandis que $|Lz|$ est d'ordre $\log l$.

On ne peut donc supposer $u \geqq 0$ et $\rho^{q-r} : l$ tend vers o, ainsi que $\left|\frac{A_1}{\rho^{r+p}}\right|$, $\left|\frac{B_1}{l\rho^{r+p}}\right|$ et les termes analogues.

Donc $|\theta|$, étant borné, ρ croît comme $l^{\frac{1}{p-r}}$.

D'autre part, on a, en divisant (2′) par (1′),

$$\frac{\theta}{\log\rho} = \frac{\left[\beta_{r+p} + \frac{A_2}{\rho^{r+p}} + \frac{B_2}{l\rho^{r+p}}\right]}{\left[\alpha_{r+p} + \frac{A_1}{\rho^{r+p}} + \frac{B_1}{l\rho^{r+p}}\right]};$$

le premier membre tend vers o avec $\frac{1}{\rho}$; dans le second membre, le dénominateur étant borné, le numérateur doit tendre vers o. Or, comme d'après ce qui précède, $\left|\frac{A_2}{\rho^{r+p}}\right|$ et $\left|\frac{B_2}{l\rho^{r+p}}\right|$ tendent vers o, il doit en être de même de β_{r+p}.

Par suite θ est voisin de $\frac{t + \upsilon_r - \sigma_p + n\pi}{p-r}$, mais comme α_{r+p} doit être positif, seules les valeurs de n pour lesquelles il en est ainsi peuvent être limites de θ.

d. Supposons $q > r > p$.

On peut écrire maintenant (1) et (2)

$$(1'') \qquad \log\rho = \frac{\left\{ l\rho^{p+r}\left[\alpha_{r+p} + \left(\frac{\alpha_{r+p-1}}{\rho} + \ldots\right) - \frac{\rho^{q-r-1}}{l}\left(\gamma_{p+q}\rho + \gamma_{p+q-1} + \frac{\gamma_{p+q-2}}{\rho} + \ldots\right)\right]\right\}}{|a_p^2|\rho^{2p} + \ldots},$$

$$(2'') \qquad \theta = \frac{\left\{ l\rho^{p+r}\left[\beta_{r+p} + \left(\frac{\beta_{r+p+1}}{\rho} + \ldots\right) - \frac{\rho^{q-r-1}}{\rho}\left(\delta_{p+q}\rho + \delta_{p+q-1} + \frac{\delta_{p+q-2}}{\rho} + \ldots\right)\right]\right\}}{|a_p^2|\rho^{2p} + \ldots},$$

qui montrent que $\rho^{q-r-1} : l$ ne peut être, en aucun point, supérieur à une quantité fixe non nulle quand l croît indéfiniment, car γ_{p+q} et δ_{p+q} n'étant pas petits simultanément, l'un des seconds membres serait au moins de l'ordre de ρ^{q-p}, rendant l'égalité impossible avec $\log\rho$ ou θ.

On peut donc écrire, en négligeant les termes petits avec $\frac{1}{\rho}$,

$$\log\rho = \frac{l\rho^{p+r}\left[\alpha_{r+p} - \gamma_{p+q}\frac{\rho^{q-r}}{l} + \ldots\right]}{|a_p^2|\,\rho^{2p}[1+\ldots]}, \qquad \theta = \frac{l\rho^{p+r}\left[\beta_{r+p} - \delta_{p+q}\frac{\rho^{q-r}}{l} + \ldots\right]}{|a_p^2|\,\rho^{2p}[1+\ldots]},$$

qui montrent que les crochets doivent être petits car, sans cela, l'un des seconds membres serait de l'ordre de $l\rho^{r-p} \geqq \rho l$.

On a donc ρ d'ordre $l^{\frac{1}{q-r}}$.

Les crochets étant petits, on peut écrire, ε et η étant petits avec $\frac{1}{\rho}$,

$$\alpha_{p+r} = \gamma_{p+q}\frac{\rho^{q-r}}{l} + \varepsilon, \qquad \beta_{p+r} = \delta_{p+q}\frac{\rho^{q-r}}{l} + \eta,$$

d'où, en supposant que γ_{p+q} n'est pas petit,

$$\frac{\beta_{p+r}}{\alpha_{p+r}} = \frac{\delta_{p+q} + \frac{\eta l}{\rho^{q-r}}}{\gamma_{p+q} + \frac{\varepsilon l}{\rho^{q-r}}} = \frac{\delta_{p+q}}{\gamma_{p+q}} - \frac{\delta_{p+q}}{\gamma_{p+q}}\left[\frac{\varepsilon l}{\rho^{q-r}} - \ldots\right] + \frac{\eta l}{\rho^{q-r}}\,\frac{1}{\gamma_{p+q} + \frac{\varepsilon l}{\rho^{q-r}}},$$

qui montre que $\operatorname{tang}[t + \upsilon_r - \sigma_p + (r-p)\theta]$ est voisine de

$$\operatorname{tang}[\tau_q - \sigma_p + (q-p)\theta].$$

On aurait la même conclusion, en supposant γ_{p+q} petit, en formant $\frac{\alpha_{p+r}}{\beta_{p+r}}$, δ_{p+q} n'étant pas petit dans ce cas.

Par suite $[t + \upsilon_r - \sigma_p + (r-p)\theta]$ et $[\tau_q - \sigma_p + (q-p)\theta]$ diffèrent d'environ $n\pi$, mais comme les signes des sin et cos doivent être les mêmes dans les crochets, il faut que ces angles diffèrent d'environ $2n\pi$, c'est-à-dire que θ soit voisin de $\frac{t + \upsilon_r - \tau_q + 2n\pi}{q-r}$.

e. Supposons $q > r = p$.

On peut écrire ici

$$(1''')\quad \log\rho = \frac{l\{|c_r|\cos[t+\upsilon_r-\sigma_p]+\ldots\} - \rho^{q-r}\{|b_q|\cos[\tau_q-\sigma_p+(q-r)\theta]+\ldots\}}{|a_p|+\ldots},$$

$$(2''')\quad \theta = \frac{l\{|c_r|\sin[t+\upsilon_r-\sigma_p]+\ldots\} - \rho^{q-r}\{|b_q|\sin[\tau_q-\sigma_p+(q-r)\theta]+\ldots\}}{|a_p|+\ldots}.$$

et, en élevant au carré et ajoutant

$$(\log\rho)^2 + \theta^2 = \frac{|c_r|^2 l^2 + |b_q|^2\rho^{2(q-r)} - 2|c_r|\,|b_q|\,l\rho^{q-r}\cos[t+\upsilon_r-\tau_q-(q-r)\theta]+\ldots}{|a_p|^2+\ldots}$$

qui montre que, pour avoir l'égalité, il faut encore que ρ soit d'ordre $l^{\frac{1}{q-r}}$ et que θ soit voisin de $\frac{t+\upsilon_r-\tau_q+2n\pi}{q-r}$.

f. Supposons $q>p>r$.

On peut écrire (1) et (2)

$$(1^{\text{IV}})\qquad \log\rho=\frac{\alpha_{r+p}\,l\left[1+\frac{\alpha_{r+p-1}}{\alpha_{r+p}\rho}+\ldots\right]-\gamma_{p+q}\rho^{q-r}\left[1+\frac{\gamma_{p+q-1}}{\gamma_{p+q}\rho}+\ldots\right]}{a_p^2\,|\,\rho^{p-r}[1+\ldots]},$$

$$(2^{\text{IV}})\qquad \theta=\frac{\beta_{r+p}\,l\left[1+\frac{\beta_{r+p-1}}{\beta_{r+p}\rho}+\ldots\right]-\delta_{p+q}\rho^{q-r}\left[1+\frac{\delta_{p+q-1}}{\delta_{p+q}\rho}+\ldots\right]}{a_p^2\,|\,\rho^{p-r}[1+\ldots]}.$$

Si β_{r+p} ne tend pas vers o, pour que θ reste borné, il faut que ρ croisse comme $l^{\frac{1}{q-r}}$. Si l'on suppose β_{r+p} tendant vers o, α_{r+p} n'est pas petit et il faut encore que ρ croisse comme $l^{\frac{1}{q-r}}$.

En effet, supposons que ρ croisse comme $l^{\frac{1+\nu}{q-r}}$, où $\nu>0$, alors l'un des seconds membres croît comme $l^{(1+\nu)\frac{q-p}{q-r}}$, tandis que θ reste borné et que $\log\rho$ croît comme $\log l$.

Si ρ croissait comme $l^{\frac{1-\nu}{q-r}}$, l'un des seconds membres croîtrait comme $l^{1-(1-\nu)\left(\frac{p-r}{q-r}\right)}$, ce qui entraînerait la même impossibilité, donc $\nu=0$.

D'autre part on voit, comme dans le cas précédent, que θ doit être voisin de $\frac{t+\upsilon_r-\tau_q+2n\pi}{q-r}$.

En résumé :

1° *Si r est supérieur à p et q, toutes les branches sont bornées;*

2° *Si $r=p>q$, toutes les branches sont bornées, sauf, peut-être pour une valeur particulière de t.* Nous examinerons ce cas au paragraphe 32;

3° *Si p est supérieur à q et r, ρ croît comme $l^{\frac{1}{p-r}}$;*

4° *Si q est supérieur à p et r, ρ croît comme $l^{\frac{1}{q-r}}$.*

30. Étude d'un cas particulier. — Nous avons montré que, sur une branche (o), ρ, supposé croissant, croît comme une puissance fractionnaire de l, mais nous allons trouver une évaluation directe et plus précise de ρ en fonction de l pour $z(x)$ définie par

$$(\gamma) \qquad z \mathrm{L} z = x.$$

Ici ρ doit croître comme l. On sait, d'après [8], que l'on a

$$\rho = \frac{l \sin(t-\theta)}{\theta} = e^{\theta \frac{\cos(t-\theta)}{\sin(t-\theta)}}$$

qui montre que, si t reste fixe, comme $\sin(t-\theta)$ ne peut s'annuler, un θ, dont la valeur initiale θ_0 pour $l = l_0$ est comprise (si $0 < t < \pi$) entre $(2k\pi + t + \pi)$ et $(2k\pi + t + 2\pi)$, reste dans cet intervalle quand l croît.

Considérons l'équation auxiliaire

$$(\mathcal{E}) \qquad \rho \log \rho = l.$$

Soit m l'entier tel que $e^m < l < e^{m+1}$ et $\rho_1 = \dfrac{l}{m-n}$, $\rho_2 = \dfrac{l}{m+n}$.

Nous allons voir que l'on peut choisir $n > 0$ tel que l'on ait

$$\rho_2 \log \rho_2 < l < \rho_1 \log \rho_1.$$

En effet, l'on a, d'après la valeur de ρ_1,

$$\begin{aligned} \rho_1 \log \rho_1 &= l \left[\frac{\log l}{m-n} - \frac{\log(m-n)}{m-n} \right] \\ &> l \left[\frac{m - \log(m-n)}{m-n} \right] = l \left[1 + \frac{n - \log(m-n)}{m-n} \right] \end{aligned}$$

et si l'on prend $n > \log(m-n)$, il en résultera $\rho_1 \log \rho_1 > l$.

On a, d'autre part, d'après la valeur de ρ_2,

$$\rho_2 \log \rho_2 = l \left[\frac{\log l}{m+n} - \frac{\log(m+n)}{m+n} \right] < l \frac{m+1}{m+n} = l - \frac{l(n-1)}{m+n}$$

et, si $n > 1$, il en résultera $\rho_2 \log \rho_2 < l$.

Il suffit donc de prendre $n \geqq \log m > 1$.

En désignant par ρ la racine de $(\mathcal{E})$, on a $\rho_2 < \rho < \rho_1$, puisque $\rho \log \rho$ est croissante pour $\rho > 1$.

Nous pouvons supposer $l > e^3$ et prendre $n = \log m$, ce qui donne

$$(i) \qquad \frac{l}{m + \log m} < \rho < \frac{l}{m - \log m}$$

Considérons maintenant l'équation $\rho\sqrt{(\log\rho)^2+a^2}-l=0$, ainsi que les racines ρ' et ρ'' des équations $\rho'\log\rho'-l=0$ et $\rho''[|\log\rho''|+|a|]-l=0$; on a

$$\rho'\sqrt{(\log\rho')^2+a^2}>l, \qquad \rho''\sqrt{(\log\rho'')^2+a^2}<l;$$

comme $\varphi(\rho)=\rho\sqrt{(\log\rho)^2+a^2}-l$ est croissante, cela nécessite $\rho''<\rho<\rho'$.

Posons $|a|=\log b$, $\rho''b=\sigma$, $lb=S$; l'équation $\rho''[|\log\rho''|+|a|]=l$ devient

$$\sigma\log\sigma=S$$

qui est de la forme déjà étudiée. Si p est l'entier tel que $e^p<S<e^{p+1}$, on a, d'après ce qui précede pour l'équation ($\mathcal{E}$),

$$\frac{S}{p+\log p}=\frac{lb}{p+\log p}<\sigma=\rho''b<\frac{lb}{p-\log p}=\frac{S}{p-\log p}.$$

Or, on a $p<\log S<p+1$, c'est-à-dire $p<\log l+|a|<p+1$. On peut remplacer ρ'' par $\dfrac{l}{p+\log p}$ dans $\rho''<\rho$ en conservant l'inégalité et écrire

$$(j) \qquad \frac{l}{p+\log p}<\rho<\frac{l}{m-\log m}$$

puisque $\rho<\rho'$ et que ρ' vérifie les inégalités (i); ρ désignant ici la racine de $\varphi(\rho)=0$.

Comme $m<\log l<m+1$ entraîne $m+1-\log m>\log l-\log\log l$ et, en remplaçant p par $\log l+|a|$, ces inégalités (j) deviennent

$$\frac{l}{\log l+|a|+\log[\log l+|a|]}<\rho<\frac{l}{\log l-\log\log l-1}.$$

Or l'équation $\varphi_1(\rho)=\rho\sqrt{(\log\rho)^2+\theta^2}-l=0$ correspond à (γ) et les inégalités ci-dessus sont vérifiées si l'on remplace a par θ.

Pour la racine $z_{k-1}(\rho_{k-1},\theta_{k-1})$ de (γ), θ_{k-1} est inférieur à $2k\pi$, nous pouvons donc remplacer $|a|$ par $2k\pi$, ce qui donne enfin

$$\frac{l}{\log l+2k\pi+\log[\log l+2k\pi]}<\rho_{k-1}<\frac{l}{\log l-\log\log l-1}.$$

31. Nous pouvons remarquer que $z(x)$ définie par (γ) vérifie

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{z+x}$$

du type (10) considéré par P. Boutroux qui a fait, au sujet de la croissance de l'intégrale de cette équation, la remarque suivante [1] : « Ainsi nous avons trouvé une limite supérieure du module de y, mais pas de limite inférieure ».

Nous obtenons, par les inégalités finales du paragraphe 30, une limite inférieure, mais celle-ci est particulière à la branche z_{k-1}. Il devait en être ainsi car, pour une valeur l déterminée, ρ_{k-1} tend vers o avec $\frac{1}{k}$, puisque $|Lz| > 2(k-1)\pi$.

Il est donc impossible de trouver une limite inférieure non nulle valable pour toutes les branches.

32. Nous avons remarqué, au paragraphe 29, b, que si $r = p$ et $t = \sigma_p - \upsilon_r$, on a peut-être une branche du plan [1] ou [−1] pour laquelle θ tend vers o, tandis que ρ croît comme $e^{\left|\frac{c_r}{a_p}\right| l}$.

Pour montrer que ce cas peut effectivement se présenter, considérons

$$(\mathrm{I}) \qquad z\,Lz = xz + i$$

pour $t = 0$, c'est-à-dire $x = l$ et pour le plan [1]. On tire de (I)

$$\rho = \frac{\cos\theta}{\theta} = e^{l + \theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}.$$

Posons $\delta(\theta) = \frac{\cos\theta}{\theta} - e^{l+\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$. On a, pour θ_0 assez petit, $\delta(\theta_0) > 0$ et, pour $\theta_1 = e^{-l}$,

$$\delta(\theta_1) = e^l \cos\theta_1 - e^{l+\theta_1\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}} = e^l\left[\cos\theta_1 - 1 - \theta_1\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} - \ldots\right] < 0.$$

On a donc $\delta(\theta) = 0$ pour une valeur θ inférieure à θ_1, la valeur correspondante de ρ étant voisine de e^l.

Considérons le cas général en nous proposant de déterminer une branche z pour laquelle θ tend vers o, en supposant $r = p > q$ et $t = \sigma_p - \upsilon_r$.

On peut écrire (I)

$$Lz = x\frac{R}{P} - \frac{Q}{P}$$

---

[1] Ouvrage cité, p. 44 et 54.

et comme ici $R = c_p z^p + c_{p-1} z^{p-1} + \ldots + c_0$. $P = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \ldots + a_0$, en posant

$$\alpha = \frac{c_p}{a_p}, \qquad R = c_p z^p + R_1, \qquad P = a_p z^p + P_1, \qquad \psi_1 = \frac{a_p R_1 - c_p P_1}{a_p(a_p z^p + P_1)}$$

on peut écrire

$$\frac{R}{P} = \frac{c_p}{a_p} + \frac{a_p R_1 - c_p P_1}{a_p(a_p z^p + P_1)} = \alpha + \psi_1.$$

On peut écrire, en remarquant que χ_1 est une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont de degré p

$$\psi_1 = \frac{1}{z}\left[\frac{(a_p R_1 - c_p P_1) z}{a_p(a_p z^p + P_1)}\right] = \frac{\chi_1}{z}.$$

On peut écrire de même, le dénominateur de χ_2 étant de degré p et le numérateur au plus de degré p, puisque $p \geqq q + 1$,

$$-\frac{Q}{P} = \frac{\chi_2}{z}.$$

On peut écrire alors, en posant $\Phi(z) = e^{x\frac{\chi_1}{z} + \frac{\chi_2}{z}} = e^u$,

$$L z = \alpha x + x\frac{\chi_1}{z} + \frac{\chi_2}{z}, \qquad z = e^{\alpha x}\Phi(z).$$

Faisons $z_0 = e^{\alpha x}$, $z_1 = e^{\alpha x}\Phi(z_0)$, ..., $z_{n+1} = e^{\alpha x}\Phi(z_n)$, ...; on a ici

$$z_1 - z_0 = e^{\alpha x}[\Phi(z_0) - 1] = z_0\left[\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^m}{m!} + \ldots\right]$$

et, en supposant $|u| < \frac{1}{2}$,

$$\left|\frac{z_1 - z_0}{z_0}\right| < 2u.$$

Considérons d'autre part $\Phi'_z = \Phi\left[\frac{x\chi'_1}{z} - \frac{x\chi_1}{z^2} + \frac{\chi'_2}{z} - \frac{\chi_2}{z^2}\right]$; comme $|\chi'_1|$ et $|\chi'_2|$ sont au plus de l'ordre de ρ^{-2}, le crochet est, en module, au plus de l'ordre de $\frac{l}{\rho^2}$.

Considérons maintenant $z_0 = e^{\alpha x}$ ou $L z_0 = \log \rho_0 + i\theta_0 = \frac{c_l x}{a_p} = l\left|\frac{c_l}{a_p}\right|$; puisque $x = le^{it}$, $c_l = |c_l| e^{i\nu_l}$, $a_p = |a_p| e^{i\sigma_p}$ et $t = \sigma_p - \nu_l$.

On a donc $\theta_0 = 0$ et $\rho_0 = e^{l\left|\frac{c_l}{a_p}\right|}$.

Du point z_0 comme centre, décrivons un cercle (γ) de rayon $\sigma\rho_0$, où $\sigma < 1$ et supposons que ρ_0, c'est-à-dire l, soit assez grand pour que (γ) ne contienne aucune racine η de $P = 0$. $|\chi_1|$, $|\chi_2|$, $|\chi'_1|$, $|\chi'_2|$ sont alors bornés dans (γ) et $|u|$ est de l'ordre de $\frac{l}{\rho_0}$ ou de $le^{-l\left|\frac{c_r}{a_p}\right|}$, qui tend vers 0 avec $\frac{1}{l}$. Par suite $|\Phi|$ est voisin de 1 et, comme le module du crochet est de l'ordre de $\frac{|x|}{\rho^2} = \frac{l}{\rho^2}$, $|\Phi'_z|$ est arbitrairement petit avec $\frac{1}{l}$.

On peut donc écrire, pour $|\Phi'_z| < \lambda < 1$,

$$|z_{n+1} - z_0| < |z_1 - z_0|\,(1 + \lambda + \ldots + \lambda^n) < \frac{|z_1 - z_0|}{1 - \lambda} < \frac{2u\rho_0}{1 - \lambda}.$$

Pour que z_{n+1} soit dans (γ) quel que soit n, il suffit que $\frac{2u\rho_0}{1-\lambda} < \sigma\rho_0$ ou $2u < \sigma(1 - \lambda)$, ce qui peut être obtenu, quel que soit σ, pour l assez grand; il y a donc un point Z limite des z_n dans (γ).

Pour celui-ci, ρ est de l'ordre de ρ_0 et, d'autre part, on a

$$\theta < \arcsin\left(\frac{\sigma\rho_0}{\rho_0}\right) = \arcsin\sigma.$$

Comme on peut prendre σ arbitrairement petit, pourvu que l soit assez grand, on peut rendre θ arbitrairement petit.

33. Détermination des branches d'un plan $[k]$ d'indice déterminé pour une valeur x de grand module.

a. Soit η' l'une des racines de $R = 0$, supposée simple et non nulle. En posant $R = (z - \eta')S$, on peut écrire (I)

$$z = \eta' + \frac{PLz + Q}{xS} = \varphi(z)$$

et faire la suite des approximations

$$z_0 = \eta', \qquad z_1 = \eta' + \frac{P(z_0)Lz_0 + Q(z_0)}{xS(z_0)}, \qquad \ldots, \qquad z_{n+1} = \varphi(z_n).$$

En prenant

$$Lz_0 = \log|\eta'| + \operatorname{Arg}\eta' + i2(k-1)\pi \qquad \text{et} \qquad M = \left|\frac{P(z_0)Lz_0 + Q(z_0)}{S(z_0)}\right|,$$

on a

$$|z_1 - z_0| = \frac{M}{l}.$$

Considérons d'autre part

$$|\varphi'| = \frac{1}{l}\left|\left[\frac{1}{S}\left(\frac{P}{z} + P'Lz + Q'\right) - \frac{S'}{S^2}(PLz + Q)\right]\right|.$$

Pour z dans un cercle (γ) de centre η', ne contenant ni l'origine, ni aucune racine de $S = 0$, le crochet est borné, et l'on a, pour l assez grand,

$$|\varphi'| < \frac{C}{l} < N < \frac{1}{2},$$

C étant une constante. Il en résulte, d'après le paragraphe 11, la convergence dans (γ).

b. Soit maintenant $\eta' \neq 0$ racine d'ordre m de $R = 0$.

En posant ici $R = (z - \eta')^m S_1$, on peut écrire

$$z = \eta' + \left[\frac{PLz + Q}{xS_1}\right]^{\frac{1}{m}} = \varphi_1(z),$$

$$|\varphi'_1| = l^{-\frac{1}{m}}\left|\frac{1}{S_1^2}\left[\frac{P}{z} + P'Lz + Q'\right)S_1 - S'(PLz + Q)\right]\left(\frac{PLz + Q}{S_1}\right)^{\frac{1}{m}-1}\right|.$$

Or, x étant arbitraire, on n'a pas $P(\eta')Lz_0 + Q(\eta') = 0$ et par suite, $PLz + Q$ ne s'annule pas dans un cercle (γ_1) de centre η' et de rayon δ_1 assez petit. On a donc $|\varphi'| < \lambda$, petit avec $\frac{1}{l}$ dans (γ_1).

On a m points $z_1 = \varphi_1(z_0)$ distants mutuellement de

$$2\delta_2 = 2|z_1 - z_0| \sin\frac{\pi}{m};$$

on peut prendre l assez grand pour avoir $|z_1 - z_0| \leqq \frac{\delta_1}{2}$, les m cercles (γ_2) de centres z_1 et de rayon δ_2 seront donc extérieurs les uns aux autres et contenus dans (γ_1).

On peut, d'autre part, prendre l assez grand pour avoir $\lambda < \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{m}$, d'où résulte $\frac{\lambda}{1-\lambda} < \sin\frac{\pi}{m}$ et

$$|z_{n+1} - z_1| < |z_1 - z_0|[\lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^n] < |z_1 - z_0|\frac{\lambda}{1-\lambda} < \delta_2,$$

ce qui montre que z_{n+1} est dans (γ_2). On a donc m racines Z voisines de η'.

34. Supposons maintenant $\eta' = 0$, soit $R(0) = 0$.

Si $a_0 \neq 0$, on peut écrire

$$P = a_0 + z S_1, \qquad Q = z^\mu T_1, \qquad R = z^\nu (c_\nu + z V_1),$$

$$z = \left[\frac{P L z + Q}{x(c_\nu + z V_1)}\right]^{\frac{1}{\nu}} = x^{-\frac{1}{\nu}} \left[\frac{a_0 L z + z L z S_1 + z^\mu T_1}{c_\nu + z V_1}\right]^{\frac{1}{\nu}},$$

ou encore

$$z = x^{-\frac{1}{\nu}} \left[\frac{a_0 L z}{c_\nu} + \frac{z L z S_1 - \frac{a_0}{c_\nu} V_1 z L z + z^\mu T_1}{c_\nu + z V_1}\right]^{\frac{1}{\nu}} = \varphi(z).$$

Prenons comme valeur inititiale z_0 une racine du plan $[k]$ de

$$c_\nu x z_0^\nu = a_0 L z_0$$

qui, en posant $z_0^\nu = \frac{1}{w}$ et $\Lambda = \frac{-a_0}{\nu c_\nu}$, se ramène à l'équation (γ)

$$\Lambda w L w = x.$$

D'après le paragraphe 30, $|w|$ est voisin de $\frac{l}{\log l}$ et $|z_0|$ est d'ordre $\left(\frac{\log l}{l}\right)^{\frac{1}{\nu}}$.

Si $z_1 = \varphi(z_0)$,

$$|z_1 - z_0| = \rho_0 \left| \left[1 + \frac{c_\nu \left(z_0 L z_0 S_1 - \frac{a_0}{c_\nu} V_1 z_0 L z_0 + z_0^\mu T_1\right)}{a_0 (c_\nu + z_0 V_1) L z_0}\right]^{\frac{1}{\nu}} - 1 \right|$$

et l'on voit, d'après l'inégalité $(\mathcal{J})$, que $\left|\frac{z_1 - z_0}{\rho_0}\right|$ est, si $\mu > 0$, d'un ordre inférieur ou égal à celui de $\rho_0^{\frac{1}{\nu}}$ et, si $\mu = 0$, d'ordre $(\log \rho_0)^{-\frac{1}{\nu}}$ et petit avec ρ_0.

Considérons ensuite

$$|\varphi'| = \frac{l^{-\frac{1}{\nu}}}{\nu} \left| \frac{a_0}{c_\nu} L z + \frac{z L z S_1 - \frac{a_0}{c_\nu} V_1 z L z + z^\mu T_1}{c_\nu + z V_1} \right|^{\frac{1}{\nu} - 1}$$

$$\left| \frac{a_0}{c_\nu z} + \frac{S_1 + S_1 L z + z L z S_1' - \frac{a_0}{c_\nu}(V_1 + V_1 L z + z L z V_1') + \mu z^{\mu-1} T_1 + z^\mu T_1'}{c_\nu + z V_1} \right.$$

$$\left. - \frac{(z V_1' + V_1)\left(z L z S_1 - \frac{a_0}{c_\nu} V_1 z L z + z^\mu T_1\right)}{(c_\nu + z V_1)^2} \right|.$$

Comme ρ_0 est de l'ordre $\left(\frac{\log l}{l}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, $|Lz|$, pour z voisin de z_0, est d'ordre $\log l$; par suite, le second facteur est de l'ordre de $(\log l)^{\frac{1}{\nu}-1}$.

Dans le troisième facteur, $\left|\frac{a_0}{c_\nu z}\right|$ est de l'ordre $\left(\frac{l}{\log l}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, tandis que les autres termes sont, en module ou plus de l'ordre de $\log l$.

Il en résulte que $|\varphi'|$ est d'ordre $l^{-\frac{1}{\nu}}(\log l)^{\frac{1}{\nu}-1}\left(\frac{l}{\log l}\right)^{\frac{1}{\nu}} = (\log l)^{-1}$.

Les approximations convergent donc pour ρ_0 assez petit.

Si $a_0 = 0$, on peut écrire $P = z^\lambda S_2$, $Q = b_0 + zT_2$, $R = z^\nu(c_\nu + zV_2)$, ce qui donne

$$z = \left[\frac{b_0 + zT_2 + z^\lambda L z S_2}{x(c_\nu + zV_2)}\right]^{\frac{1}{\nu}} = x^{-\frac{1}{\nu}}\left[\frac{b_0}{c_\nu} + \frac{zT_2 - \frac{b_0}{c_\nu} zV_2 + z^\lambda L z S_2}{c_\nu + zV_2}\right]^{\frac{1}{\nu}} = \varphi(z).$$

Prenons ici

$$z_0 = x^{-\frac{1}{\nu}}\left(\frac{b_0}{c_\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \qquad z_1 = x^{-\frac{1}{\nu}}\left[\frac{b_0}{c_\nu} + \frac{z_0 T_2 - \frac{b_0}{c_\nu} z_0 V_2 + z_0^\lambda L z_0 S_2}{c_\nu + z_0 V_2}\right]^{\frac{1}{\nu}} = \varphi(z_0);$$

il en résulte

$$|z_1 - z_0| = \left|\frac{b_0}{c_\nu}\right|^{\frac{1}{\nu}} l^{-\frac{1}{\nu}}\left|\left[1 + \frac{c_\nu\left[z_0 T_2 - \frac{b_0}{c_\nu} z_0 V_2 + z_0^\lambda L z_0 S_2\right]}{b_0(c_\nu + z_0 V_2)}\right]^{\frac{1}{\nu}} - 1\right|$$

et $\left|\frac{z_1 - z_0}{z_0}\right|$ est d'un ordre inférieur ou égal à celui de $\rho_0^{\frac{1}{\nu}}$ si $\lambda > 1$, ou de l'ordre de $|\rho_0 \log \rho_0|^{\frac{1}{\nu}}$ ou $(\log l)^{\frac{2}{\nu}} l^{-\frac{1}{\nu}}$, si $\lambda = 1$, donc petit dans les deux cas.

Considérons

$$|\varphi'| = \frac{l^{-\frac{1}{\nu}}}{\nu}\left|\left[\frac{b_0}{c_\nu} + \frac{zT_2 - \frac{b_0}{c_\nu} zV_2 + z^\lambda L z S_2}{c_\nu + zV_2}\right]^{\frac{1}{\nu}-1}\right|$$

$$\left|\frac{zT'_2 + T_2 - \frac{b_0}{c_\nu}(zV'_2 + V_2) + \lambda z^{\lambda-1} L z S_2 + z^{\lambda-1} S_2 + z^\lambda L z S'_2}{c_\nu + zV_2}\right.$$

$$\left. - \frac{(zV'_2 + V_2)\left(zT_2 - \frac{b_0}{c_\nu} zV_2 + z^\lambda L z S_2\right)}{(c_\nu + zV_2)^2}\right|.$$

Si $\lambda = 1$, on a $|z^{\lambda-1} L z|$ de l'ordre de $|\log\rho|$ ou $|\log l|$, mais $l^{-\frac{1}{\nu}}\log l$ tend encore vers o ainsi que $|\varphi'|$. On aurait la même conclusion pour $\lambda > 1$.

On a donc, dans tous les cas, ν racines Z voisines de o et, en définitive, r racines voisines des racines η' de $R = 0$.

35. A côté de ces racines qui existent quel que soit l'ordre de succession de p, q, r, nous allons maintenant déterminer des racines grandes avec l, qui existent quand r n'est pas le plus grand des nombres p, q, r.

a. Supposons p supérieur à q et r.

Posons $P = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \ldots + a_0 = a_p z^p + S$. On peut écrire

$$z^{p-r} = \frac{xR - Q - SLz}{a_p z^r L z}$$

$$= \frac{x\left[c_r + \frac{c_{r-1}}{z} + \ldots\right] - [b_q z^{q-r} + \ldots] - [a_{p-1} z^{p-r-1} + \ldots] L z}{a_p L z}$$

et, en posant

$$A = \frac{c_{r-1}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^r}, \quad B = b_q z^{q-r} + \ldots + \frac{b_0}{z^r}, \quad C = a_{p-1} z^{p-r-1} + \ldots + \frac{a_0}{z^r},$$

$$z = \left[\frac{c_r x}{a_p L z} + \frac{xA - B - CLz}{a_p L z}\right]^{\frac{1}{p-r}} = \varphi_1(z).$$

Prenons comme valeur z_0 l'une des $(p - r)$ racines de l'équation (γ')

$$z_0 = \left[\frac{c_r x}{a_p L z_0}\right]^{\frac{1}{p-r}}$$

Évaluons, en faisant $z_1 = \varphi(z_0)$ et en utilisant l'égalité précédente

$$|z_1 - z_0| = |z_0| \left| \left[1 + \frac{xA - B - CLz_0}{a_p z_0^{p-r} L z_0}\right]^{\frac{1}{p-r}} - 1 \right| = \rho_0 \left| [1 + \psi_1(z_0)]^{\frac{1}{p-r}} - 1 \right|.$$

Comme $c_r x = a_p z_0^{p-r} L z_0$, $\left|\frac{xA}{z_0^{p-r} L z_0}\right|$ est de l'ordre de ρ_0^{-1} ainsi que $\left|\frac{C}{z_0^{p-r}}\right|$ et $\left|\frac{B}{z_0^{p-r} L z_0}\right|$ est d'ordre supérieur, puisque $p > q$.

Donc $|\psi_1(z_0)|$ est au plus de l'ordre de ρ_0^{-1} et l'on peut écrire

$$|z_1 - z_0| < \rho_0 M_1 \rho_0^{-\frac{1}{p-r}} = M \rho_0^{1-\frac{1}{p-r}},$$

d'après l'inégalité $(\mathcal{J})$, M_1 étant borné

Considérons, pour z dans un cercle (γ_1) de centre z_0 et de rayon $\sigma\rho_0$

$$|\varphi'_1| = \frac{1}{p-r}\left|\left[\frac{c_r x}{a_p \mathrm{L}z} + \frac{x\mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{C}\mathrm{L}z}{a_p \mathrm{L}z}\right]^{\frac{1}{p-r}-1}\right|$$
$$\times\left|\frac{-c_r x}{a_p z(\mathrm{L}z)^2} + \frac{(x\mathrm{A}' - \mathrm{B}')}{a_p \mathrm{L}z} - \frac{(x\mathrm{A} - \mathrm{B})}{a_p z(\mathrm{L}z)^2} - \frac{\mathrm{C}'}{a_p}\right|.$$

Dans le voisinage de z_0, $\left|\frac{x}{z(\mathrm{L}z)^2}\right|$ est de l'ordre de $\rho_0^{p-r-1} = \log\rho_0$, tandis que les modules des autres termes du second facteur sont, au plus, de l'ordre de ρ_0^{p-r-2}.

D'autre part $\left|\frac{x}{\mathrm{L}z}\right|^{\frac{1}{p-r}-1}$ est de l'ordre de $\rho_0^{(p-r)\left(\frac{1}{p-r}-1\right)} = \rho_0^{1-p+r}$ et, par suite, $|\varphi'_1|$ est de l'ordre de $(\log\rho_0)^{-1}$. On peut donc écrire, N_1 étant borné,

$$|\varphi'_1| < \frac{\mathrm{N}_1}{\log\rho_0}.$$

Or, on peut écrire comme au paragraphe 11

$$|z_{n+1} - z_0| < \frac{|z_1 - z_0|}{1 - \frac{\mathrm{N}_1}{\log\rho_0}} < \frac{\mathrm{M}_1 \rho_0^{1-\frac{1}{p-r}}}{1 - \frac{\mathrm{N}_1}{\log\rho_0}}.$$

Pour avoir z_{n+1} dans un cercle (γ_1) de rayon $\sigma\rho_0$, il suffit que

$$\rho_0^{\frac{1}{p-r}} > \frac{\mathrm{M}_1}{\sigma\left(1 - \frac{\mathrm{N}_1}{\log\rho_0}\right)},$$

ce qui a lieu si $\log\rho_0 > 2\mathrm{N}_1$ et $\rho_0^{\frac{1}{p-r}} > 2\mathrm{M}_1\sigma^{-1}$. Comme, d'après le paragraphe 9, les $(p-r)$ racines z_0 sont distantes d'environ $2\rho_0 \sin\frac{\pi}{p-r}$, on supposera $\sigma < \sin\frac{\pi}{p-r}$ pour que les cercles (γ_1) ne se coupent pas; chacun d'eux contiendra au moins un point Z limite des z_n.

b. Supposons q supérieur à p et r. On peut écrire (I)

$$b_q z^q = c_r x z^r + x(c_{r-1} z^{r-1} + \quad + c_0) - (a_p z^p + \ldots + a_0)\mathrm{L}z - (b_{q-1} z^{q-1} + \ldots + b_0),$$

d'où, en divisant par z^r et en posant

$$D = \frac{1}{b_q}\left(\frac{c_{r-1}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^r}\right), \qquad E = \frac{1}{b_q}\left(a_p z^{p-r} + \ldots + \frac{a_0}{z^r}\right).$$

$$F = \frac{1}{b_q}\left(b_{q-1} z^{q-r-1} + \ldots + \frac{b_0}{z^r}\right),$$

$$z = \left[\frac{c_r x}{b_q} + Dx - ELz - F\right]^{\frac{1}{q-r}} = \varphi_2(z).$$

Prenons pour z_0 l'une des $(q-r)$ racines de

$$z_0 = \left[\frac{c_r x}{b_q}\right]^{\frac{1}{q-r}}.$$

Évaluons, en faisant $z_1 = \varphi_2(z_0)$,

$$|z_1 - z_0| = z_0 \left| \left[1 + \frac{xD - ELz_0 - F}{z_0^{q-r}}\right]^{\frac{1}{q-r}} - 1 \right| :$$

ici $\left|\frac{ELz_0}{z_0^{q-r}}\right.$ est au plus égal à une quantité de l'ordre de $\rho_0^{-1}\log\rho_0$ et, d'autre part, $\left|\frac{xD - F}{z_0^{q-r}}\right|$ est au plus égal à une quantité de l'ordre de ρ_0^{-1}; on peut donc écrire, M_2 étant un nombre fixe

$$|z_1 - z_0| < M_2 \rho_0^{1-\frac{1}{q-r}} (\log\rho_0)^{\frac{1}{q-r}}.$$

Considérons d'autre part

$$\varphi_2' = \frac{1}{q-r}\left|\frac{c_r x}{b_q} + Dx - ELz - F\right|^{\frac{1}{q-r}-1} \left|D'x - E'Lz - \frac{E}{z} - F'\right|$$

le premier facteur est, par x, de l'ordre de ρ_0^{1-q+r}, le second est, au plus, par $E'Lz$, de l'ordre de $\rho_0^{q-r-2}\log\rho_0$. On peut donc écrire, N_2 étant borné,

$$|\varphi_2'| < \frac{N_2 \log\rho_0}{\rho_0},$$

$$|z_{n+1} - z_0| < \frac{|z_1 - z_0|}{1 - \frac{N_2\log\rho_0}{\rho_0}} < \frac{M_2 \rho_0^{1-\frac{1}{q-r}} (\log\rho_0)^{\frac{1}{q-r}}}{1 - \frac{N_2\log\rho_0}{\rho_0}}.$$

Pour que z_{n+1} soit dans un cercle (γ_2) de centre z_0 et de rayon $\sigma\rho_0$, il

suffit que

$$\rho_0^{\frac{1}{q-r}} > \frac{M_2(\log\rho_0)^{\frac{1}{q-r}}}{\sigma\left(1-\frac{N_2\log\rho_0}{\rho_0}\right)},$$

donc que ρ_0 vérifie les deux inégalités

$$\rho_0 > 2N_2\log\rho_0, \qquad \rho_0^{\frac{1}{q-r}} > \frac{2M_2}{\sigma}(\log\rho_0)^{\frac{1}{q-r}}.$$

Comme l'on a $(q-r)$ points z_0 distants de $2\rho_0\sin\frac{\pi}{q-r}$, on prendra encore $\sigma < \sin\frac{\pi}{q-r}$ pour que les cercles (γ_2) ne se coupent pas; chacun contiendra encore une racine Z, au moins, limite des z_n.

On a donc, en définitive, $(p-r)$ ou $(q-r)$ racines Z grandes avec l et, avec les r racines bornées, p ou q racines.

36. **Absence d'autres racines z' distinctes des Z.** — Supposons toujours $l = |x|$ suffisamment grand et désignons par z' une racine hypothétique de $V(z) = PLz + Q - xR = 0$, distincte des racines Z obtenues par approximations dans les paragraphes 33 à 35; nous allons montrer, d'une manière générale :

1° Qu'*à toute racine z' correspond une racine Z telle que $|z'-Z|$ tende vers 0 ou croisse comme une fonction de l.*

2° En considérant encore le développement $(\mathcal{D})$ du paragraphe 18,

$$(\mathcal{D})\quad V(z) = (z-z')\left[V'(z') + \frac{(z-z')}{2}V''(z') + \ldots + \frac{(z-z')^{h-1}}{h!}V^{(h)}(z') + \ldots\right],$$

que l'*inégalité*

$$(\mathcal{J}_1)\qquad |V'(z')| > \left|\frac{(z-z')}{2}V''(z') + \ldots + \frac{(z-z')^{h-1}}{h!}V^{(h)}(z') + \ldots\right|$$

est vérifiée dans un cercle (Γ) de centre z' dont le rayon Δ, fonction de l, est en général suivant la valeur de $|Z|$, un infiniment petit d'ordre inférieur ou un infiniment grand d'ordre supérieur à celui de $|z'-Z|$. Il en résulte que, $V(z) = 0$ n'ayant d'autre racine que z' dans (Γ) et (Γ) contenant Z pour l assez grand, z' se confond avec Z.

Nous considérons d'abord les racines z' de module borné.

a. Supposons d'abord $c_0 \neq 0$.

D'après le paragraphe 28, quel que soit c_0, $\rho' = |z'|$ est voisin du module d'une racine η' de $R = 0$; donc, si N' est un nombre quelconque supérieur à tous les $|\eta'|$, on peut supposer l assez grand pour avoir, pour un plan $[h]$ déterminé, $\rho' < N'$.

D'autre part, pour $c_0 \neq 0$, on peut trouver N'', inférieur à tous les $|\eta'|$ et tel que l'on ait $\rho' > N''$.

En effet, en supposant d'abord $a_0 \neq 0$, si ρ' tendait vers 0 avec $\frac{1}{l}$, le coefficient de l dans (2) du paragraphe 28 étant voisin de β_0, l'égalité serait impossible, θ' restant borné. Il en est de même en supposant $a_0 = a_1 = \ldots = 0$, le coefficient de l commençant par un terme en ρ' de degré inférieur à celui du terme par lequel commence le dénominateur.

On a donc $N'' < \rho' < N'$.

α. En supposant η' racine simple et posant $R(z') = (z' - \eta')S(z')$, on a

$$|z' - \eta'| = l^{-1}\left|\frac{PLz' + Q}{S}\right|$$

qui montre, z' étant supposée d'après le paragraphe 28, voisine de η' et, par suite, le second facteur étant borné, que $|z' - \eta'|$ est de l'ordre de l^{-1}, comme $|Z - \eta'|$ et $|z' - Z|$. On a, d'autre part,

$$|V'(z')| = \left|\frac{P}{z'} + P'Lz' + Q' - x[S + (z' - \eta')S']\right|$$

de l'ordre de l, z' n'étant pas racine de $S = 0$. Il en est de même de $|V^{(n)}(z')|$ pour $n \leqq r$. Pour $n > r$, $V^{(n)}(z')$ ne comprend plus que les termes, de module borné, qui proviennent de $Q^{(n)}(z')$ et ceux qui proviennent de $\frac{d^n}{dz^n}(PLz)$. D'après une inégalité du paragraphe 18, on peut trouver M tel que l'on ait

$$\left|\frac{d^n}{dz^n}(PLz)\right|_{z=z'} < n!\,\frac{M}{N''^h}.$$

Donc, dans le second membre de $(\mathcal{J}_1)$, $|V''(z')| \ldots |V^{(h)}(z')| \ldots$, sont au plus de l'ordre de l, tandis que le premier membre est exactement de cet ordre. On pourra donc vérifier $(\mathcal{J}_1)$ dans un cercle (Γ_0) de centre z' et de rayon $\Delta_0 = \sigma N''$, σ étant indépendant de l, ainsi que $\Delta_0 > |z' - Z|$.

β. Supposons maintenant η' racine d'ordre m de $R = 0$.

On sait, d'après le paragraphe 33, que l'on peut écrire près de η' et, par suite, de z', $|\varphi'_{1z}| < l^{-\frac{1}{m}}N$. Comme l'on doit avoir $z' = \varphi_1(z')$, l'on a

$$|z' - z_1| = |\varphi_1(z') - \varphi_1(z_0)| < |z' - z_0| l^{-\frac{1}{m}}N.$$

Or, z' étant voisine de $z_0 = \eta'$, on peut écrire, en posant $R = (z' - \eta')^m S_1$,

$$|z' - z_0| = l^{-\frac{1}{m}} \left| \left[\frac{PLz' + Q}{S_1} \right]^{\frac{1}{m}} \right|,$$

ce qui montre que $|z' - z_0|$ est aussi de l'ordre de $l^{-\frac{1}{m}}$ et, par suite, que $|z' - z_1|$ est de l'ordre de $l^{-\frac{2}{m}}$, ainsi que $|Z - z_1|$ et $|Z - z'|$.

On a ici

$$V(z) = PLz + Q - x(z - \eta')^m S_1,$$

$$V'(z) = \frac{d}{dz}(PLz) + Q' - x[m(z - \eta')^{m-1} S_1 + (z - \eta')^m S'_1],$$

ce qui montre que $|V'(z')|$ est, par $x(z' - \eta')^{m-1}$, de l'ordre de $l^{\frac{1}{m}}$, puisque $|z' - \eta'|$ est de l'ordre de $l^{-\frac{1}{m}}$. De même, si $h \leqq m$, $|V''(z')|$ est de l'ordre de $l^{\frac{2}{m}}$, ..., $|V^{(h)}(z')|$ de l'ordre de $l^{\frac{h}{m}}$. Pour $m < h \leqq r$, $V^{(h)}(z')|$ est de l'ordre de l. Pour $r < h$, $|V^{(h)}(z')|$ est, par $\frac{d^h}{dz^h}(PLz)$, de l'ordre de N^{r-h}. On peut donc vérifier $(\mathcal{J}_1)$ pour $|z - z'| \leqq \Delta_1$ de l'ordre de $l^{-\frac{1}{m}}$, et le cercle (Γ_1) de centre z' et de rayon Δ_1 contiendra z, l étant assez grand.

b. Supposons $c_0 = c_1 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$, $c_\nu \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.

On a, d'après les notations du paragraphe 34,

$$z' = x^{-\frac{1}{\nu}} \left[\frac{a_0 L z'}{c_\nu} + \frac{z' L z' S_1 - \frac{a_0}{c_\nu} V_1 z' L z' + z' \mu T_1}{c_\nu + z' V_1} \right]^{\frac{1}{\nu}}, \qquad z_0 = x^{-\frac{1}{\nu}} \left[\frac{a_0 L z_0}{c_\nu} \right]^{\frac{1}{\nu}}.$$

Nous savons déjà, par le paragraphe 34, que ρ_0 est de l'ordre de

$$l^{-\frac{1}{\nu}} (\log l)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Nous allons voir qu'il en est de même pour le module d'une racine z' telle que ρ' tende vers o avec $\frac{1}{l}$.

En effet, ε tendant vers o avec ρ', on peut écrire, même si $\mu = 0$

$$z' = x^{-\frac{1}{\nu}}\left[\frac{a_0 \mathrm{L}\, z'}{c_\nu}\right]^{\frac{1}{\nu}}(1+\varepsilon), \qquad \frac{z'}{z_0} = \left(\frac{\mathrm{L}\, z'}{\mathrm{L}\, z_0}\right)^{\frac{1}{\nu}}(1+\varepsilon).$$

Supposons ρ' d'ordre supérieur à ρ_0; soit N un nombre, que l'on peut prendre d'ailleurs arbitrairement grand; on aurait $\rho' > \mathrm{N}\rho_0$ pour ρ_0 inférieur à une certaine valeur et, d'autre part, puisqu'ici l'on a $|\log \rho'| < |\log \mathrm{N}\rho_0| < |\log \rho_0| + \log \mathrm{N}$, il viendrait

$$\left|\frac{\mathrm{L}\, z'}{\mathrm{L}\, z_0}\right| = \left|\frac{\log \rho' + i \arg z'}{\log \rho_0 + i \arg z_0}\right| < \frac{\log \rho_0 + \log \mathrm{N} + \arg z'}{\log \rho_0 - \arg z_0}$$

quantité qui tend vers 1 quand ρ_0 tend vers o, tandis que l'on aurait $\left|\frac{z'}{z_0}\right| > \mathrm{N}$, ce qui rendrait l'égalité impossible.

Supposons ρ' d'ordre inférieur à ρ_0, on aurait pour N, qui pourrait être arbitrairement petit $\rho' < \mathrm{N}\rho_0$ et $|\log \mathrm{N}\rho_0| = |\log \rho_0| + |\log \mathrm{N}|$, ce qui entraînerait

$$\left|\frac{\mathrm{L}\, z'}{\mathrm{L}\, z_0}\right| > \frac{|\log \rho_0| + |\log \mathrm{N}| - \arg z'}{\log \rho_0 + \arg z_0}$$

qui tendrait vers 1, rendant encore l'égalité impossible.

Nous n'avons pas encore épuisé toutes les hypothèses. Il pourrait arriver, en effet, que ρ' ne soit ni d'ordre supérieur, ni d'ordre inférieur à ρ_0, mais dans un tel cas il existerait toujours des valeurs ρ_0 arbitrairement petites et pour lesquelles on aurait $\rho' = \mathrm{N}\rho_0$, N étant un nombre quelconque positif. En effet, si pour ρ_0 assez petit, on avait constamment, par exemple, $\rho' > \mathrm{N}\rho_0$, ρ' serait d'ordre supérieur à ρ_0. On aurait donc, pour cette égalité,

$$\mathrm{N} = \left|\frac{\log \mathrm{N} + \log \rho_0 + i \arg z'}{\log \rho_0 + i \arg z_0}\right|^{\frac{1}{\nu}} |1+\varepsilon|,$$

ce qui est impossible pour $\mathrm{N} \neq 1$, puisque le second membre tend vers 1.

Il faut donc que ρ' et ρ_0 soient du même ordre.

L'on peut donc écrire, $|m|$ étant inférieur à une quantité de l'ordre de $(\log \rho_0)^{-1}$, c'est-à-dire de $(\log l)^{-1}$,

$$\left|\frac{\mathrm{L}\, z'}{\mathrm{L}\, z_0}\right| = 1 + \mathrm{L}\left(\frac{z'}{z_0}\right) : \mathrm{L}\, z_0 = 1 + m.$$

D'autre part, on a

$$|z'-z_0| = \rho_0\left|\left[\frac{Lz'}{Lz_0}+\frac{c_\nu\left(z'Lz'S_1-\frac{a_0}{c_\nu}V_1z'Lz'+z'^\mu T_1\right)}{a_0(c_\nu+z'V_1)Lz_0}\right]^{\frac{1}{\nu}}-1\right|,$$

et, si $\mu=0$, le module du second terme du crochet est inférieur à une quantité de l'ordre précédent. Il en résulte que $|z'-z_0|$ est de l'ordre de $\rho_0(\log l)^{-\frac{1}{\nu}}$, d'après l'inégalité $(\mathcal{J})$, c'est-à-dire de l'ordre de $l^{-\frac{1}{\nu}}$ puisque ρ_0 est de l'ordre de $l^{-\frac{1}{\nu}}(\log l)^{\frac{1}{\nu}}$.

De même $|Z-z_0|$ et $|z'-Z|$ sont de l'ordre de $l^{-\frac{1}{\nu}}$.

Considérons

$$V(z)=(a_0+zS_1)Lz+z^\mu T_1-xz^\nu(c_\nu+zV_1),$$

on a

$$|V'(z')|=\left|(z'S'_1+S_1)Lz'+\frac{(a_0+z'S_1)}{z'}+\mu z'^{\mu-1}T_1+z'^\mu T'_1\right.$$
$$\left.-x[\nu z'^{\nu-1}(c_\nu+z'V_1)+z'^\nu(V_1+z'V'_1)]\right|,$$

de l'ordre de $l^{\frac{1}{\nu}}(\log l)^{\frac{\nu-1}{\nu}}$ par le terme $c_\nu x\nu z'^{\nu-1}$, $|z'^{-1}|$ étant de l'ordre de $l^{\frac{1}{\nu}}(\log l)^{-\frac{1}{\nu}}$.

On a ensuite $|V''(z')|$ de l'ordre de $l^{\frac{2}{\nu}}(\log l)^{\frac{\nu-2}{\nu}}$, ...; en général, pour $h\leqq\nu$, $|V^{(h)}(z')|$ est de l'ordre de $l^{\frac{h}{\nu}}(\log l)^{\frac{\nu-h}{\nu}}$.

Pour $h>\nu$, $|V^{(h)}(z')|$ est de l'ordre de $l^{\frac{h}{\nu}}(\log l)^{-\frac{h}{\nu}}$ par le terme en z'^{-h}. On peut donc prendre $|z-z'|\leqq\Delta_2$ de l'ordre de $l^{-\frac{1}{\nu}}(\log l)^{\frac{1}{\nu}}$ tel que $(\mathcal{J}_1)$ soit vérifiée dans (Γ_2) de centre z' et de rayon Δ_2 et que (Γ_2) contienne Z pour l assez grand.

c. Supposons $c_0=\ldots=c_{\nu-1}=0$, $c_\nu\neq 0$, $a_0=\ldots=a_{l-1}=0$, $a_\lambda\neq 0$, $b_0\neq 0$. On doit avoir, d'après les notations du paragraphe 34,

$$z'=x^{-\frac{1}{\nu}}\left[\frac{b_0}{c_\nu}+\frac{z'T_2+z'^\lambda Lz'S_2-\frac{b_0}{c_\nu}z'V_2}{c_\nu+z'V_2}\right]^{\frac{1}{\nu}},\qquad z_0=x^{-\frac{1}{\nu}}\left(\frac{b_0}{c_\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

d'où

$$|z'-z_0| = \rho_0 \left| \left[1 + \frac{c_\nu\left(z'T_2 + z'^\lambda L z' S_2 - \frac{b_0}{c_\nu} z' V_2\right)}{b_0(c_\nu + z' V_2)} \right]^{\frac{1}{\nu}} - 1 \right|.$$

On voit, par division membre à membre, que ρ' et ρ_0 sont du même ordre.

On peut supposer $\lambda > 0$, car pour $\lambda = 0$, on retrouve le cas précédent où l'on suppose $\mu = 0$ dans les expressions de (b).

Le second terme du crochet est, au plus, si $\lambda = 1$, de l'ordre de $l^{-\frac{1}{\nu}}(\log l)$; par suite, d'après ($\mathcal{J}$), $|z'-z_0|$ est au plus de l'ordre de $l^{-\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu^2}}(\log l)^{\frac{1}{\nu}}$. D'autre part,

$$V(z) = z^\lambda L z S_2 + b_0 + z^\mu T_2 - x z^\nu (c_\nu + z V_2)$$

donne $|V'(z')|$ de l'ordre de $l^{\frac{1}{\nu}}$ par le terme en $x z'^{\nu-1}$.

De même, pour $h \leqq \nu$, $|V^{(h)}(z')|$ est de l'ordre de $l^{\frac{h}{\nu}}$ et, pour $h > \nu$, inférieur à une quantité de l'ordre de $l^{\frac{h-1}{\nu}}$. par les dérivées de Lz.

On peut donc prendre $|z-z'| \leqq \Delta_3$ de l'ordre de $l^{-\frac{1}{\nu}}$ tel que ($\mathcal{J}_1$) soit vérifiée dans (Γ_3) de centre z' et de rayon Δ_3 et que (Γ_3) contienne Z, puisque $|z'-z|$ est aussi de l'ordre de $l^{-\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu^2}}(\log l)^{\frac{1}{\nu}}$.

Nous avons donc montré, en résumé, que les racines z' de module borné ne sont autres que les racines Z voisines des η'.

37. Nous allons maintenant considérer des racines z' dont le module croît avec l.

a. Supposons p supérieur à q et r.

On doit avoir, d'après les notations du paragraphe **35**,

$$z' = \left[\frac{c_r x}{a_p L z'} + \frac{x A - B - C L z'}{a_p L z'} \right]^{\frac{1}{p-r}}, \qquad z_0 = \left[\frac{c_r x}{a_p L z_0} \right]^{\frac{1}{p-r}}$$

On voit, d'après la forme de A, B, C, et comme l'on a

$$a_p z'^{p-r} \left(1 + \frac{C}{a_p z'^{p-r}} + \frac{B}{a_p z'^{p-r} L z'} \right) L z' = x(c_r + A), \qquad a_p z_0^{p-r} L z_0 = x c_r,$$

que ρ' est, comme ρ_0, de l'ordre de $l^{\frac{1}{p-r}}(\log l)^{-\frac{1}{p-r}}$.

En effet, en divisant membre à membre les expressions précédentes, on peut écrire

$$\frac{z_0^{p-r}}{z'^{p-r}} = \frac{\mathrm{L}z'}{\mathrm{L}z_0}(1+\varepsilon), \qquad (1+\varepsilon) = \left(\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{A}}{c_r}}\right)\left(1+\frac{\mathrm{C}}{a_p z'^{p-r}}+\frac{\mathrm{B}}{a_p z'^{p-r}\mathrm{L}z'}\right),$$

et l'on voit, comme au paragraphe 36, *b*, que ρ' et ρ_0 sont du même ordre. Ils sont d'ailleurs équivalents, en effet, comme l'on peut écrire, N_1 et N_2 étant fixes $\mathrm{N}_1\rho_0 < \rho' < \mathrm{N}_2\rho_0$, il en résulte,

$$\frac{\log \mathrm{N}_1}{\log \rho_0} + 1 < \frac{\log \rho'}{\log \rho_0} < \frac{\log \mathrm{N}_2}{\log \rho_0} + 1,$$

qui montre que $\log\rho' : \log\rho_0$ tend vers 1.

Il en est donc de même de

$$\left|\frac{\mathrm{L}z'}{\mathrm{L}z_0}\right| = \left|\frac{\log\rho'}{\log\rho_0} + \frac{i[\log\rho_0 \arg z' - \log\rho' \arg z_0]}{\log\rho_0(\log\rho_0 + i\arg z_0)}\right|,$$

et, par suite, de $\left|\dfrac{z'}{z_0}\right|$.

On peut écrire, d'autre part,

$$z' - z_0 = \left[\frac{c_r x}{a_p \mathrm{L}z_0}\right]^{\frac{1}{p-r}}\left[\left[\frac{\mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z'} + \frac{(x\mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{C}\mathrm{L}z')\mathrm{L}z_0}{c_r x \mathrm{L}z'}\right]^{\frac{1}{p-r}} - 1\right],$$

et aussi, d'après ce qui précède, $|m'|$ étant de l'ordre de $(\log\rho')^{-1}$,

$$\left|\frac{\mathrm{L}z_0}{\mathrm{L}z'}\right| = \left|1 + \mathrm{L}\left(\frac{z_0}{z'}\right) : \mathrm{L}z'\right| = 1 + m'.$$

Le module du second terme du crochet étant de l'ordre de $\rho'^{-1}\log\rho_0$, il en résulte, d'après ($\mathcal{J}$), que le module du second facteur est de l'ordre de $(\log\rho')^{-\frac{1}{p-r}}$ et $|z' - z_0|$ de l'ordre de $\rho_0(\log\rho_0)^{-\frac{1}{p-r}}$.

On a ici

$$\mathrm{V}(z) = a_p z^p \mathrm{L}z - c_r x z^r + \mathrm{B}z^r + \mathrm{C}z^r \mathrm{L}z - x\mathrm{A}z^r = 0,$$

et, en n'écrivant que les termes prépondérants, et comme l'on a $x = \dfrac{a_p}{c_r} z_0^{p-r}\mathrm{L}z_0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}'(z') &= p a_p z'^{p-1}\mathrm{L}z' - c_r x r z'^{r-1} + \ldots \\ &= a_p z_0^{p-1}\mathrm{L}z_0\left[p\left(\frac{z'}{z_0}\right)^{p-1}\left(\frac{\mathrm{L}z'}{\mathrm{L}z_0}\right) - r\left(\frac{z'}{z_0}\right)^{r-1}\right] + \ldots.\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, le crochet est voisin de $(p-r)\neq 0$ et par suite $|V'(z')|$ est de l'ordre de $\rho_0'^{-1}\log\rho_0$.

On voit de même que, pour $h\leqq p$, $|V^{(h)}(z')|$ est de l'ordre de $\rho_0^{p-h}\log\rho_0$. Pour $h>p$, $|V^{(h)}(z')|$ est de l'ordre de $\rho_0'^{-h}$ par les dérivées de Lz_0.

On peut donc vérifier $(\mathcal{J}_1)$ pour $|z-z'|\leqq\Delta_1$ de l'ordre de ρ_0 et, par suite, supérieur à l'ordre de $|z'-z_0|$ et $|z'-Z|$.

b. Supposons q supérieur à p et r.

On a, d'après les notations du paragraphe 35,

$$z'=\left[\frac{c_r x}{b_q}+Dx-ELz'-F\right]^{\frac{1}{q-r}},\qquad z_0=\left[\frac{c_r x}{b_q}\right]^{\frac{1}{q-r}};$$

ρ' et ρ_0 sont de l'ordre de $l^{\frac{1}{q-r}}$ et $\frac{\rho'}{\rho_0}$ est voisin de 1. On a

$$|z'-z_0|=\rho_0\left|\left[1+\frac{b_q(Dx-ELz'-F)}{c_r x}\right]^{\frac{1}{q-r}}-1\right|,$$

et, comme $\left|\frac{ELz'}{x}\right|$ est de l'ordre de $\rho_0^{-1}\log\rho_0$, $|z'-z_0|$ est inférieur à une quantité de l'ordre de $\rho_0^{1-\frac{1}{q-r}}(\log\rho_0)^{\frac{1}{q-r}}$,

$$V(z)=b_q z^q-xc_r z^r-a_p z^p Lz-\ldots$$

donne, puisque $x=\frac{b_q}{c_r}z_0^{q-r}$,

$$|V'(z')=\left|b_q z_0^{q-1}\left[q\left(\frac{z'}{z_0}\right)^{q-1}-r\left(\frac{z'}{z_0}\right)^{r-1}\right]+a_p z'^{p-1}+pa_p z'^{p-1}Lz'+\ldots\right|,$$

de l'ordre de ρ_0^{q-1}, le crochet étant voisin de $(q-r)\neq 0$. On a ensuite $|V^{(h)}(z')|$ de l'ordre de ρ_0^{q-h}. On peut prendre $|z-z'|$ de l'ordre de ρ_0 pour vérifier $(\mathcal{J}_1)$ dans un cercle de centre z' et de rayon Δ_5 d'ordre ρ_0 supérieur à $|z'-z_0|$ et à $|z'-Z|$.

38. **Remarques sur les résultats obtenus.** — *Les branches* (0) *sont celles qui viennent d'être déterminées*, car si pour $l=l_0$, nous considérons une branche Z du plan $[h]$, la valeur de cette branche, pour l arbitrairement grand, est la valeur d'une branche d'un des plans $[h-\mu]$, $[h-\mu+1]$, ..., $[h]$, ..., $[h+\mu]$, μ étant bornée quel que soit l, puisque la variation de θ est bornée.

D'autre part, nous avons trouvé, au Chapitre II, pour x fixe et k croissant, p branches z_k voisines des racines η de $P = 0$ et $(q - p)$ ou $(r - p)$ branches z_k dont le module est de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}}$ ou $k^{\frac{1}{r-p}}$.

Nous trouvons ici, pour k fixe et $l = |x|$ croissant, r branches z_k voisines des racines η' de $R = 0$ et $(p - r)$ ou $(q - r)$ branches Z_k dont le module est de l'ordre de $l^{\frac{1}{p-r}}$ ou $l^{\frac{1}{q-r}}$.

CHAPITRE IV.

BRANCHES (e).

39. Étude de la croissance d'une branche (e). — Nous allons montrer que *le module* ρ *d'une branche* (e) *reste borné*, (*sauf si* $r=p$), *quand* l *croît indéfiniment*, t *restant fixe*.

Nous diviserons cette démonstration en plusieurs parties.

Supposons qu'il existe une branche (e).

a. Nous allons montrer d'abord que l'on peut trouver un nombre N, ne dépendant que de t et des coefficients a_i, b_j, c_k, tel que ρ ne puisse, pour une branche (e), lui rester toujours supérieur, cela en supposant $r \neq p$.

Écrivons les relations (1) et (2) du paragraphe 28 en exprimant les coefficients des termes les plus élevés, d'après les notations du paragraphe 10,

$$(1) \qquad \log\rho = \frac{\left\{\begin{array}{l} |c_r|\, l\rho^{r-p}\cos[t+\upsilon_r-\sigma_p+(r-p)\theta]+\ldots \\ \quad -|b_q|\,\rho^{q-p}\cos[\tau_q-\sigma_p+(q-p)\theta]-\ldots \end{array}\right\}}{a_p \quad +\ldots},$$

$$(2) \qquad \theta = \frac{\left\{\begin{array}{l} |c_r|\, l\rho^{r-p}\sin[t+\upsilon_r-\sigma_p+(r-p)\theta]+\ldots \\ \quad -|b_q|\,\rho^{q-p}\sin[\tau_q-\sigma_p+(q-p)\theta]-\ldots \end{array}\right\}}{|a_p|+\ldots}.$$

Nous poserons, pour abréger, $t+\upsilon_r-\sigma_p=\omega'$, $\tau_q-\sigma_p=\omega''$.

Nous devons distinguer plusieurs cas, suivant les ordres de p, q, r.

Supposons r supérieur à p et q.

On peut écrire, $|\varepsilon|$ et $|\varepsilon'|$ étant petits,

$$(1) \qquad \log\rho = \frac{|c_r|\, l\rho^r\big[\cos[\omega'+(r-p)\theta]+\varepsilon\big]}{|a|\,\rho^p(1+\varepsilon')}.$$

Pour $\rho >$ N assez grand et quand θ est voisin de $\dfrac{-\omega'}{r-p}+\dfrac{\pi}{r-p}+2n\pi$,

le crochet est voisin de -1 et l'égalité est impossible. Or ce fait peut sûrement se présenter puisque θ peut varier de 2π pour une branche (e).

Supposons p supérieur à q et r.

On peut écrire, les ε_1, η_1, ζ étant petits,

$$(2) \qquad \theta = \frac{|c_r|\, l\rho^r[\sin[\omega' + (r-p)\theta] + \varepsilon_1]}{|a_p|\, \rho^p(1+\zeta)} + \eta_1.$$

Comme $\log\rho > \log N$ est grand, il doit en être de même, d'après (1) de $l\rho^{r-p}$; donc le signe du second membre de (2) est, sauf pour des intervalles dont l'étendue tend vers o, celui de $\sin[\omega' + (r-p)\theta]$. Quand θ varie de 2π, ce signe change et comme θ garde le même signe, l'égalité est impossible pour certaines valeurs θ si ρ demeure supérieur à N.

Supposons $q > p > r$.

On peut écrire, en posant $(r-p) = m$, $(q-p) = n$,

$$(1) \qquad \log\rho = \frac{|c_r|\, l[\cos(\omega' + m\theta) + \eta] - |b_q|\, \rho^{q-r}[\cos(\omega'' + n\theta) + \eta']}{|a_p|\, \rho^{p-r}(1+\eta'')}.$$

Nous allons vérifier que le second membre est négatif pour certaines valeurs θ pour lesquelles on a

$$(\mathcal{J}_2) \qquad \cos(\omega' + m\theta) < -|\eta|, \qquad \cos(\omega'' + n\theta) > |\eta'|.$$

Posons $I = \frac{\pi}{|m|}$, $J = \frac{\pi}{|n|}$ et supposons, par exemple, $|m| < |n|$; alors $I > J$.

Si θ varie de $2\pi n + \frac{2\pi - \omega'}{m}$ à $2\pi n + \frac{2\pi - \omega'}{m} + 2\pi$, θ parcourt $2m$ intervalles d'étendue I dans chacun desquels $\cos(\omega' + m\theta)$ a un signe constant, il y a donc au moins un intervalle, puisque $|m| \geqq 1$, tel que $\cos(\omega' + m\theta)$ prenne un signe déterminé.

En supposant $\omega' \neq \omega''$ et pour $I \geqq J$, il correspond à cet intervalle au moins deux intervalles partiels dans lesquels $\cos(\omega'' + n\theta)$ prend des signes différents; on peut donc trouver un intervalle partiel (H) dans lequel $\cos(\omega'' + n\theta)$ prend un signe déterminé.

Comme la longueur de (H) ne dépend que des constantes ω', ω'', m, n, c'est-à-dire de t, σ_p, τ_q, υ_r, p, q, r, elle reste fixe et supérieure à un nombre non nul. Par suite $|\cos(\omega' + m\theta)|$ et $|\cos(\omega'' + n\theta)|$ prennent dans (H) des valeurs qui deviennent supérieures à $|\eta|$ et $|\eta'|$, car η et η' tendent vers o avec $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{N}$, ce qui permet de vérifier les inégalités $(\mathcal{J}_2)$.

Si l'on suppose $|m| > |n|$, il suffit de reprendre le raisonnement avec J au lieu de I.

Les résultats précédents subsistent si $\omega' = \omega''$ pour $|m| \neq |n|$.

Considérons alors le cas où $\omega' = \omega''$ et $|m| = |n|$.

L'hypothèse $m = n$ entraînerait $r = q$, que nous ne considérons pas.

Soit maintenant $m = -n$. Posons $\theta = \theta' + \frac{\omega'}{m}$; on voit qu'il existe au moins un intervalle dans lequel on a

$$\cos(\omega' + m\theta) = \cos(2\omega' + m\theta') < 0 \quad \text{avec} \quad \cos(\omega' - m\theta) = \cos m\theta' > 0,$$

ce qui permet encore de vérifier $(\mathcal{J}_2)$.

Il n'en est pas ainsi, toutefois, si t est tel que l'on ait $\omega' = \lambda\pi$.

Considérons alors la relation (2) que l'on peut écrire

$$(2) \qquad \theta = \frac{|c_r|\, l[\sin(\lambda\pi + m\theta) + \zeta] - |b_q|\, \rho^{q-r}[\sin(\lambda\pi - m\theta) + \zeta']}{|a_p|\, \rho^{p-r}(1 + \eta'')};$$

on a encore un intervalle, au moins, dans lequel $\sin(\lambda\pi + m\theta) < 0$, ce qui entraîne $\sin(\lambda\pi - m\theta) > 0$, rend le second membre de (2) négatif et, par suite, l'égalité impossible.

Supposons $q > r > p$.

On peut écrire, avec les mêmes notations,

$$(1) \quad \log\rho = \frac{|c_r|\, l\rho^{r-p}[\cos(\omega' + m\theta) + \eta] - |b_q|\, \rho^{q-p}[\cos(\omega'' + n\theta) + \eta']}{|a_p|\,(1 + \eta')}$$

et arriver à la même conclusion par une marche identique.

b. Nous voulons montrer que ρ ne peut prendre une valeur grande lorsque k et l deviennent assez grands.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et déterminons l'ordre de grandeur par rapport à k des valeurs l qui correspondraient à une valeur déterminée de θ, soit $\theta = 2k\pi$, pour lesquelles ρ serait grand avec k, ρ devant vérifier une équation (5) indépendante de l car on tire de (I), en posant $P = P' + iP''$, $Q = Q' + iQ''$, $R = R' + iR''$,

$$(3) \qquad P'\log\rho - P''\theta + Q' = l[R'\cos t - R''\sin t] = lM',$$

$$(4) \qquad P''\log\rho + P'\theta + Q'' = l[R'\sin t + R''\cos t] = lM'',$$

ce qui donne, en posant $\theta = 2k\pi + \omega$ et en éliminant l,

$$(5) \qquad \begin{aligned}(P'M'' - P''M')\log\rho - (P'M' + P''M'')\omega \\ + (Q'M'' - Q''M') = 2k\pi(P'M' + P''M'').\end{aligned}$$

Si grand que soit l, le module des racines de $P'M' + P''M'' = 0$, pour $\theta = 2k\pi$, est inférieur à un nombre fixe et, si ρ est supérieur à ce nombre, le module du second membre de (5) est de l'ordre de $k\rho^{p+r}$.

Pour que le module du premier membre soit du même ordre, il faut, si $q > p$, que ρ soit de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}}$ et, si $q < p$, il faut que $\log\rho$ soit de l'ordre de k. Cherchons avec ces conditions, l'ordre de l, on a, en éliminant θ entre (3) et (4),

$$(6) \qquad (P'^2 + P''^2)\log\rho + (P'Q' + P''Q'') = l(P'M' + P''M'')$$

et, en divisant (6) par (5),

$$(7) \qquad \frac{l}{2k\pi} = \frac{(P'^2 + P''^2)\log\rho + (P'Q' + P''Q'')}{(P'M'' - P''M')\log\rho + (Q'M'' - Q''M') - (P'M' + P''M'')\omega}.$$

Supposons $q < p$.

Si (5) admet une racine ρ_k d'ordre $e^{\mu k}$, avec $\mu > 0$, le second membre de (7) est de l'ordre de ρ_k^{p-r}, l_k, valeur correspondante de l, est de l'ordre de $ke^{\mu(p-r)k}$. Pour que l_k soit grand avec k, il faut supposer $p > r$.

Supposons $q > p$.

Si (5) admet une racine ρ_k de l'ordre $k^{\frac{1}{q-p}}$, l_k est, d'après (7), de l'ordre de $k^{1+\frac{p-r}{q-p}} = k^{\frac{q-r}{q-p}}$. Nous supposerons donc de même $q > r$.

Considérons alors les deux cas précédents $q < p$ avec $p > r$ et $q > p$ avec $q > r$.

On peut supposer que pour une valeur l_k de l, grande avec k, l'argument θ d'une branche (e) prenne la valeur $2k\pi$, ρ_k étant la valeur correspondante de ρ.

Quand l croît à partir de l_k, par définition même d'une branche (e), θ varie et prend la valeur $\theta_{k+1} = 2(k+1)\pi$ pour une valeur l_{k+1} de l; soit ρ_{k+1} la valeur correspondante de ρ.

Nous allons montrer que l variant de l_k à l_{k+1}, le module ρ ne prend pas de valeur d'ordre inférieur à celui de ρ_k.

Supposons $q < p$ et $p > r$.

On peut écrire (5) sous la forme

$$\begin{aligned}\log\rho &= 2k\pi\left[\frac{P'M' + P''M''}{P'M'' - P''M'}\right] + \frac{\omega(P'M' + P''M'') - (Q'M'' - Q''M')}{P'M'' - P''M'} \\ &= 2k\pi[\alpha + \varphi(\rho)] + \psi(\rho),\end{aligned}$$

où, d'après les notations de (a), $\alpha = \operatorname{tang}(\omega' + m\theta)$. D'autre part $|\varphi(\rho)|$ est d'ordre ρ^{-1} et $|\psi(\rho)|$ est d'ordre $\leqq \rho^{-1}$, quand $\omega = 0$.

Si t est tel que α soit positif, on peut avoir, pour cette équation en ρ, en posant $\mu = 2\alpha\pi$, une racine ρ_k de l'ordre de $e^{\mu k}$.

Alors, d'après (7), l_k sera de l'ordre $ke^{\mu(p-1)k}$ et l_{k+1} sera de l'ordre de $(k+1)e^{\mu(p-1)k+\mu(p-r)}$; par suite, l_k et l_{k+1} sont du même ordre.

Supposons que, pendant cette variation, ρ prenne une valeur de l'ordre de $e^{\mu k - \mu u}$ (où $u > 0$ ne serait pas borné, d'après notre définition de l'ordre), assez grande toutefois pour que $|P|$, $|Q|$, $|R|$ restent respectivement de l'ordre ρ^p, ρ^q, ρ^r. On peut encore écrire

$$(1) \qquad \log\rho = \frac{c_r\, l\rho^r[\cos(\omega' + m\theta) + \varepsilon] - b_q\, \rho^q[\cos(\omega'' + n\theta) + \varepsilon']}{a_p\, \rho^p(1+\zeta)},$$

$$(2) \qquad \theta = \frac{c_r\, l\rho^r[\sin(\omega' + m\theta) + \eta] - b_q\, \rho^q[\sin(\omega'' + n\theta) + \eta']}{a_p\, \rho^p(1+\zeta)};$$

ici $l\rho^{r-p}$ serait au moins de l'ordre de $ke^{\mu(p-1)u}$ et, ρ^{q-p} étant petit, il en serait de même du second membre de (2), sauf si $\sin(\omega' + m\theta)$ est petit, et l'égalité avec θ, qui est de l'ordre de k, serait impossible pour u assez grand.

Dans le cas où $\sin(\omega' + m\theta)$ est petit, $|\cos(\omega' + m\theta)|$ est voisin de 1. Le second membre de (1) serait encore de l'ordre de $ke^{\mu(p-r)u}$ et l'égalité avec $\log\rho$, qui est de l'ordre de k, serait encore impossible.

Supposons $q > p > r$.

Soit l_k une valeur de l'ordre de $k^{\frac{q-r}{q-p}}$ pour laquelle $\theta_k = 2k\pi$ et l_{k+1} une autre valeur pour laquelle $\theta_{k+1} = 2(k+1)\pi$; les valeurs correspondantes de ρ_k et ρ_{k+1} étant de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}}$.

Supposons que pour l variant de l_k à l_{k+1}, ρ prenne une valeur de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}-u}$, avec $u > 0$. Alors $l\rho^{r-p}$ serait de l'ordre de $k^{1+(p-r)u}$, tandis que ρ^{q-p} serait de l'ordre de $k^{1-(q-p)u}$. L'un des seconds membres de (1) et (2) serait donc de l'ordre de $k^{1+(p-r)u}$ et l'égalité avec $\log\rho$ ou θ serait impossible.

Supposons $q > r > p$.

On voit de même que, si ρ passait par une valeur de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}-u}$, $l\rho^{r-p}$ serait de l'ordre de $k^{1-(r-p)u} > k^{1-(q-p)u}$ qui est de l'ordre de ρ^{q-p};

le second membre de (2) serait, au plus, de l'ordre de $k^{1-(r-p)u}$ et l'égalité avec θ serait impossible.

Ainsi, dans les deux cas envisagés, u ne peut être positif.

Dès lors, s'il existait, quel que soit k, une valeur l_k telle que pour $l = l_k$, l'on ait $\theta = 2k\pi$ et $\rho = \rho_k$ grand avec k, il s'ensuivrait que ρ devrait rester au moins de l'ordre de ρ_k pour l croissant à partir de l_k.

On pourrait donc avoir, pour k assez grand, ρ toujours supérieur à un nombre fixe N, qui pourrait d'ailleurs être arbitrairement grand. Or, nous savons d'après (a), que cela est impossible.

c. Il résulte de ce qui précède que, pour une branche (e), ρ doit rester borné.

Nous avons toutefois supposé $r \neq p$. *Si* $r = p$, *on peut avoir une branche* (e) *pour laquelle* ρ *croît indéfiniment.*

C'est ainsi que pour z définie par $z\mathrm{L}z = -xz + 1$, il vient en posant $z = \frac{1}{y}$, $\mathrm{L}y = x - y$, qui admet une branche (e) tendant vers 0; on a donc pour z une branche (e) qui croît indéfiniment.

Nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur l'existence des branches (e) lorsque $p = r$.

40. Nous allons montrer maintenant que, *s'il existe une branche* (e), ρ *ne peut rester borné sans tendre vers* 0, *en supposant encore* $r \neq p$.

Considérons les relations (8) et (9) que l'on tire des relations (3) et (4) du paragraphe 39.

$$(8)\quad \log\rho = \frac{l[(\mathrm{P'R'} + \mathrm{P''R''})\cos t - (\mathrm{P'R''} - \mathrm{P''R'})\sin t] - (\mathrm{P'Q'} + \mathrm{P''Q''})}{\mathrm{P'}^2 + \mathrm{P''}^2} = \frac{l\mathrm{T}_1 - \mathrm{V}_1}{\Delta},$$

$$(9)\quad \theta = \frac{l[(\mathrm{P'R'} + \mathrm{P''R''})\sin t + (\mathrm{P'R''} - \mathrm{P''R'})\cos t] - (\mathrm{P'Q''} - \mathrm{P''Q'})}{\mathrm{P'}^2 + \mathrm{P''}^2} = \frac{l\mathrm{T}_2 - \mathrm{V}_2}{\Delta};$$

(T_1, T_2, V_1, V_2, Δ étant indépendants de l); et la relation (10) obtenue en éliminant l entre (8) et (9).

$$(10)\qquad \mathrm{T}_1(\Delta\theta + \mathrm{V}_2) - \mathrm{T}_2(\Delta\log\rho + \mathrm{V}_1) = 0.$$

Remarquons d'abord que pour une valeur déterminée de θ, par exemple $\theta_k = 2k\pi + \Omega$, (10) détermine un nombre fini de valeurs de ρ.

En effet, en posant

$$\mathrm{W}(\rho) = \log\rho - \frac{[\mathrm{T}_1(\Delta\theta_k + \mathrm{V}_2) - \mathrm{T}_2\mathrm{V}_1]}{\Delta\mathrm{T}_2},$$

on voit que $W(\rho)$ n'a, dans les intervalles déterminés par les racines de $\Delta T_2 = 0$, qu'un nombre fini de maxima (et de minima), puisque $W'(\rho)$ est une fraction rationnelle. L'intervalle $(0, +\infty)$ peut donc être divisé en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels $W(\rho)$ est monotone, d'où résulte que $W(\rho) = 0$ n'a qu'un nombre fini de racines $\rho_{k,1}, \ldots, \rho_{k,h}, \ldots, \rho_{k,j}, \ldots, \rho_{k,n}$.

Il en résulte donc bien que les valeurs $l_{k,1}, \ldots, l_{k,h}, \ldots, l_{k,j}, \ldots, l_{k,n}$ qui vérifient (9) quand $\theta = \theta_k$ et $\rho = \rho_{k,1}, \ldots, \rho_{k,h}, \ldots, \rho_{k,j}, \ldots, \rho_{k,n}$ sont en nombre fini. Soit $l_{k,j}$ la plus grande. Il existe, pour $\theta_{k+1} = 2(k+1)\pi + \Omega$, une valeur analogue $l_{k+1,h}$ pour laquelle on a $l_{k+1,h} > l_{k,j}$, car autrement θ resterait borné pour l continuant de croître à partir de $l_{k,j}$. Posons $\theta = \theta_k + \omega$ et faisons croître l de $l_{k,j}$ à $l_{k+1,h}$; ω variant de 0 à 2π, l'on a

$$(11) \qquad r'(k) = \frac{\theta_k}{l_{k+1,h}} < \frac{\theta}{l} < \frac{\theta_{k+1}}{l_{k,j}} = r''(k).$$

Nous allons montrer que $r'(k)$ et $r''(k)$ tendent vers deux limites non nulles et positives quand k croît indéfiniment.

Remarquons que T_1, T_2, V_1, V_2, Δ, indépendants de k, prennent les mêmes valeurs pour $\theta = \theta_{k+1}, \ldots, \theta_{k+p}, \ldots$ que pour θ_k.

Remarquons encore que $\Delta = P'^2 + P''^2$ ne s'annule que pour les racines η de $P = 0$ et de $\overline{P} = 0$ et que, Ω étant quelconque, peut être supposé différent des arguments des η.

Il en résulte alors que celles des racines $\rho_{k,1}, \ldots, \rho_{k,n}$ de (10), considérée comme équation en ρ, qui restent bornées, doivent tendre vers les racines de $T_1(\rho, \Omega) = 0$.

Désignons par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p+r}$ les racines de $T_1(\rho, \Omega) = 0$. On tire de (9)

$$\frac{\theta_k}{l_{k,j}} = \frac{T_2(\rho_{k,j})}{\Delta(\rho_{k,j})} - \frac{V_2(\rho_{k,j})}{l_{k,j}\Delta(\rho_{k,j})}.$$

Le second terme du second membre tend vers 0, puisque $\Delta(\rho_{k,j})$ tend vers $\Delta(\sigma_j) \neq 0$ et que nous considérons les valeurs $l_{k,j}$, qui croissent indéfiniment avec k; il s'ensuit que $\frac{\theta_k}{l_{k,j}}$ tend vers $\frac{T_2(\sigma_j)}{\Delta(\sigma_j)}$, quantité que nous désignons par r''_j.

Il en est de même de $r''(k)$ puisque l'on peut écrire

$$r''(k) = \frac{\theta_{k+1}}{l_{k,j}} = \frac{\theta_k + 2\pi}{\theta_k} \frac{\theta_k}{l_{k,j}}.$$

En posant $r'_h = \frac{T_2(\sigma_h)}{\Delta(\sigma_h)}$, on voit de même que $\lim_{k \to \infty} r'(k) = \frac{T_2(\sigma_h)}{\Delta(\sigma_h)}$ et que l'on peut écrire, ζ étant petit avec $\frac{1}{k}$,

$$(12) \qquad r'_h - \zeta < \frac{\theta}{l} < r''_j + \zeta.$$

Or, comme nous pouvons supposer aussi Ω différent des arguments des racines η' de $R = 0$, les racines σ de $T_1 = 0$ n'annulent pas T_2 et, par suite, r'_h et r''_j ne sont pas nuls. Ils sont, d'autre part, positifs puisque θ_k, θ_{k+1}, $l_{k,j}$, $l_{k+1,h}$ sont positifs.

Considérons maintenant la courbe (E) décrite par la branche (e) quand l varie de $l_{k,j}$ à $l_{k+1,h}$ et supposons que la courbe (C_1), d'équation $T_1(\rho, \omega) = 0$, soit une courbe fermée entourant l'origine du plan (ρ, θ) quand ω varie de 0 à 2π.

Si, pour (E), ρ n'était pas petit avec $\frac{1}{k}$ pour l variant de $l_{k,j}$ à $l_{k+1,h}$, $T_1(\rho, \omega)$, d'après (8), devrait être petit et (E) devrait être voisine de (C_1).

Cela est impossible si R ne se réduit pas à une constante, car (C_1) contient les racines η' de $R = 0$, puisque pour celles-ci $R' = R'' = 0$. On aurait donc, pour les points de (E) voisins des η', T_2 arbitrairement petit avec $\frac{1}{k}$, ainsi que $\frac{\theta}{l}$.

Or nous savons, d'après (12), que ce rapport ne tend pas vers 0.

Supposons alors R constant et, en désignant par A et B des constantes, écrivons T_1 et T_2 sous la forme

$$T_1 = P'(R'\cos t - R''\sin t) + P''(R''\cos t + R'\sin t) = AP' + BP'',$$
$$T_2 = P'(R'\sin t + R''\cos t) - P''(R'\cos t - R''\sin t) = BP' - AP'',$$

de sorte que (8) et (9) deviennent

$$(8') \qquad \log\rho = \frac{l[AP' + BP''] - (P'Q' + P''Q'')}{P'^2 + P''^2},$$

$$(9') \qquad \theta = \frac{l[BP' - AP''] - (P'Q'' - P''Q')}{P'^2 + P''^2}$$

et, en posant $P'' = \lambda P'$,

$$\log\rho = \frac{l[A + B\lambda] - (Q' + \lambda Q'')}{P'(1 + \lambda^2)}, \qquad \theta = \frac{l[B - A\lambda] - (Q'' - \lambda Q')}{P'(1 + \lambda^2)}.$$

Pour que $\log\rho$ reste borné, il faudrait ou que $[A + B\lambda] - \frac{(Q' + \lambda Q'')}{l}$ soit petit, ou que $P'(1 + \lambda^2)$ soit grand avec l.

Dans le premier cas, λ serait voisin de $-\frac{A}{B}$; il en résulterait, d'après (9'), que $\frac{\theta}{l}$ serait voisin de $\frac{B}{P'} - \frac{B(AQ'+BQ'')}{lP'(A^2+B^2)}$ et, par suite, supérieur à $r''_j + \zeta$ pour P' assez petit, ce qui aurait lieu pour des points de (E) voisins des η, qui appartiennent à (C_1) puisque l'on a pour ceux-ci $P' = P'' = 0$.

Dans le second cas, λ devrait, étant grand, être d'ordre supérieur à celui de $\frac{1}{P'}$ pour que $\frac{A+B\lambda}{P'(1+\lambda^2)}$ soit petit. Il en résulterait que $\frac{B-A\lambda}{P'(1+\lambda^2)}$ serait petit, ainsi d'ailleurs que $\frac{Q''-\lambda Q'}{P'(1+\lambda^2)}$, alors $\frac{\theta}{l}$ serait petit et, par suite, inférieur à $r'_h - \zeta$.

Ces deux résultats contredisent les inégalités (12); par suite, *si* P *et* R *ne sont pas des constantes*, ρ *ne peut rester borné sans tendre vers* 0. *Il en est encore de même si* P *et* R *sont des constantes* puisque T_1 est alors une constante non nulle en général si t est quelconque. Il peut en être autrement, toutefois, si $T_1 = 0$, c'est-à-dire si t a une valeur telle que $(P'R' + P''R'')\cos t - (P'R'' - P''R')\sin t = 0$. Par exemple pour

$$(\mathrm{I}) \qquad a_0 L z = c_0 x + b_0$$

quant $t = v_0 - \sigma_0 + \frac{\pi}{2}$, on a le système

$$\log\rho = \frac{|b_0|}{|a_0|}\cos(\tau_0 - \sigma_0), \qquad \theta = \frac{|c_0|\,l}{|a_0|} + \frac{|b_0|}{|a_0|}\sin(\tau_0 - \sigma_0)$$

et (E) est le cercle $\rho = e^{\frac{|b_0|}{|a_0|}\cos(\tau_0-\sigma_0)}$ parcouru une infinité de fois; mais à une transformation linéaire près sur x, on retrouve ici l'exponentielle.

41. Détermination d'une branche (e) **voisine de l'origine.** — Nous allons montrer qu'*il existe, si* $a_0 \neq 0$ *et* $c_0 \neq 0$ *et si* x *est dans un demi-plan déterminé, une branche* (e) *pour laquelle* ρ *tend vers* 0 *avec* $\frac{1}{l}$ *et* θ *croît comme* l.

Posons $P = a_0 + zP_1$, $Q = b_0 + zQ_1$, $R = c_0 + zR_1$; (I) devient

$$Lz = \frac{c_0 x - b_0}{a_0} - \frac{xz(a_0 R_1 - c_0 P_1) - z(a_0 Q_1 - b_0 P_1)}{a_0(a_0 + zP_1)}.$$

Posons

$$L\alpha = \frac{c_0 x - b_0}{a_0}, \qquad A = \frac{-a_0 R_1 + c_0 P_1}{a_0}, \qquad B = \frac{b_0 P_1 - a_0 Q_1}{a_0};$$

il vient

$$z = \alpha e^{z\left(\frac{Ax+B}{a_0+zP_1}\right)} = \alpha\Phi(z).$$

Faisons $z_0 = \alpha$, $z_1 = \alpha\Phi(z_0)$, ..., $z_{n+1} = \alpha\Phi(z_n)$, ... et considérons

$$|z_1 - z_0| = |\alpha| \left| e^{\alpha\left(\frac{Ax+B}{a_0+\alpha P_1}\right)} - 1 \right|.$$

Pour $|\alpha|$ assez petit et $|z| < |z_0| \neq 0$, on peut écrire, $g_1 > 0$ désignant un constante, comme plus loin g_2, g'_2, g_3, g'_4,

$$\left| \frac{Ax+B}{a_0+\alpha P_1} \right| < g_1 l.$$

Comme $a_0 = |a_0| e^{i\sigma_0}$, $c_0 = |c_0| e^{i\upsilon_0}$, on a $x\frac{c_0}{a_0} = l\frac{|c_0|}{|a_0|} e^{i(t+\upsilon_0-\sigma_0)}$ et, dans le demi-plan tel que $\cos(t+\upsilon_0-\sigma_0) < 0$, on peut écrire

$$|\alpha| = \left| e^{\frac{c_0 x - b_0}{a_0}} \right| = e^{-g_2 l + g'_2}$$

et, comme on a aussi $\left|\frac{Ax+B}{a_0+\alpha P_1}\right|$ de l'ordre de l,

$$\left| \frac{\alpha(Ax+B)}{a_0+\alpha P_1} \right| < g_1 l e^{-g_2 l} = \frac{m}{2}.$$

Supposons l assez grand pour avoir $m < 2$, il en résulte

$$\left| e^{\frac{\alpha(Ax+B)}{a_0+\alpha P_1}} - 1 \right| < 2 \left| \frac{\alpha(Ax+B)}{a_0+\alpha P_1} \right| < 2 g_3 l e^{-g_2 l} = m$$

et enfin

$$|z_1 - z_0| < m|\alpha|.$$

Considérons ensuite

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| = |\alpha| \left| \int_{z_n}^{z_{n+1}} \Phi'_z \, dz \right| < |z_{n+1} - z_n| \, |\alpha| \max |\Phi'_z|$$

où

$$|\Phi'_z| = |\Phi| \left| \frac{Ax+B+z(A'x+B')}{a_0+zP_1} - \frac{z(Ax+B)(zP'_1+P_1)}{(a_0+zP_1)^2} \right|.$$

Supposons z dans un cercle (γ) de centre o et de rayon $\mu|\alpha|$, où $\mu > 1$; α étant assez petit pour que $(a_0 + zP_1)$ ne s'annule pas dans (γ). Le module du premier terme est de l'ordre de l, celui du second de l'ordre de $|\alpha| l$ et, par suite, le module du second facteur est de l'ordre de l.

On a d'autre part, $|\Phi| < e^{\mu|\alpha|g_1' l}$ et, comme $|\alpha| l$ tend vers o avec $\frac{1}{l}$, $|\Phi'_z|$ est de l'ordre de l. On peut donc écrire, M étant fixe,

$$|\alpha|\,|\Phi'_z| < \mathrm{M}\, l e^{-g_2 l + g_2'} = \mathrm{N}.$$

Si par exemple, $\mu = 2$, on peut supposer l assez grand pour avoir $\mathrm{N} < \frac{1}{2}$, $m < \frac{1}{2}$, ce qui assure la convergence des approximations dans (γ).

Le module ρ de Z limite des z_n tend vers o comme $|\alpha|$.

Pour l'argument θ, remarquons que Z est dans le cercle (γ') de centre α et de rayon $|\alpha|$ et que, par suite, θ diffère de l'argument Θ de α de moins de $\frac{\pi}{2}$; or

$$\Theta = l\left|\frac{c_0}{a_0}\right|\sin(t + \upsilon_0 - \sigma_0) - \left|\frac{b_0}{a_0}\right|\sin(\tau_0 - \sigma_0)$$

et, par suite, θ croît comme $l\left|\frac{c_0}{a_0}\right|\sin(t + \upsilon_0 - \sigma_0)$.

42. Unicité de Z. — Établissons d'abord que l'on peut trouver ρ_0 et L tels que l'on ne puisse avoir $\rho = \rho_0$ pour $l \geqq \mathrm{L}$.

Reprenons la relation (8) du paragraphe 40 et soient T_0, V_0, Δ_0 les valeurs de T_1, V_1, Δ pour $z = 0$. On peut trouver $\rho_0 < 1$ tel que, pour $\rho \leqq \rho_0$ et ε inférieur à $\Delta_0 = |a_0|^2$, $|\mathrm{T}_0|$ et $|\mathrm{V}_0|$, l'on ait

$$|\mathrm{T}_0| - \varepsilon < |\mathrm{T}_1| < |\mathrm{T}_0| + \varepsilon, \qquad \Delta_0 - \varepsilon < |\Delta| < \Delta_0 + \varepsilon,$$
$$|\mathrm{V}_0| - \varepsilon < |\mathrm{V}_1| < |\mathrm{V}_0| + \varepsilon.$$

Prenons alors, ayant choisi ρ_0, L tel que

$$|\log\rho_0| = \frac{(|\mathrm{T}_0| - \varepsilon)\mathrm{L} - |\mathrm{V}_0| - \varepsilon}{\Delta_0 + \varepsilon};$$

il en résulte, pour $l_1 \geqq \mathrm{L}$,

$$|\log\rho| = \left|\frac{l_1 \mathrm{T}_1 - \mathrm{V}_1}{\Delta}\right| > \frac{(|\mathrm{T}_0| - \varepsilon) l_1 - |\mathrm{V}_0| - \varepsilon}{\Delta_0 + \varepsilon}$$
$$> \frac{(|\mathrm{T}_0| - \varepsilon)\mathrm{L} - |\mathrm{V}_0| - \varepsilon}{\Delta_0 + \varepsilon} = |\log\rho_0|,$$

ce qui nécessite $\rho < \rho_0$; sauf toutefois si $\mathrm{T}_0 = 0$, mais ceci ne peut se produire, comme au paragraphe 40, que pour une seule valeur de $t = \sigma_0 - \upsilon_0 + \frac{\pi}{2}$. Nous voulons montrer maintenant que Z *déterminée au paragraphe* 41 *est l'unique branche* (e) *voisine de* o.

Soit $z' = \rho' e^{i\theta'}$ une autre branche (e) et $\alpha = |\alpha| e^{i\Theta}$; nous allons montrer d'abord que $\frac{|\alpha| - \rho'}{\rho'}$ et $\theta' - \Theta$ sont de l'ordre de $\rho' \log \rho'$, au plus.

En posant $T_1 = T_0 + \rho' T'_1$, $V_1 = V_0 + \rho' V'_1$, $\Delta = \Delta_0 + \rho' \Delta'$, on peut écrire (8)

$$\log \rho' = \frac{l T_0 - V_0}{\Delta_0} - \frac{\rho' l (T_0 \Delta' - T'_1 \Delta_0)}{\Delta_0 (\Delta_0 + \rho' \Delta')} + \frac{\rho' (V_0 \Delta' - V'_1 \Delta_0)}{\Delta_0 (\Delta_0 + \rho' \Delta')}.$$

En posant $\lambda = \frac{T_0 \Delta' - T'_1 \Delta_0}{\Delta_0 (\Delta_0 + \rho' \Delta')}$, $\mu = \frac{V_0 \Delta' - V'_1 \Delta_0}{\Delta_0 (\Delta_0 + \rho' \Delta')}$, il vient

$$\rho' = e^{\frac{l T_0 - V_0}{\Delta_0} - \lambda \rho' l + \mu \rho'}$$

On a aussi

$$|\alpha| = e^{\frac{l T_0 - V_0}{\Delta_0}},$$

car $\alpha = e^{\frac{c_0 x - b_0}{a_0}}$ et $l \frac{|c_0|}{|a_0|} \cos(t + \upsilon_0 - \sigma_0) = \frac{l T_0}{\Delta_0}$, $\frac{|b_0|}{|a_0|} \cos(\tau_0 - \sigma_0) = \frac{V_0}{\Delta_0}$; par suite

$$\frac{|\alpha|}{\rho'} = e^{\lambda \rho' l - \mu \rho'}.$$

Comme $\rho' < \rho_0$ est petit et que, par suite, l est de l'ordre de $\frac{\Delta_0}{T_0} \log \rho'$ au plus, λ et μ étant bornés, $\rho'(\lambda l - \mu)$ est de l'ordre de $\rho' \log \rho'$. Du moins en est-il ainsi pour $\lambda \neq 0$; on verrait aisément que les énoncés qui vont suivre s'appliquent encore pour $\lambda = 0$.

Il en est donc de même de $\frac{|\alpha| - \rho'}{\rho'} < 2[|\lambda| \rho' l + |\mu| \rho']$ pour ρ' petit. Appliquées à l'argument θ' à partir de la relation (9) du paragraphe 40, les considérations que nous avons exposées pour le module ρ' à partir de (8) montrent d'une manière analogue que $\theta' - \Theta$ est de l'ordre de $\rho' \log \rho'$, au plus.

Il en est encore de même de $\frac{|z' - \alpha|}{\rho'}$ puisque l'on a

$$|z' - \alpha| < \rho' - |\alpha| + \rho' |\theta' - \Theta| \quad \text{ou} \quad |z' - \alpha| < |\alpha| - \rho' + |\alpha| |\theta' - \Theta|.$$

Soit (γ) un cercle de centre z' et de rayon $\sigma \rho'$, où $\sigma < 1$; il contient, pour ρ' assez petit, α et Z et l'on a, pour z dans (γ), $\rho < 3|\alpha|$ si ρ' est assez petit pour que $|z' - \alpha| < \alpha|$ et aussi, comme au paragraphe 41,

$$|\alpha \Phi'_z| < M l e^{-g_2 l + g'_2} = N.$$

Or on a $z' = \alpha\Phi(z')$, $z_1 = \alpha\Phi(z_0)$, ..., $z_{n+1} = \alpha\Phi(z_n)$, ..., il en résulte

$$z' - z_1 = \int_{z_0}^{z'} \alpha\Phi'_z\, dz, \qquad z_{n+1} - z_1 = \int_{z_0}^{z_n} \alpha\Phi'_z\, dz$$

et, comme Φ'_z est holomorphe dans (γ),

$$|z' - z_{n+1}| = \left| \int_{z_n}^{z'} \alpha\Phi'_z\, dz \right| < |z' - z_n|\, N.$$

par suite, pour $N < 1$, $|z' - z_{n+1}|$ tend vers o avec $\frac{1}{n}$ et z' est la limite Z des z_n.

43. Existence de branches (e) **quand** $p = r$. — Les considérations des paragraphes 38 et 39 ne sont valables que pour $p = r$.

Examinons maintenant le cas réservé où $p = r$. Nous allons voir que, *pour l assez grand et les hypothèses du paragraphe 40 étant vérifiées, on peut encore déterminer une branche (e_1) de module petit et qu'il n'existe de branche (e_2) de module grand avec l, que si l'on a $p = r > q$.*

Supposons $p = r > q$.

Posons $z = \frac{1}{y}$ et considérons (I') résultant de (I) par cette inversion

$$\text{(I')} \qquad \begin{aligned} &-(a_p + a_{p-1}y + \ldots + a_0 y^p)\mathrm{L}y \\ &= x(c_p + \ldots + c_0 y^p) - y^{p-q}(b_q + \ldots + b_0 y^q). \end{aligned}$$

Pour x dans un demi-plan déterminé, (I), d'après le paragraphe 41, admet une branche (e_1) qui devient pour (I') une branche (e_2) et, d'autre part, (I') admet aussi une branche (e_1) qui donne une branche (e_2) pour (I).

Supposons $p = r < q$.

Ici (I) devient par $z = \frac{1}{y}$,

$$\text{(I'')} \qquad \begin{aligned} &-y^{q-p}(a_p + a_{p-1}y + \ldots + a_0 y^p)\mathrm{L}y \\ &= xy^{q-p}(c_p + \ldots + c_0 y^p) - (b_q + \ldots + b_0 y^q), \end{aligned}$$

le premier coefficient de P étant nul, on voit, en admettant les résultats du paragraphe 44, que (I'') n'admet pas de branche (e_1) et, par suite, que (I) n'admet pas de branche (e_2), mais seulement une branche (e_1).

44. Examen des hypothèses. — Nous avons énoncé, au paragraphe **41**, des conditions suffisantes pour l'existence d'une branche (e_1); nous allons montrer que ces conditions sont nécessaires.

$a_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$.

Nous savons, d'après le paragraphe **40**, que, s'il existe une branche (e_1) pour $p \neq r$, son module tend vers 0.

Nous allons montrer maintenant que *si l'on a* $a_0 = 0$, *ou* $c_0 = 0$, *ou encore* $a_0 = c_0 = 0$, *il ne peut exister de branche* (e_1).

Il y a trois cas à considérer :

a. $a_0 \neq 0$, $b_0 = \ldots = b_{\mu-1} = 0$, $b_\mu \neq 0$, $c_0 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$, $c_\nu \neq 0$.

Les relations (1) et (2) du paragraphe **28** deviennent ici

$$(1)_1 \qquad \log\rho = \frac{\left\{\begin{array}{l} l\left[|a_0|\,|c_\nu|\,\rho^\nu \cos[t + \upsilon_r - \sigma_0 - \nu\theta] + \ldots\right] \\ -\left[|a_0|\,|b_\mu|\,\rho^\mu \cos[\tau_\mu - \sigma_0 + \mu\theta] + \ldots\right] \end{array}\right\}}{|a_0^2| + \ldots},$$

$$(2)_1 \qquad \theta = \frac{\left\{\begin{array}{l} l\left[|a_0|\,|c_\nu|\,\rho^\nu \sin[t + \upsilon_r - \sigma_0 - \nu\theta] + \ldots\right] \\ -\left[|a_0|\,|b_\mu|\,\rho^\mu \sin[\tau_\mu - \sigma_0 + \mu\theta] + \ldots\right] \end{array}\right\}}{|a_0^2| + \ldots}.$$

Si ρ, pour une branche (e_1), restait inférieur à ε, on pourrait trouver (§ **39**), des valeurs de θ qui rendraient le second membre de $(1)_1$ positif et pour lesquelles l'égalité serait impossible.

b. $a_0 = \ldots = a_{\lambda-1} = 0$, $a_\lambda \neq 0$, $b_0 = \ldots = b_{\mu-1} = 0$, $b_\mu \neq 0$, $c_0 \neq 0$.

Les relations (1) et (2) deviennent ici

$$(1)_2 \qquad \log\rho = \frac{\left\{\begin{array}{l} l\left[|a_\lambda|\,|c_0|\,\rho^\lambda \cos[t + \upsilon_0 - \sigma_\lambda - \lambda\theta] + \ldots\right] \\ -\left[|a_\lambda|\,|b_\mu|\,\rho^{\lambda+\mu} \cos[\tau_\mu - \sigma_\lambda + (\mu - \lambda)\theta] + \ldots\right] \end{array}\right\}}{|a_\lambda^2|\,\rho^{2\lambda} + \ldots},$$

$$(2)_2 \qquad \theta = \frac{\left\{\begin{array}{l} l\left[|a_\lambda|\,|c_0|\,\rho^\lambda \sin[t + \upsilon_0 - \sigma_\lambda - \lambda\theta] + \ldots\right] \\ -\left[|a_\lambda|\,|b_\mu|\,\rho^{\lambda+\mu} \sin[\tau_\mu - \sigma_\lambda + (\mu - \lambda)\theta] + \ldots\right] \end{array}\right\}}{|a_\lambda^2|\,\rho^{2\lambda} + \ldots}.$$

et l'on peut raisonner et conclure comme dans le premier cas.

c. $a_0 = \ldots = a_{\lambda-1} = 0$, $a_\lambda \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $c_0 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$, $c_\nu \neq 0$.

On a ici, pour (1) et (2),

$$(1)_3 \qquad \log\rho = \frac{\left\{\begin{array}{l} l\left[|a_\lambda||c_\nu|\rho^{\lambda+\nu}\cos[t+\upsilon_\nu-\sigma_\lambda+(\nu-\lambda)\theta]+\ldots\right] \\ -\left[|a_\lambda||b_0|\rho^\lambda\cos[\tau_0-\sigma_\lambda-\lambda\theta]+\ldots\right] \end{array}\right\}}{|a_\lambda^2|\rho^{2\lambda}+\ldots},$$

$$(2)_3 \qquad \theta = \frac{\left\{\begin{array}{l} l\left[|a_\lambda||c_\nu|\rho^{\lambda+\nu}\sin[t+\upsilon_\nu-\sigma_\lambda+(\nu-\lambda)\theta]+\ldots\right] \\ -\left[|a_\lambda||b_0|\rho^\lambda\sin[\tau_0-\sigma_\lambda-\lambda\theta]+\ldots\right] \end{array}\right\}}{|a_\lambda^2|\rho^{2\lambda}+\ldots}.$$

Si $\lambda \neq \nu$, le raisonnement précédent s'applique encore.

Si $\lambda = \nu$, on peut écrire, α, β, δ étant des constantes et les η et ζ étant bornés,

$$(1)_4 \qquad \log\rho - \frac{l(\alpha+\eta_1\rho)}{1+\zeta\rho} = -\frac{\delta[\cos(\tau_0-\sigma_\lambda-\lambda\theta)+\eta'_1\rho]}{\rho^\lambda(1+\zeta\rho)},$$

$$(2)_4 \qquad \theta - \frac{l(\beta+\eta_2\rho)}{1+\zeta\rho} = -\frac{\delta[\sin(\tau_0-\sigma_\lambda-\lambda\theta)+\eta'_2\rho]}{\rho^\lambda(1+\zeta\rho)}.$$

Soient θ'_k et θ'_{k+1} deux valeurs θ qui diffèrent d'environ 2π et telles que l'on ait $\cos(\tau_0-\sigma_\lambda-\lambda\theta)+\eta'_1\rho=0$, et soit t, tel que l'on ait $\alpha = \frac{|c_\lambda|}{|a_\lambda|}\cos[t+\upsilon_\lambda-\sigma_\lambda] < 0$, hypothèse nécessaire pour avoir $\log\rho < 0$ dans $(1)_4$ quel que soit θ.

On a, pour $\theta = \theta'_k$, $\log\rho = \frac{l(\alpha+\eta_1\rho)}{1+\zeta\rho}$; ce qui donne dans $(2)_4$ pour la valeur l'_k correspondante de l,

$$\theta'_k = l'_k\frac{(\beta+\eta_2\rho)}{1+\zeta\rho} - \frac{\delta[\sin(\tau_0-\sigma_\lambda-\lambda\theta'_k)+\eta'_2\rho]}{1+\zeta\rho}e^{-\lambda l'_k\frac{(\alpha+\eta_1\rho)}{1+\zeta\rho}},$$

et, comme $|\sin(\tau_0-\sigma_\lambda-\lambda\theta'_k)|$ est voisin de 1, l'_k est de l'ordre de $\frac{1+\zeta\rho}{-\lambda(\alpha+\eta_1\rho)}\log\theta'_k$, de même l'_{k+1} est de l'ordre de $\frac{1+\zeta\rho}{-\lambda(\alpha+\eta_1\rho)}\log\theta'_{k+1}$.

Supposons alors que pour l variant de l'_k à l'_{k+1}, θ varie de θ'_k à θ'_{k+1}. Le premier membre de $(2)_4$ garde le signe de θ puisque l est de l'ordre de $\log\theta$, tandis que le second membre change de signe; l'égalité est donc impossible pour toutes les valeurs de θ.

$$\frac{T_0}{\Delta_0} = \frac{|c_0|}{|a_0|}\cos(t+\sigma_0-\upsilon_0) < 0.$$

Cette hypothèse est nécessaire pour avoir $\log\rho < 0$, donc x doit être dans un des demi-plans limités par la droite d'argument $t = \upsilon_0 - \sigma_0 + \frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE V.

DÉTERMINATION DE BRANCHES z POUR LES VALEURS PARTICULIÈRES X ET o.

45. Détermination des branches z_k du plan $[k]$ voisines de o pour x voisin de $X = \frac{b_0}{c_0}$, quand $a_0 = 0$. — Nous avons déterminé, au paragraphe 13, les branches z_k qui tendent vers o quand k croît indéfiniment, x étant quelconque, mais différent de X. Nous allons maintenant déterminer, pour un plan $[k]$ donné, les branches z_k qui tendent vers o, quand x tend vers X.

Nous allons d'abord supposer $a_1 \neq 0$ et considérer

$$(1) \qquad (a_1 + a_2 z + \ldots + a_p z^{p-1}) z \mathrm{L} z = x(c_0 + c_1 z + \ldots + c_r z^r) - (b_0 + b_1 z + \ldots + b_q z^q),$$

dont on tire, en posant $x = X + x'$,

$$z = \frac{c_0 x' + z[c_1(X + x') - b_1 + z c_2(X + x') - z b_2 + \ldots]}{[a_1 + a_2 z + \ldots + a_p z^{p-1}] \mathrm{L} z} = \varphi(x', z);$$

nous prendrons comme valeur initiale des approximations que nous ferons la racine z_0 de $z_0 \mathrm{L} z_0 = \frac{c_0 x'}{a_1}$.

Auparavant, nous allons d'abord, en posant $\frac{c_0 x'}{a_1} = x''$, $|x''| = l$ et en considérant

$$z \mathrm{L} z = x'',$$

montrer que, pour $l < \frac{1}{e}$, on a les inégalités

$$(i) \qquad \frac{l(1 - \zeta)}{|\log l|} < \rho < \frac{l}{|\log l|},$$

dans laquelle on pose

$$(1 - \zeta) = (1 - \tau) : (1 + \eta) \left[1 + \frac{\log(1 + \eta)}{|\log l|}\right] \qquad \text{avec} \quad \eta = \frac{|\theta|}{|\log \rho|},$$

τ étant une quantité positive assujettie à vérifier l'inégalité

$$\tau > \frac{-(1-\tau)\log(1-\tau)}{|\log l} + \frac{(1-\tau)\log|\log l|}{|\log l|},$$

et qui, par suite, peut être supposée arbitrairement petite si l est lui-même assez petit.

Considérons l'équation

$$\rho'|\log\rho'| = l;$$

en posant $F(\rho') = \rho'|\log\rho'|$, on voit que $F(\rho')$ croît de o à $\frac{1}{e}$ pour ρ' croissant de o à $\frac{1}{e}$. On a donc une racine $\rho'_1 < \frac{1}{e}$, telle que $\rho' = \frac{l}{|\log\rho'|} < l$, d'ou

$$(i)_1 \qquad \rho'_1 < \frac{l}{|\log l|}.$$

Or, τ vérifiant la condition énoncée, on a, en faisant $\rho' = \frac{l(1-\tau)}{|\log l|}$,

$$F\left(\frac{l(1-\tau)}{|\log l}\right) = l - \tau l - \frac{l(1-\tau)\log(1-\tau)}{|\log l|} + \frac{l(1-\tau)\log|\log l|}{\log l} < l;$$

il en résulte, $F(\rho')$ étant croissante de o à $\frac{1}{e}$,

$$(i)_2 \qquad \frac{l(1-\tau)}{|\log l|} < \rho'_1.$$

D'autre part, $|Lz| < |\log\rho| + |\theta|$ entraîne $\rho[|\log\rho| + |\theta|] > l$ et l'on a, en posant $l = l'(1+\eta)$, η étant petit puisque k est déterminé et ρ devant être petit avec l (ainsi que $\rho = l$, puisque $|Lz| > |\log\rho|$),

$$\rho|\log\rho| > l'$$

Si ρ''_1 est la plus petite racine de $\rho''|\log\rho''| = l'$, on a $\rho''_1|\log\rho''_1| < \rho|\log\rho|$ et

$$(i)_3 \qquad \rho''_1 < \rho.$$

Mais on a aussi $\rho'_1|\log\rho'_1| = l = \rho\sqrt{(\log\rho)^2 + \theta^2} > \rho|\log\rho|$, d'où résulte

$$(i)_4 \qquad \rho < \rho'_1.$$

D'autre part, comme $l' < l$, $(i)_2$ est encore vérifiée par ρ''_1 et l', d'où

$$(i)_5 \qquad \frac{l'(1-\tau)}{|\log l'|} < \rho''_1,$$

d'où enfin, d'après $(i)_5$ et $(i)_3$ et d'après $(i)_5$ et $(i)_1$,

$$\frac{l'(1-\tau)}{|\log l'|} < \rho < \frac{l}{|\log l|}$$

et les inégalités (i), d'après la définition même de $(1-\zeta)$.

Nous allons montrer maintenant que si $\varepsilon = |x'|$ est assez petit, la suite des approximations $z_{n+1} = \varphi(x', z_n)$ est convergente, les z_n restant dans un cercle (γ) de centre z_0 et de rayon $\sigma\rho_0$, où $\sigma < 1$.

Posons $A = [c_1(X + x') - b_1 + \ldots]$, $B = [a_2 + \ldots + a_p z^{p-2}]$, il vient

$$z = \varphi(x', z) = \frac{c_0 x' + A z}{(a_1 + Bz)Lz}.$$

Formons $z_1 = \varphi(x', z_0)$ et considérons

$$\begin{aligned} |z_1 - z_0| &= \left| \frac{c_0 x' + z_0 A(z_0)}{[a_1 + z_0 B(z_0)] L z_0} - z_0 \right| \\ &= \left| \frac{\rho_0}{|\log \rho_0| \sqrt{1 + \frac{\theta_0^2}{(\log \rho_0)^2}}} \right| \left| \frac{A(z_0) - B(z_0) z_0 L z_0}{a_1 + z_0 B(z_0)} \right|. \end{aligned}$$

Le second facteur est voisin de $\left|\frac{c_1 X - b_1}{a_1}\right|$ et $\frac{\theta_0}{\log \rho_0}$ est petit; on a donc

$$|z_1 - z_0| < \frac{K_1 \rho_0}{|\log \rho_0|} < \frac{\sigma}{2} \rho_0$$

pour ε assez petit, K_1 étant une constante.

D'autre part on peut poser, pour z dans (γ),

$$(j) \qquad \rho''' = (1-\sigma)\rho_0 < \rho < (1+\sigma)\rho_0 = \rho^{\text{IV}}.$$

Déterminons maintenant une limite supérieure de $|\varphi'_z|$

$$\begin{aligned} \varphi'_z = \frac{A + A'z}{(a_1 + zB)Lz} &- \frac{c_0 x'[B(1 + Lz) + B'zLz]}{(a_1 + zB)^2 (Lz)^2} \\ &- \frac{A[a_1 + Bz(1 + Lz) + z^2 B' Lz]}{(a_1 + zB)^2 (Lz)^2} - \frac{c_0 a_1 x'}{z(a_1 + Bz)^2 (Lz)^2}. \end{aligned}$$

En posant $N_1^2 = (\log \rho^{\text{IV}})^2 + 4(k-1)^2 \pi^2$, on a $|Lz|^2 > N_1^2$ pour z dans (γ).

Soit B_1 le maximum de $|B|$; d'après (j) on a, pour le dernier terme,

$$\left| \frac{c_0 a_1 x'}{z(a_1 + zB)^2 (Lz)^2} \right| < \frac{|c_0 a_1| \varepsilon}{\rho'''[|a_1| - B_1 \rho^{\text{IV}}]^2 N_1^2} = \frac{|c_0 a_1| \varepsilon}{(1-\sigma)\rho_0 [|a_1| - B_1 \rho^{\text{IV}}]^2 N_1^2}$$

et, d'après (i) où $\rho = \rho_0$ et $l = \left|\frac{c_0}{a_1}\right| \varepsilon$, K' étant une autre constante,

$$\left|\frac{c_0 a_1 x'}{z(a_1 + zB)^2 (Lz)^2}\right| < \frac{|a_1^2| \left|\log\left(\left|\frac{c_0}{a_1}\right| \varepsilon\right)\right|}{(1-\sigma)(1-\zeta)[|a_1| - B_1 \rho^{\text{IV}}]^2 N_1^2} < \frac{K'}{|\log \varepsilon|}$$

puisque, en posant $\rho = -\frac{\log(1+\sigma)}{\log \rho_0}$, qui est petit avec ρ_0, l'on peut écrire

$$N_1^2 > (\log \rho^{\text{IV}})^2 = [\log \rho_0 + \log(1+\sigma)]^2 = (\log \rho_0)^2 (1-\rho)^2$$

et que dans (i), $\rho_0 < \frac{l}{|\log l|} < l$ entraîne $|\log \rho_0| > |\log l| = \left|\log\left(\left|\frac{c_0}{a_1}\right| \varepsilon\right)\right|$.

On peut trouver pour les premiers termes des inégalités analogues et écrire, K_2 étant encore une constante,

$$|\varphi'_z| < \frac{K_2}{|\log \varepsilon|} < \frac{1}{2}$$

pour z dans (γ) et ε assez petit.

Soit, pour une première valeur $\varepsilon_1 < \frac{1}{e}$, ρ_{01} la valeur de $|z_0|$. Calculons, la valeur σ étant choisie, pour $\rho \leqq \rho^{\text{IV}} = (1+\sigma)\rho_{01}$, une limite supérieure de K_1 et prenons ρ_{02} tel que $|\log \rho_{02}| \geqq \frac{2K_1}{\sigma}$; soit $\varepsilon_2 = |x'|$ la valeur correspondante donnée par $z_0 L z_0 = \frac{c_0}{a_1} x'$.

Calculons, pour $\rho \leqq \rho^{\text{IV}}$ et $|x'| = \varepsilon_2$, une limite supérieure de K_2 et prenons ε_3 tel que $|\log \varepsilon_3| \geqq 2K_2$.

On aura, pour ε inférieur à ε_1, ε_2 et ε_3, $|z_1 - z_0| < \frac{\sigma}{2}\rho_0$ et $|\varphi'_z| < \frac{1}{2}$, ce qui assurera la convergence dans (γ).

46. Nous considérons maintenant le cas général, en supposant ici $a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $b_1 = \ldots = b_{g-1} = 0$, $b_g \neq 0$, $c_0 \neq 0$, $c_1 = \ldots = c_{h-1} = 0$, $c_h \neq 0$.

On peut écrire

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &z^m L z (a_m + a_{m+1} z + \ldots + a_p z^{p-m}) \\ &= x(c_0 + c_h z^h + \ldots + c_r z^r) - (b_0 + b_g z^g + \ldots + b_q z^q). \end{aligned}$$

Supposons m inférieur ou égal au plus petit des nombres g et h, soit ν. En posant encore $x = X + x'$, il vient

$$z^m = \frac{c_0 x' + (X + x')(c_h z^h + \ldots + c_r z^r) - (b_g z^g + \ldots + b_q z^q)}{(a_m + a_{m+1} z + \ldots + a_p z^{p-m}) L z}$$

et, en posant,

$$A z^{\nu} = (X + x')(c_h z^h + \ldots + c_r z^r) - (b_g z^g + \ldots + b_q z^q),$$

$$B = a_{m+1} + \ldots + a_p z^{p-m-1}, \qquad z = \left[\frac{c_0 x' + A z^{\nu}}{(a_m + z B) L z}\right]^{\frac{1}{m}} = \varphi(x', z).$$

Nous prenons comme valeur initiale z_0 l'une des m racines z_{0k} de

$$z_0^m L z = \frac{c_0 x'}{a_m}$$

et nous faisons $z_{n+1} = \varphi(x', z_n)$.

Pour établir la convergence de ces approximations dans un cercle (γ) de centre z_0 et de rayon $\sigma\rho_0$ [σ étant assez petit pour que les m cercles (γ) ne se coupent pas], il faut encore montrer que $\left|\frac{z_1 - z_0}{\rho_0}\right|$ est petit et que $|\varphi'_z|$ est inférieur à 1. Or, on a

$$\varphi'_z = \frac{1}{m}\left[\frac{c_0 x' + A z^{\nu}}{(a_m + z B) L z}\right]^{\frac{1}{m}-1}$$
$$\times\left[\frac{(\nu A + z A') z^{\nu-1}}{(a_m + z B) L z} - \frac{z^{\nu} A [a_m + B z(1 + L z) + B' z^2 L z]}{z(a_m + B z)^2 (L z)^2}\right.$$
$$\left. - \frac{c_0 x' [a_m + B z(1 + L z) + B' z^2 L z]}{z(a_m + B z)^2 (L z)^2}\right].$$

Quand z est dans (γ), ρ et ρ_0 sont du même ordre, ainsi que $|Lz|$ et $|Lz_0|$ et l'on a, d'autre part, $c_0 x' = a_m z_0^m L z_0$. L'ordre du premier facteur est donc de ρ_0^{1-m} et celui du premier produit, de $\rho_0^{1-m}|Lz_0|^{-1}$.

L'ordre du second produit est de $\rho_0^{\nu-m}|Lz_0|^{-2}$ et celui du troisième de $|Lz_0|^{-1}$. On peut donc avoir, pour $|x'|$ assez petit, $|\varphi'_z| < 1$ dans (γ).

On a d'autre part

$$|z_1 - z_0| = \left|\left[\frac{c_0 x' + z_0^{\nu} A}{(a_m + z_0 B) L z_0}\right]^{\frac{1}{m}} - \left[\frac{c_0 x'}{a_m L z_0}\right]^{\frac{1}{m}}\right|$$
$$= \rho_0 \left|\left[1 + \frac{z_0^{\nu} A}{c_0 x'}\right]^{\frac{1}{m}} : \left[1 + \frac{z_0 B}{a_m}\right]^{\frac{1}{m}} - 1\right|$$

et, en posant

$$\left[1 + \frac{z_0^{\nu} A}{c_0 x'}\right] : \left[1 + \frac{z_0 B}{a_m}\right] = 1 + \frac{z_0^{\nu} A}{c_0 x'} - \frac{z_0 B}{a_m + z_0 B} - \frac{z_0^{\nu+1} A B}{c_0 x'(a_m + z_0 B)} = 1 + u,$$

on voit que $|u|$ est, au plus, de l'ordre de $|Lz_0|^{-1}$ et, d'après l'inégalité $(\mathcal{J})$, que $\frac{|z_1 - z_0|}{\rho_0}$ tend vers o avec $|x|$, ce qui assure la convergence.

On a donc m branches z_k qui tendent vers o *avec x' pour le plan* $[k]$.

Il en est de même pour les plans d'indices supérieurs, puisque $|Lz|$ figure en dénominateur et que $|Lz|$ croît avec k pour une même valeur z, ce qui renforce toutes les inégalités considérées.

Supposons m supérieur à g ou à h.

Soit $m > g$ et $g < h$.

Il vient dans (I), en posant $x = X + \frac{x'}{c_0}$, $B = b_{g+1} + \ldots + b_q z^{q-g-1}$, $C = c_h + \ldots + c_r z^{r-h}$, $S = a_m + \ldots + a_p z^{p-m}$,

$$b_g z^g = x' - z^g[zB - x z^{h-g} C - z^{m-g} SLz],$$

qui donne, en posant $\psi_1 = -z^g[zB - x z^{h-g} C - z^{m-g} SLz]$,

$$z = \left[\frac{x' + \psi_1}{b_g}\right]^{\frac{1}{g}} = \varphi_1(z).$$

On prend ici $z_0 = \left[\frac{x'}{b_g}\right]^{\frac{1}{g}}$ et l'on forme encore $z_{n+1} = \varphi(z_n)$. On a, d'après ($\mathcal{J}$),

$$|z_1 - z_0| = \rho_0 \left| \left[1 + \frac{\psi_1(z_0)}{x'}\right]^{\frac{1}{g}} - 1 \right| < \rho_0 \left| \frac{\psi_1(z_0)}{x'} \right|^{\frac{1}{g}}.$$

Or, dans le voisinage de z_0, $\left|\frac{\psi_1(z_0)}{x}\right|$ est, au plus si $m = g + 1$, de l'ordre de $\rho_0 |Lz_0|$, qui est petit avec ρ_0.

D'autre part, dans

$$|\varphi'_{1z}| = \frac{1}{g} \left|\frac{\psi'_1}{b_g}\right| \left|\frac{x' + \psi_1}{b_g}\right|^{\frac{1}{g}-1},$$

le dernier facteur est de l'ordre de ρ_0^{1-g}, tandis que $|\psi'_1|$ est, au plus, de l'ordre de $\rho_0^g |Lz_0|$; par suite $|\varphi'_{1z}|$ est, au plus, de l'ordre de $\rho_0 |Lz_0|$, et, par suite, petit avec $|x'|$.

Soit $m > g = h$.

On peut écrire (I)

$$z^m Lz(a_m + \ldots + a_p z^{p-m}) = c_0 x - b_0 + z^g[c_g x - b_g] + z^{g+1}[c_{g+1} x - b_{g+1} + \ldots];$$

il vient, en posant $c_g x - b_g = \frac{c_g b_0 - b_g c_0}{c_0} + \frac{c_g}{c_0} x' = -\alpha + \beta x'$, ainsi

que $(a_m + \ldots + a_p z^{p-m}) = \mathrm{S}$, $[c_{g+1} x - b_{g+1} + \ldots] = \mathrm{T}$,

$$z = \left[\frac{x' + \beta x' z^g + z^{g+1}\mathrm{T} - z^m \mathrm{S}\mathrm{L} z}{\alpha}\right]^{\frac{1}{g}} = \left[\frac{x' + \psi_2}{\alpha}\right]^{\frac{1}{g}} = \varphi_2(z).$$

Prenons $z_0 = \left[\frac{x'}{\alpha}\right]^{\frac{1}{g}}$ et $z_{n+1} = \varphi_2(z_n)$. On a

$$|z_1 - z_0| = \rho_0 \left| \left[1 + \frac{\psi_2}{x'}\right]^{\frac{1}{g}} - 1 \right|$$

et ici $\left|\frac{\psi_2}{x'}\right|$ est au plus, si $m = g + 1$, de l'ordre de $\rho_0 |\mathrm{L} z_0|$.

On a, d'autre part

$$|\varphi'_{2z}| = \left|\frac{1}{g\alpha}\right| \left|\frac{x' + \psi_2}{\alpha}\right|^{\frac{1}{g}-1}$$
$$\times |-m z^{m-1}\mathrm{S}\mathrm{L} z - z^{m-1}\mathrm{S} - z^m \mathrm{S}'\mathrm{L} z + \beta g x' z^{g-1} + (g+1) z^g \mathrm{T} + z^{g+1}\mathrm{T}'|;$$

le second facteur est de l'ordre de ρ_0^{1-g} et le troisième, au plus, de l'ordre de $\rho_0^g |\mathrm{L} z_0|$, si $m = g + 1$; par suite $|\varphi'_{2z}|$ est au plus de l'ordre de $\rho_0 |\mathrm{L} z_0|$.

Supposons $m > h$ et $h < g$.

On peut écrire (1)

$$z^m \mathrm{L} z (a_m + \ldots + a_p z^{p-m})$$
$$= c_0 x - b_0 + c_h x z^h + z^h [c_{h+1} z x + \ldots] - z^g [b_g + \ldots + b_q z^{q-g}]$$

et, en posant $\mathrm{D} = x[c_{h+1} + \ldots + c_l z^{l-h-1}]$, $\mathrm{E} = [b_g + \ldots + b_q z^{q-g}]$,

$$z = \left[\frac{-x' - z^{h+1}\mathrm{D} + z^g \mathrm{E} + z^m \mathrm{S}\mathrm{L} z}{c_h x}\right]^{\frac{1}{h}} = \varphi_3(z).$$

En partant de $z_0 = \left[-\frac{x'}{c_h x}\right]^{\frac{1}{h}}$ et en suivant une marche analogue aux précédentes, on montre encore l'existence de h branches z_k petites avec x'.

En résumé, on a, si $m > \nu$, ν branches z_k petites avec x'.

47. Détermination des branches de grand module, pour x voisin de 0, quand r est supérieur à p et q. — Nous avons trouvé pour x quelconque, que le nombre des branches z_k est égal au plus grand des nombres p, q, r.

Quand $x = 0$, (I) se réduit à $PLz + Q = 0$, qui admet p ou q racines z_k.

Nous allons montrer que *si r est supérieur à p et q, $(r-p)$ ou $(r-q)$ branches z_k deviennent infinies quand x tend vers* 0.

Supposons $r > p > q$.

On peut écrire (I) sous la forme

$$\text{(I)} \qquad a_p Lz + \left(\frac{a_{p-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^p}\right) Lz + \left(\frac{b_q}{z^{p-q}} + \ldots + \frac{b_0}{z^p}\right)$$
$$= c_r x z^{r-p}\left[1 + \frac{c_{r-1}}{c_r z} + \ldots + \frac{c_0}{c_r z^r}\right]$$

et, en posant

$$A = \frac{a_{p-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^p}, \qquad B = \frac{b^q}{z^{p-q}} + \ldots + \frac{b_0}{z^p}, \qquad C = \frac{c_{r-1}}{c_r} + \ldots + \frac{c_0}{c_r z^{r-1}},$$
$$c_r x z^{r-p} = a_p Lz + ALz + B - c_r x z^{r-p-1} C = a_p Lz + \chi_1(z).$$

On en tire

$$z = \left[\frac{a_p Lz + \chi_1(z)}{c_r x}\right]^{\frac{1}{r-p}} = \varphi_1(z).$$

Prenons z_0 racine de l'équation (β'),

$$z_0 = \left[\frac{a_p Lz_0}{c_r x}\right]^{\frac{1}{r-p}} \qquad \text{et} \qquad z_{n+1} = \varphi_1(z_n).$$

$$|z_1 - z_0| = \left|\left[\frac{a_p Lz_0}{c_r x}\right]^{\frac{1}{r-p}}\right| \left|\left[1 + \frac{\chi_1(z_0)}{a_p Lz_0}\right]^{\frac{1}{r-p}} - 1\right|$$

donne $\left|\frac{\chi_1(z_0)}{a_p Lz_0}\right|^{\frac{1}{r-p}} = \left|\frac{A(z_0)}{a_p} + \frac{B(z_0)}{a_p Lz_0} - \frac{C(z_0)}{z_0}\right|^{\frac{1}{r-p}}$ d'ordre $\rho_0^{-\frac{1}{r-p}}$, ainsi que $\left|\frac{z_1 - z_0}{\rho_0}\right|$.

Considérons $|\varphi'_{1z}|$ pour z dans (γ) de centre z_0 et de rayon $\sigma\rho_0$, $\sigma < 1$ étant assez petit pour que les $(r-p)$ cercles (γ) du plan $[k]$ ne se coupent pas.

Montrons d'abord que $\left|\frac{Lz}{Lz_0}\right|$ tend vers 1 si ρ_0 croît indéfiniment.

Puisque $\rho_0(1-\sigma) < \rho < \rho_0(1+\sigma)$ et $\log\rho < |Lz| < \log\rho + 2k\pi$,

l'on a

$$\frac{\log\rho_0+\log(1-\sigma)}{\log\rho_0+2k\pi}<\left|\frac{\mathrm{L}z}{\mathrm{L}z_0}\right|<\frac{\log\rho_0+\log(1+\sigma)+2k\pi}{\log\rho_0}.$$

On a, d'autre part,

$$\varphi'_{1z}=\frac{1}{r-p}\left[\frac{a_p\mathrm{L}z+\mathrm{A}\mathrm{L}z+\mathrm{B}-c_r x z^{r-p-1}\mathrm{C}}{c_r x}\right]^{\frac{1}{r-p}-1}$$
$$\times\left[\frac{a_p}{c_r x z}+\frac{\mathrm{A}'\mathrm{L}z}{c_r x}+\frac{\mathrm{A}}{c_r x z}+\frac{\mathrm{B}'}{c_r x}-(r-p-1)z^{r-p-2}\mathrm{C}-z^{r-p-1}\mathrm{C}'\right].$$

Comme $|\mathrm{L}z|$ est d'ordre $|\mathrm{L}z_0|$, $\left|\frac{a_p\mathrm{L}z}{c_r x}\right|^{\frac{1}{r-p}-1}$ est d'ordre

$$\rho_0^{(r-p)\left[\frac{1}{r-p}-1\right]}=\rho_0^{1-(r-p)},$$

ainsi que le premier crochet.

Dans le second crochet, comme $\frac{1}{c_r x}=\frac{z_0^{r-p}}{a_p\mathrm{L}z_0}$, le premier terme est de l'ordre de $\rho_0'^{-p-1}|\mathrm{L}z_0|^{-1}$. Les autres termes sont d'ordre inférieur à celui-ci. Par suite $|\varphi'_{1z}|$ est d'ordre $|\mathrm{L}z_0|^{-1}$, petit avec $l=|x|$.

On a donc $(r-p)$ branches Z grandes avec $\frac{1}{x}$.

Cherchons la limite de θ quand x tend vers o, t tendant vers une limite. Posons dans (β'),

$$(r-p)\frac{c_r x}{a_p}=\lambda e^{i(t+\upsilon_r-\sigma_p)}\qquad\text{et}\qquad z_0^{r-p}=\rho_1 e^{i\theta_1};$$

il vient

$$\lambda\rho_1 e^{i(t+\upsilon_r-\sigma_p+\theta_1)}=\log\rho_1+i\theta_1,$$

dont on tire l'équation en θ_1,

$$\frac{\theta_1}{\lambda\sin(t+\upsilon_r-\sigma_p+\theta_1)}=e^{\theta_1\frac{\cos(t+\upsilon_r-\sigma_p+\theta_1)}{\sin(t+\upsilon_r-\sigma_p+\theta_1)}}$$

Pour θ_1 d'un plan $[k]$ déterminé et λ tendant vers o, le premier membre croît indéfiniment; pour qu'il en soit de même du second, il faut que $\sin(t+\upsilon_r-\sigma_p+\theta_1)$ tende vers o, $\cos(t+\upsilon_r-\sigma_p+\theta_1)$ restant positif, donc que θ_1 tende vers $\sigma_p-t-\upsilon_r+2n\pi$ et θ_0 vers $\frac{\sigma_p-t-\upsilon_r+2n\pi}{r-p}$.

Or, Z étant dans (γ), $\left|\frac{\mathrm{Z}-z_0}{\rho_0}\right|$ tendant vers o comme $\left|\frac{z_1-z_0}{\rho_0}\right|$ et ρ_0 étant arbitrairement grand, θ_k doit tendre vers θ_0 et, par suite, un θ_k

est voisin de $2(k-1)\pi + \frac{2n\pi + \sigma_p - t - \upsilon_r}{r-p}$, où $n = 0, 1, \ldots (r-p-1)$.

Supposons $r > q > p$.

On peut écrire (I) sous la forme

$$(\mathrm{I}) \quad b_q + \left(\frac{b_{q-1}}{z} + \ldots + \frac{b_0}{z^q}\right) + \left(\frac{a_p}{z^{q-p}} + \ldots + \frac{a_0}{z^q}\right) \mathrm{L}z = c_r x z^{r-q}\left(1 + \frac{c_{r-1}}{c_r z} + \ldots\right)$$

et, en posant $\mathrm{D} = \left(\frac{b_{q-1}}{z} + \ldots\right)$, $\mathrm{E} = \left(\frac{a_p}{z^{q-p}} + \ldots\right)$, $\mathrm{F} = \frac{c_{r-1}}{c_r} + \ldots + \frac{c_0}{c_r z^{r-1}}$,

$$c_r x z^{r-q} = b_q + \mathrm{D} + \mathrm{E}\mathrm{L}z - c_r x z^{r-q-1}\mathrm{F} = b_q + \chi_2(z),$$

dont on tire

$$z = \left[\frac{b_q + \chi_2(z)}{c_r x}\right]^{\frac{1}{r-q}} = \varphi_2(z).$$

Prenons $z_0 = \left[\frac{b_q}{c_r x}\right]^{\frac{1}{r-q}}$ et $z_{n+1} = \varphi_2(z_n)$. On a

$$|z_1 - z_0| = \rho_0 \left| \left[1 + \frac{\chi_2(z_0)}{b_q}\right]^{\frac{1}{r-q}} - 1 \right|;$$

$|\chi_2(z_0)|$ est d'ordre $\rho_0^{-1}|\mathrm{L}z_0|$ et $\left|\frac{z_1 - z_0}{\rho_0}\right|$ tend encore vers o. D'autre part

$$|\varphi'_{2z}| = \frac{1}{r-q}\left| \left[\frac{b_q + \chi_2(z)}{c_r x}\right]^{\frac{1}{r-q}-1} \times \left[\frac{\mathrm{D}' + \mathrm{E}'\mathrm{L}z + \frac{\mathrm{E}}{z} - c_r x \mathrm{F}' z^{r-q-1} - c_r x (r-q-1)\mathrm{F} z^{r-q-2}}{c_r x}\right]\right|;$$

le premier crochet est d'ordre $\rho_0^{1-(r-q)}$, le second d'ordre $\rho_0^{(r-q)-(q-p+1)}|\mathrm{L}z_0|$; donc $|\varphi'_{2z}|$ est, au plus, d'ordre $\rho_0^{1}|\mathrm{L}z_0|$.

On a donc ici $(r-q)$ branches Z grandes avec $\frac{1}{x}$.

48. Absence d'autres branches z' voisines de l'origine. — Nous voulons montrer que les branches z' du plan $[\lambda]$, intérieures à un cercle de centre o et de rayon fixe λ, qui peut d'ailleurs être arbitrairement petit, ne sont autres, quand la variable x' des paragraphes 45 et 46 tend vers o, que les limites Z des z_n.

Supposons d'abord $m \leqq \nu$, ν étant le plus petit des nombres g et h. Si z' vérifie (I), en posant encore $x = X + x'$, on peut écrire

$$a_m z'^m \mathrm{L} z' + z'^{m+1} \mathrm{L}\, z'(a_{m+1} + \ldots) = c_0 x' + z'^h x(c_h + \ldots) - z'^g(b_g + \ldots)$$

d'où

$$a_m z'^m \mathrm{L} z' \left[1 + z' \left(\frac{a_{m+1}}{a_m} + \ldots \right) - \frac{z'^{h-m} x}{\mathrm{L} z'} \left(\frac{c_h}{a_m} + \ldots \right) + \frac{z'^{g-m}}{\mathrm{L} z'} \left(\frac{b_g}{a_m} + \ldots \right) \right] = c_0 x'$$

et, en désignant le crochet par $1 + \tau$, $|\tau|$ étant de l'ordre de $|\mathrm{L} z'|^{-1}$, au plus

$$a_m z'^m \mathrm{L} z' = \frac{c_0 x'}{1 + \tau}.$$

On a d'autre part $a_m z_0^m \mathrm{L} z_0 = c_0 x'$ et, par suite,

$$\frac{z'^m \mathrm{L} z'}{z_0^m \mathrm{L} z_0} = \frac{1}{1 + \tau}.$$

Nous allons montrer d'abord que z' est voisin d'un point z_0.

En posant $z' = \mu e^{i\sigma'} z_0$, σ' étant inférieur à 2π, il vient

$$\mu^m e^{im\sigma'} \left[\frac{\log \mu + \log \rho_0 + i(\sigma' + \theta_0)}{\log \rho_0 + i\theta_0} \right] = \frac{1}{1 + \tau} = 1 - \tau + \frac{\tau^2}{1 + \tau}$$

et, quand ρ_0 tend vers o avec $|x'|$, μ doit rester compris entre deux bornes non nulles. En effet, μ ne peut tendre vers o, car tout le premier membre tendrait vers o. De même, μ ne peut croître indéfiniment car, le second membre étant voisin de 1, $(\log \mu + \log \rho_0)$ devrait être petit par rapport à $\log \rho_0$ et l'on pourrait poser $\log \rho' = \log \mu + \log \rho_0 = \varepsilon \log \rho_0$, ε tendant vers o. En posant aussi $\eta = \frac{\sigma' + \theta_0}{\log \rho_0}$, on aurait

$$\mu^m |\varepsilon + i\eta| = \left| \frac{1}{1 + \tau} \right| \left| 1 + \frac{i\theta_0}{\log \rho_0} \right|$$

et ε serait, au plus, de l'ordre de μ^{-m}. Or $\mu^{-m} = \rho_0^{m - m\varepsilon}$ et, comme ε tendrait vers o, on pourrait prendre $\zeta < \frac{1}{m}$ fixe tel que $\rho_0^{m - m\varepsilon}$ soit petit par rapport à $\rho_0^{m - m\zeta}$. Il en résulterait que $|\varepsilon \log \rho_0|$ serait petit par rapport à $|\rho_0^{m - m\zeta} \log \rho_0|$, qui tend vers o, et que ρ' tendrait vers $1 > \lambda$.

Par suite, μ restant borné, le crochet reste voisin de 1 et il en est de même de μ; d'autre part, σ' doit être petit, le second membre étant

voisin de 1. On a d'autre part

$$m\theta' - m\theta_0 = \arg \mathrm{L} z_0 - \arg \mathrm{L} z' - \arg(1+\tau),$$

où $\arg \mathrm{L} z' = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\theta'}{\log \rho'}\right)$ est, comme $\arg \mathrm{L} z_0$, de l'ordre de $(\log \rho_0)^{-1}$, ainsi que $\arg(1+\tau)$, voisin de τ; par suite $(\theta' - \theta_0)$ est aussi de cet ordre. Pour évaluer $\rho' - \rho_0$, posons $\mu = 1 + \eta'$, on peut alors écrire

$$(1 + m\eta' + \ldots)\left|1 + \frac{\log \mu + i\sigma'}{\log \rho_0 + i\theta_0}\right| = \left|1 - \left(\tau - \frac{\tau^2}{1+\tau}\right)\right|$$

ou

$$(m\eta' + \ldots)\left|1 + \frac{\log \mu + i\sigma'}{\log \rho_0 + i\theta_0}\right| = \left|1 - \left(\tau - \frac{\tau^2}{1+\tau}\right)\right| - \left|1 + \frac{\log \mu + i\sigma'}{\log \rho_0 + i\theta_0}\right|$$

qui montre que $\eta' = \frac{\rho' - \rho_0}{\rho_0}$ est de l'ordre de $|\tau|$, au plus, c'est-à-dire de l'ordre de $(\log \rho_0)^{-1}$ par le premier terme du second membre, ou encore de cet ordre par le second.

Comme l'on a $|z' - z_0| < \rho' - \rho_0 + \rho' |\theta' - \theta_0|$ ou

$$|z' - z_0| < \rho_0 - \rho' + \rho_0 |\theta' - \theta_0|,$$

on voit que $|z' - z_0|$ est, au plus, de l'ordre de $\rho_0 (\log \rho_0)^{-1}$.

On peut donc tracer un cercle (γ') de centre z_0, dont le rayon est de cet ordre et qui contient z'.

Or, d'après son expression du paragraphe **46**,

$$z = \left[\frac{c_0 x' + \mathrm{A} z^\nu}{(a_m + z\mathrm{B})\mathrm{L} z}\right]^{\frac{1}{m}} = \varphi(x', z);$$

φ est holomorphe dans un cercle de centre z_0 et de rayon $\sigma\rho_0$, où $\sigma < 1$ est assez petit pour que $(c_0 x' + \mathrm{A} z^\nu)$ et $(a_m + z\mathrm{B})$ ne s'annulent pas, (car il est possible de trouver σ, indépendant de ρ_0, tel que $a_m z_0^m \mathrm{L} z_0 + \mathrm{A} z^\nu$ ne s'annule pas dans ce cercle (γ), ρ devant être, pour une racine de cette expression, d'un ordre supérieur à ρ_0, puisque $m \leq \nu$).

On peut donc écrire

$$z' = \varphi(z'), \qquad z_1 = \varphi(z_0), \qquad \ldots, \qquad z_{n+1} = \varphi(z_n);$$

il en résulte, z' étant dans (γ) où φ'_z est aussi holomorphe,

$$z' - z_1 = \int_{z_0}^{z'} \varphi'_z \, dz, \qquad z_{n+1} - z_1 \int_{z_0}^{z_n} \varphi'_z \, dz, \qquad z' - z_{n+1} = \int_{z_n}^{z'} \varphi'_z \, dz$$

et comme on a supposé $|\varphi'_z| < N < 1$ dans (γ), l'on a

$$|z' - z_{n+1}| < N\,|z' - z_n| < N^n\,|z' - z_0|$$

qui tend vers o avec $\frac{1}{n}$, ce qui montre que z' est la limite Z des z_n.

On peut raisonner de manière analogue quand m est supérieur à g ou h.

Supposons maintenant que l'on ait, par exemple, $m > g$ et $g < h$. On a, d'après les notations du paragraphe 46,

$$b_g z'^g - x' = \psi_1(z'), \qquad \psi_1 = -z'^g[z' B - x z'^{h-g} C - z'^{m-g} S L z'],$$

où $B = b_{g+1} + \ldots + b_q z'^{q-g-1}$, $C = c_h + \ldots + c_r z'^{r-h}$, $S = a_m + \ldots + a_p z'^{p-m}$.

Or $b_g z_0^g - x' = 0$, ce qui donne

$$b_g z'^g - \psi_1(z') = b_g z_0^g \qquad \text{et} \qquad z'^g\left[1 - \frac{\psi_1(z')}{b_g z'^g}\right] = z_0^g;$$

comme $|z'| < \lambda$ est petit, $\left|\frac{\psi_1(z')}{b_g z'^g}\right|$ est petit et par suite z' est voisin d'un z_0. Évaluons $|z' - z_0|$

$$|z' - z_0| = \left|\left[\frac{x' + \psi_1(z')}{b_g}\right]^{\frac{1}{g}} - \left[\frac{x'}{b_g}\right]^{\frac{1}{g}}\right| = \rho_0\left|\left[1 + \frac{\psi_1(z')}{x'}\right]^{\frac{1}{g}} - 1\right|$$

montre que $|z' - z_0|$ est de l'ordre de $\rho_0^{1+\frac{1}{g}}(\log\rho_0)^{\frac{1}{g}}$ puisque, ρ_0 et ρ' étant du même ordre et x' étant de l'ordre de ρ_0^g, $\left|\frac{\psi_1(z')}{x'}\right|$ est, dans le cas le moins favorable, de l'ordre de $\rho_0 \log\rho_0$.

On peut donc tracer de z_0 comme centre et avec un rayon de l'ordre de $\rho_0^{1+\frac{1}{g}}(\log\rho_0)^{\frac{1}{g}}$, un cercle (γ') contenant z'.

Considérons d'autre part

$$z = \left[\frac{x' + \psi_1}{b_g}\right]^{\frac{1}{g}} = \varphi_1(z), \qquad |\varphi'_{1z}| = \frac{1}{g}\left|\frac{\psi_1}{b_g}\right|\left|\left[\frac{x' + \psi_1}{b_g}\right]^{\frac{1}{g}-1}\right|.$$

et remarquons que $x' + \psi_1(z) = b_g z_0^g + \psi_1(z)$ ne peut s'annuler que pour des valeurs z telles que l'ordre de $|z|$ soit supérieur à ρ_0 puisque, pour $|z|$ de l'ordre ρ_0, $|\psi_1(z)|$ est petit par rapport à ρ_0^g.

On peut donc tracer un cercle (Γ) de centre o, dont le rayon est d'ordre supérieur à ρ_0 (c'est-à-dire grand par rapport à ρ_0) et dans lequel $x' + \psi_1(z)$ ne s'annule pas.

D'autre part, ψ_1 est régulière dans un cercle (γ) de centre z_0 ne contenant pas l'origine et, par suite, dont le rayon peut être de l'ordre de ρ_0 Si ce rayon est tel que (γ) soit contenu dans (Γ), ce qui est possible à réaliser, φ'_{1z} est holomorphe dans (γ).

Or (γ) peut contenir (γ'), dont le rayon est de l'ordre de $\rho_0^{1+\frac{1}{g}}(\log\rho_0)^{\frac{1}{g}}$, et l'on peut conclure comme dans le cas précédent.

49. **Absence d'autres branches z' de grand module.** — Supposons, par exemple, $r > p > q$.

Supposons $\rho' = |z'|$ supérieur à Λ, lui-même supérieur aux modules des racines du plan $[k]$ de $PLz + Q = 0$, vers lesquelles tendent les racines bornées de (I) quand x tend vers 0.

Montrons que, pour une racine z_0 du paragraphe 47, $\frac{\rho'}{\rho_0}$ tend vers 1. On doit avoir

$$\begin{aligned} &c_r x z'^r + x(c_{r-1} z'^{r-1} + \ldots + c_0) \\ &\quad = a_p z'^p Lz' + (a_{p-1} z'^{p-1} + \ldots + a_0) Lz' + (b_q z'^q + \ldots + b_0) \end{aligned}$$

ou, en posant

$$A_1 = a_{p-1} z'^{p-1} + \ldots + a_0, \qquad B_1 = b_q z'^q + \ldots + b_0, \qquad C_1 = c_{r-1} z'^{r-1} + \ldots + c_0,$$

$$c_r x z'^r \left[1 + \frac{C_1}{c_r z'^r}\right] = a_p z'^p Lz' \left[1 + \frac{A_1 Lz' + B_1}{a_p z'^p Lz'}\right].$$

Si Λ est assez grand, les crochets sont voisins de 1 et l'on peut écrire, en tenant compte de $c_r x z_0^r = a_p z_0^p Lz_0$, ε_1 et ε_2 étant petits,

$$\left(\frac{z'}{z_0}\right)^{r-p} = \frac{(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)} \frac{Lz'}{Lz_0}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{A_1 Lz' + B_1}{a_p z'^p Lz'}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{C}{c_r z'^r}.$$

En posant $r - p = m$, $z_0 = \frac{1}{u_0}$, $z' = \frac{1}{u'}$, on voit, comme au paragraphe 48, que $\left|\frac{u'}{u_0}\right|$ est voisin de 1, comme $\frac{\rho'}{\rho_0}$ et que θ' est voisin de θ_0, par suite z' est voisin d'un z_0. On voit encore, en posant $\frac{\rho'}{\rho_0} = 1 + \eta$, que η est de l'ordre de $|\varepsilon_1|$ ou $|\varepsilon_2|$, soit ρ_0^{-1} et que $\theta' - \theta_0$ est, au plus, d'ordre $(\log\rho_0)^{-1}$ ainsi que $\left|\frac{z' - z_0}{\rho_0}\right|$.

On peut donc décrire, de z_0 comme centre, un cercle (γ) dont le rayon est d'ordre $\rho_0(\log\rho_0)^{-1}$ et contenant z'.

Considérons ici $\varphi_1(z)$ du paragraphe 47

$$\varphi_1 = \left[\frac{a_p \mathrm{L} z + \chi_1(z)}{c_r x}\right]^{\frac{1}{r-p}}, \qquad \chi_1 = \mathrm{AL} z + \mathrm{B} - c_r x z^{r-p-1} \mathrm{C},$$

dans laquelle $|\chi_1|$ est d'ordre $\rho_0^{-1} |\log \rho_0|$. On a

$$\varphi'_{1z} = \frac{1}{r-p}\left[\frac{a_p \mathrm{L} z + \chi_1}{c_r x}\right]^{\frac{1}{r-p}-1}\left[\frac{a_p}{c_r x z} + \frac{\chi'_1}{c_r x}\right]$$

et φ'_{1z}, qui correspond à la détermination de φ_1 de la valeur z_0 considérée, reste déterminée et continue dans (γ) ainsi que φ''_{1z}, puisque si ρ_0 est assez grand $(a_p \mathrm{L} z + \chi_1)$ ne peut s'y annuler et que (γ) ne contient pas l'origine.

On peut donc encore écrire, puisque

$$z' - z_1 = \int_{z_0}^{z} \varphi'_{1z}\, dz, \qquad z_{n+1} - z_1 = \int_{z_0}^{z_n} \varphi'_{1z}\, dz,$$

$$|z' - z_{n+1}| = \left|\int_{z_n}^{z'} \varphi'_{1z}\, dz\right| < \mathrm{N}\,|z' - z_n| < \mathrm{N}^n\,|z' - z_0|$$

si $|\varphi'_{1z}| < \mathrm{N} < 1$, ce qui montre que z' est la limite des z_n, soit Z.

CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION ET NATURE DES POINTS SINGULIERS. ÉCHANGE DES BRANCHES. RÔLE DES POINTS o ET X.

50. Détermination des points singuliers. — La fonction $z(x)$ définie par (I) vérifie l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{zR}{P + P'zLz + zQ' - xzR'} = \frac{zR^2}{zLz(P'R - R'P) + z(Q'R - R'Q) + PR},$$

qui devient, P_1 et Q_1 étant des polynomes et en tenant compte de (I),

$$\frac{dz}{dx} = \frac{zPR}{xz(P'R - R'P) + z(Q'P - P'Q) + P^2} = \frac{P_1(z)}{Q_1(x, z)}.$$

Pour cette forme [1], les singularités de $z(x)$ sont de plusieurs espèces :

I. Les points ξ qui avec les racines isolées ζ correspondantes vérifient (I) et donnent $Q_1(\xi, \zeta) = 0$ avec $P_1(\xi, \zeta) \neq 0$.

Ici Q_1, en tenant compte de $x = \frac{PLz + Q}{R}$, donne l'équation

$$\text{(E)} \qquad \zeta L\zeta(P'R - R'P) + \zeta(Q'R - R'Q) + PR = 0$$

et, à chaque racine ζ de (E) correspond un point $\xi = \frac{P(\zeta)L\zeta + Q(\zeta)}{R(\zeta)}$. Nous allons étudier la repartition des ξ sur le plan (x).

L'équation (E) est de la forme (α), en posant $M = \zeta(P'R - R'P)$, de degré $(p + r)$, et $N = \zeta(R'Q - Q'R) - PR$, de degré $(p + r)$ ou $(q + r)$.

Elle admet donc en général, $(p + r)$ racines ζ' voisines, sur chaque plan $[k]$, des racines de $\zeta(P'R - R'P) = 0$ et, si $q > p$, $(q - p)$ racines ζ'' pour lesquelles $|\zeta''|$ est de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}}$.

---

[1] P. Boutroux, Ouvrage cité, p. 8 à 15.

Considérons les différents ordres possibles des degrés p, q, r.

Supposons $p > q > r$, avec $a_0 \neq 0$.

On a seulement des racines ζ' pour lesquelles

$$\xi = \frac{P[\zeta(Q'R - R'Q) + PR)] + \zeta Q(R'P - P'R)}{\zeta R(R'P - P'R)} = \frac{P^2 + \zeta(PQ' - QP')}{\zeta(R'P - P'R)}$$

montre que $|\xi|$ croît indéfiniment avec k.

Il en est de même si $p \geqq r > q$.

Supposons $q > p \geqq r$ ou $q > r > p$.

Pour les ζ', $|\xi|$ croît indéfiniment. Il en est de même pour les ζ'' car $P^2 + \zeta(PQ' - QP')$ est de degré $(p + q)$ et $\zeta(R'P - P'R)$ de degré $(p + r)$.

Supposons $r \geqq p > q$.

On a seulement des racines ζ' pour lesquelles $|\xi|$ croît indéfiniment.

Supposons $r > q > p$.

Pour les ζ', $|\xi|$ croît indéfiniment. Pour les ξ'', au contraire comme $r > q$, $|\xi|$ tend vers 0 quand $|\zeta''|$ croît indéfiniment.

Donc, si $a_0 \neq 0$, l'infini est le seul point-limite des ξ, sauf si $r > q > p$; l'origine est alors point-limite des ξ qui correspondent aux ζ''.

Si $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, (E) devient, en posant $P = zS$,

$$zLz[R(zS' + S) - R'zS] + z(Q'R - R'Q) + zSR = 0$$

et admet la racine $\zeta = 0$; mais il en est de même de $zR^2 = 0$, et $\xi = \frac{Q(0)}{R(0)} = X$ n'est pas de la première catégorie que nous considérons ici.

Considérons le cas général ou l'on a

$$a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0, \qquad a_m \neq 0, \qquad b_0 \neq 0, \qquad b_1 = \ldots = b_{g-1} = 0, \qquad b_g \neq 0,$$
$$c_0 \neq 0, \qquad c_1 = \ldots = c_{h-1} = 0, \qquad c_h \neq 0.$$

(On peut aussi supposer $b_0 = 0$, ce qui n'a d'autre effet que de ramener X à l'origine.)

En posant $P = z^m S$, $Q = b_0 + z^g B$, $R = c_0 + z^h C$, on trouve

$$z(P'R - R'P) = z^m[(m - h)z^h CS + z^{h+1}(CS' - SC') + c_0(mS + zS'),$$
$$PR = z^m S(c_0 + z^h C),$$
$$z(Q'R - R'Q) = z^g[c_0(gB + zB') + gz^h BC + z^{h+1}B'C]$$
$$- z^h[b_0(hC + zC') + hz^g BC + z^{g+1}C'B],$$

de sorte que, en désignant par ν le plus petit des nombres g et h, on peut, en désignant par π_1 et π_2 des polynomes dont le terme constant n'est pas nul, et si $m > \nu$, écrire (E) sous la forme

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \pi_1 \zeta^{m-\nu} \mathrm{L}\zeta - \pi_2 = 0.$$

Elle admet $(m-\nu)$ racines ζ'_k qui tendent vers o avec $\frac{1}{k}$, pour lesquelles

$$\xi = \frac{\zeta^m \mathrm{SL}\zeta + b_0 + \zeta^g \mathrm{B}}{c_0 + \zeta^h \mathrm{C}}$$

tend vers $\mathrm{X} = \frac{b_0}{c_0}$. Elle admet aussi des racines ζ'_k voisines des racines de $\pi_1 = 0$ et. si $p < q$, des racines ζ''_k pour lesquelles $|\xi|$ est de l'ordre de $k^{\left(\frac{q-r}{q-p}\right)}$ et tend vers o ou vers ∞ suivant que $q < r$ ou $q > r$. Si $m \leqq \nu$, E prend la forme

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \pi_3 \mathrm{L}\zeta - \zeta^{\nu-m} \pi_4 = 0.$$

Ici X n'est pas limite de ξ.

Exemple

$$z\mathrm{L}z = x(z^3+1) + z^2 - 1;$$

ici (E) s'écrit $z\mathrm{L}z(1-2z^3) + z^5 + z^4 - 3z^3 - 2z^2 + z = 0$ et aussi, en divisant par z^4,

$$2\mathrm{L}z - z - 1 = \frac{\mathrm{L}z}{z^3} - \frac{3}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^3}.$$

Pour les ζ' voisines de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$, les ξ croissent indéfiniment, tandis que pour la racine ζ'' voisine de la racine z_h de $2\mathrm{L}z = z+1$, qui est d'ordre k. ξ_k est voisin de o, qui est limite de ξ.

Remarque. — L'équation (E), comme équation (α) de forme $\mathrm{M}\mathrm{L}z - \mathrm{N} = 0$ admet une infinité de racines quand M et N ne sont pas des constantes et que $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ n'est pas une constante.

Pour que $\mathrm{M} = z(\mathrm{P}'\mathrm{R} - \mathrm{R}'\mathrm{P})$ soit constant, c'est-à-dire nul, il faudrait que $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}}$ soit constant. En supposant $\mathrm{N} = z(\mathrm{R}'\mathrm{Q} - \mathrm{Q}'\mathrm{R}) - \mathrm{PR}$ non constant, (E) aurait un nombre fini de racines auxquelles correspondraient toutefois une infinité de $\xi = \frac{\mathrm{P}(\zeta)\mathrm{L}\zeta + \mathrm{Q}(\zeta)}{\mathrm{R}(\zeta)}$, n'ayant d'autre point limite que l'infini.

On ne peut avoir N constant avec $M = 0$, sauf si Q et R sont des constantes, car en posant $P = \lambda R$, on aurait, a étant une constante,

$$N = z(R'Q - Q'R) - \lambda R^2 = a \qquad \text{ou encore} \quad z(R'Q - Q'R) = a + \lambda R^2.$$

Or l'on a $R'Q - Q'R = (r - q) b_q c_r z^{q+r-1} + \ldots$, de sorte que le premier membre serait de degré $(q + r)$ et le second de degré $2r$, ce qui est impossible, puisque $q \neq r$.

Si $R = c_0$, $Q = b_0$, (I) devient $\lambda c_0 L z = c_0 x - b_0$, qui se ramène à $L z = \lambda' x$.

Si $M = hN$ sans que M et N soient des constantes, (E) devient $N(hLz + 1) = 0$ et n'a qu'un nombre fini de racines. Aux n racines de $N = 0$ correspondent une infinité de ξ en donnant à $L\zeta$ toutes ses déterminations; tandis qu'à ζ tel que $hL\zeta + 1 = 0$ ne correspond qu'une valeur ξ.

D'autre part, des racines de $N = 0$ peuvent être racines de $zR^2 = 0$ et les ξ correspondants ne sont plus de première espèce.

Exemples :

1° $zLz = x(1 + z)^2 - 1$.

Ici $P = z$, $Q = 1$, $R = (1 + z)^2$; l'on a pour (E),

$$z(1 - z^2)(Lz - 1) = 0 \qquad \text{et} \qquad zR^2 = z(1 + z)^4.$$

Pour $\zeta = 1$, l'on a $\xi_k = \frac{1 + i2k\pi}{4}$ et pour $L\zeta = 1$, $\xi = \frac{1}{1 + e}$.

2° $zLz = x$.

Ici $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1 + Lz}$ et à $\zeta = \frac{1}{e}$ correspond le seul point $\xi = -\frac{1}{e}$.

Remarquons enfin que si nous cherchons les fonctions $z(x)$ définies par (I) qui n'ont pas de point ξ, c'est-à-dire pour lesquelles $MLz - N$ ne s'annule pas, nous trouvons que M doit être nul et N constant, ce qui n'est réalisé que par $Lz = \lambda' x$. L'exponentielle est donc la seule fonction sans point ξ.

51. Nous allons rechercher les points singuliers des autres catégories.

II. On peut avoir, pour la forme générale $\frac{dz}{dx} = \frac{P_1}{Q_1}$ des points x_0 tels que l'on ait $Q_1 = 0$, $P_1 \neq 0$ quel que soit z; mais ici, d'après la forme de Q_1, il faudrait avoir $z(Q'P - P'Q) + P^2 = 0$, ce qui est impossible.

III. On peut avoir des systèmes (x, z) tels que $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$.

Comme $P_1 = zPR$, il faut considérer les x qui correspondent à $z = 0$, $z = \eta_i$ racine de $P = 0$, $z = \eta'_i$ racine de $R = 0$.

Pour $z = \eta_i$, $x_i = \frac{Q(\eta_i)}{R(\eta_i)}$, l'on a $\frac{dz}{dx} = \frac{R^2}{Q'R - R'Q + P'RL\eta_i}$, finie, en général.

Les points x_i sont donc réguliers.

Pour $z = \eta'_i$, x est à l'infini.

Pour $z = 0$, x est à l'infini si $a_0 \neq 0$, au contraire, si $a_0 = 0$, on a $x = X$ et une ou plusieurs branches z_k s'annulent sur chaque plan $[k]$.

C'est ainsi que dans le premier exemple qui précède, on a, pour $x = 1$, d'après le paragraphe 45, une branche z_k qui s'annule.

IV. On peut avoir des valeurs x singulières pour les coefficients de Q_1. Ici, Q_1 étant aussi un polynome en x, l'infini est la seule singularité.

V. On peut avoir des valeurs x pour lesquelles $\frac{1}{z} = y = 0$.

On a $\frac{dy}{dx} = \frac{P_2(x, y)}{Q_2(x, y)}$ et les valeurs pour lesquelles $P_2(x, 0) = 0$ et $Q_2(x, 0) = 0$ peuvent être de nouvelles singularités pour z.

Supposons r supérieur à p et q.

Posons

$$(a_p + \ldots + a_0 y^p) = U, \qquad (b_q + \ldots + b_0 y^q) = V, \qquad (c_r + \ldots + c_0 y^r) = W;$$

il vient

$$y^{r-p} ULy - y^{r-q} V + xW = 0,$$

vérifiée pour $x = y = 0$. Considérons pour ces valeurs

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{\left\{\begin{array}{l} (p-r)Uy^{r-p-1}Ly \quad - y^{r-p-1}U - y^{r-p}U'Ly \\ \quad + (r-q)y^{r-q-1}V - y^{r-q}V' \quad - xW' \end{array}\right\}}.$$

a. Si r est supérieur à $(p+1)$ et $(q+1)$, $\frac{dy}{dx}$ est infinie;

b. Si $r = p + 1 > q + 1$, le dénominateur est infini et $\frac{dy}{dx} = 0$;

c. Si $r = q + 1 > p + 1$, $\frac{dy}{dx}$ est finie.

Si p ou q est supérieur à r, (I) prend l'une des formes

$$-y^{q-p}\,\mathrm{UL}y + \mathrm{V} - xy^{q-r}\,\mathrm{W} = 0, \qquad -\mathrm{UL}y + y^{p-q}\,\mathrm{V} - xy^{p-r}\,\mathrm{W} = 0,$$

qui ne sont pas vérifiées par $x = y = 0$.

En résumé, *les valeurs singulières sont :*

Les points ξ. Il en existe pour toute relation (I) autre que $\mathrm{L}z = \lambda x$.

L'infini, limite de points ξ.

L'origine, si r est supérieur à p et q. Si $r > q > p$, $x = 0$ est en outre limite de points ξ.

Le point $x = \mathrm{X} = \dfrac{b_0}{c_0}$ *quand* $a_0 = 0$; *ce point est en outre limite de points* ξ *si l'on a* $m > \nu$ *dans l'équation* (E_1) *du paragraphe* 50.

52. **Nature des points singuliers.** — *Les points* ξ *sont des points critiques algébriques;* autour de ξ_{k_1} s'échangent deux branches z_{k_1} qui prennent la valeur ζ_{k_1} pour $x = \xi_{k_1}$, en supposant $\dfrac{d^2 z}{dx^2}$ régulière et $\mathrm{R}(\zeta_{k_1}) \neq 0$. En effet, pour $\mathrm{R}(\zeta_{k_1}) = 0$ pour $x = \xi_{k_1}$, il faudrait que ζ_{k_1} fut aussi racine de $\mathrm{PL}z + \mathrm{Q} = 0$.

L'infini est un point singulier essentiel, au sens de Painlevé (1).

En effet, soit dans le plan (x), un cercle (C) ayant l'origine pour centre et de rayon arbitrairement grand. On peut déterminer des valeurs x extérieures à (C), telles que z prenne toute valeur H, différente toutefois des racines η et η' de $\mathrm{P} = 0$ et $\mathrm{R} = 0$. En effet

$$|x| = \left|\frac{\mathrm{P(H)LH} + \mathrm{Q(H)}}{\mathrm{R(H)}}\right|$$

dépasse tout nombre donné pour k assez grand.

Nous avons d'ailleurs constaté cette indétermination, puisque, pour un plan $[k]$ déterminé, quand $\dfrac{l}{k}$ est grand, nous obtenons des branches z_k voisines des racines η' de $\mathrm{R} = 0$ et des branches z_k, si p ou q est supérieur à r, pour lesquelles ρ est de l'ordre $l^{\frac{1}{p-r}}$ ou $l^{\frac{1}{q-r}}$. Au contraire, pour x fixe et pour un plan $[k]$ d'indice assez grand pour que $\dfrac{l}{k}$ soit petit, nous trouvons des branches z_k voisines de racines η de $\mathrm{P} = 0$ et,

(1) P. Boutroux, Ouvrage cité, p. 65.

si q ou r est supérieur à p, des branches pour lesquelles ρ est de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}}$ ou $k^{\frac{1}{r-p}}$.

De plus, quand x est dans le demi-plan tel que $\cos(t+\sigma_0-\upsilon_0)<0$ et si $a_0\neq 0$, $c_0\neq 0$, $r\neq p$, il existe une branche (e) voisine de o avec $\frac{1}{l}$.

A l'origine, si r est supérieur à p et q, une infinité de branches $y=\frac{1}{z}$ s'annulent, $\frac{dy}{dx}$ ayant une valeur déterminée : finie, nulle ou infinie.

L'origine est donc un point transcendant ordinaire pour les $(r-p)$ *ou* $(r-q)$ *branches* z_k *infinies sur chaque plan* $[k]$; il est, d'autre part, un point ordinaire pour les p ou q branches racines de $PLz+Q=0$.

Le point $X=\frac{b_0}{c_0}$ *est, quand* $a_0=0$, *un point transcendant ordinaire* pour les branches z qui s'annulent.

En supposant $a_0=\ldots=a_{m-1}=0$, $a_m\neq 0$, $b_0\neq 0$, $b_1=\ldots=b_{g-1}=0$, $b_g\neq 0$, $c_0\neq 0$, $c_1=\ldots=c_{h-1}=0$, $c_h\neq 0$ et, par exemple, $h<g$, on peut écrire (I), S et T étant des polynomes,

$$z^m SLz + z^h T = c_0 x - b_0.$$

On en tire

$$\frac{dz}{dx}=\frac{c_0-z^h T'_z}{mz^{m-1}SLz+z^{m-1}S+z^m S'Lz+hz^{h-1}T+z^h T'_z},$$

qui, pour $z=0$, $x=X$, est infinie, si $m>1$ et $h>1$, finie, si $m>1$ et $h=1$, ou nulle, si $m=1$. Mais si $\frac{dz}{dx}$ est finie ou nulle, on a encore une infinité de branches nulles.

53. **Échange des branches de** $z(x)$. — En désignant par z_A et z_B deux branches de z qui, pour la valeur initiale $x=\bar{x}$ prennent les valeurs initiales $\bar{z}_A$ et $\bar{z}_B$ de l'ensemble $\mathcal{E}(\bar{z})$ des valeurs $\bar{z}$ qui correspondent à $\bar{x}$, nous nous proposons de *trouver un contour du plan* (x), *partant de* $\bar{x}$ *et y revenant, tel que la valeur finale* $\bar{\bar{z}}_A$ *de* z_A *soit* $\bar{z}_B$ *et que la valeur finale* $\bar{\bar{z}}_B$ *de* z_B *soit* $\bar{z}_A$.

Déterminons d'abord un contour fermé (Γ) de x tel que lorsque x décrit (Γ), la valeur finale $\bar{\bar{z}}_A$ soit $\bar{z}_B$.

Nous supposons que $\bar{x}$ n'est pas un point ξ. Il en résulte qu'aucune valeur $\bar{z}$ n'est un point ζ.

Considérons, pour un instant, z_A comme la variable se déplaçant sur

la surface (Σ) définie au paragraphe 10 et décrivant un chemin (C) joignant $\bar{z}_A$ à $\bar{z}_B$, ne passant pas par l'origine, ni par aucun point ζ, ni par aucune racine η' de $R = 0$.

La fonction $x(z) = \frac{P(z)Lz + Q(z)}{R(z)}$ est continue et décrit sur (x) un contour (Γ) fermé, puisque x étant une fonction uniforme de z sur (Σ), à la valeur finale $z = \bar{z}_B$ correspond nécessairement la valeur initiale $\bar{x}$ pour x.

Le contour (Γ) renferme nécessairement un point critique σ pour z_A car, dans le cas contraire, en considérant maintenant la fonction $z_A(x)$ définie pour toute valeur x (sauf $x = 0$ quand r est supérieur à p et q), on pourrait réduire (Γ) par déformation continue à un chemin unique parcouru deux fois, le long duquel $z_A(x)$ serait régulière et reprendrait la valeur $\bar{z}_A$ pour x revenant en $\bar{x}$.

De même (Γ) renferme un point critique pour z_B car la valeur finale $\bar{\bar{z}}_B$ de z_B n'est pas $\bar{z}_B$, puisque $\bar{z}_B$ n'est pas un point ζ pour lequel deux branches z se confondent et que la valeur finale de z_A, soit $\bar{\bar{z}}_A$, est $\bar{z}_B$.

La valeur finale $\bar{\bar{z}}_B$ est nécessairement, puisque x revient en $\bar{x}$, une des valeurs initiales; nous la désignerons, par exemple, par $\bar{z}_D$ en supposant qu'elle diffère de $\bar{z}_A$, auquel cas le problème serait résolu. Si (Γ) ne renferme qu'un nombre fini de points critiques algébriques sans autres points critiques, il est réductible à un certain nombre de lacets (Λ_1), (Λ_2), ..., (Λ_n) décrits dans cet ordre autour des points critiques qui échangent z_A et z_B avec d'autres branches et dont l'effet est d'amener z à prendre la valeur $\bar{z}_B$.

Ces lacets ne sont d'ailleurs peut-être pas tous nécessaires pour obtenir l'échange de z_A avec z_B. C'est ainsi, par exemple, que si nous avons le tableau suivant :

(Λ_1),	(Λ_2),	(Λ_3),	(Λ_4),	(Λ_5),	(Λ_6),
(A.C),	(C.D),	(D.G),	(G.H),	(H.D),	(D.B),

relatif à l'ensemble des lacets (Λ_1), ..., (Λ_6) où les lettres correspondent aux valeurs initiales des branches qui sont échangées par chacun des lacets supposé décrit isolément à partir de $\bar{x}$, nous pouvons supprimer (Λ_3), (Λ_4), (Λ_5) et obtenir l'échange de z_A avec z_B par la suite des lacets (Λ_1), (Λ_2), (Λ_6). Le nombre des lacets doit cependant être supérieur à 1, d'après l'hypothèse que $\bar{\bar{z}}_B = \bar{z}_D \neq \bar{z}_A$ qui nécessite que le

point critique pour z_B diffère du point critique pour z_A. Dans ces conditions, si (Γ) est équivalent à la suite des lacets (Λ_1), (Λ_2), ..., (Λ_n) de sorte qu'après avoir décrit (Λ_n) l'on ait $\bar{z}_A = \bar{z}_B$, on peut alors en faisant décrire à x la suite des lacets (Λ_{n-1}), ..., (Λ_1), faire reprendre à z_B la valeur $\bar{z}_A$, $\bar{z}_B$ restant la valeur finale de z_A, ce qui résout le problème.

En effet on voit, dans l'exemple ci-dessus, que z_A ayant pris la valeur $\bar{z}_D$ à la suite des lacets (Λ_1) et (Λ_2) s'échange avec $\bar{z}_B$ par (Λ_6), z_B prenant la valeur $\bar{z}_D$. Quand x décrit alors (Λ_2) et (Λ_1), z_B revient à la valeur $\bar{z}_A$; les autres branches reprenant leurs valeurs initiales.

Ce raisonnement, d'ailleurs indépendant du nombre des lacets, suppose que le contour (Γ) correspondant ne renferme qu'un nombre fini de points critiques algébriques, qui sont ici les points ξ, ce qui a surement lieu s'il ne contient pas l'origine (quand r est supérieur à p et q) et X (quand $a_0 = 0$).

Nous allons voir qu'un tel choix est faisable, en considérant les divers cas possibles pour $z(x)$, tout d'abord quand $a_0 \neq 0$.

1° Supposons $a_0 \neq 0$ et r non supérieur à p et q.

Les ξ n'ayant pas de point-limite à distance finie, toute aire bornée du plan (x) n'en contient qu'un nombre fini. On peut donc, en réunissant la valeur initiale $\bar{z}_{g_i}$ d'une branche du plan $[g]$ à la valeur $\bar{z}_{h_j}$ du plan $[h]$ par un chemin (C) situé sur les plans $[g]$, ..., $[h]$ de (Σ) déterminer un contour (Γ) réductible à un nombre fini de lacets décrits autour de points algébriques ξ.

2° Supposons $a_0 \neq 0$, r supérieur à p et q, mais $R = 0$ n'ayant que des racines simples.

L'origine est ici un point transcendant et, si $r > q > p$, limite de points ξ.

Nous voulons montrer que l'on peut tracer un contour (C) joignant $\bar{z}_{g_i}$ à $\bar{z}_{h_j}$ tel que le contour correspondant (Γ) du plan (x) ne contienne pas l'origine et, par suite, ne contienne qu'un nombre fini de ξ.

A cet effet, nous tracerons dans (x) un rayon (α) de l'origine à l'infini, auquel correspondront des contours (A) sur (Σ); nous assujettirons (C) à ne pas rencontrer les (A). Il en résultera que *le contour* (Γ) *correspondant, ne coupant pas* (α), *ne contiendra pas l'origine.*

Nous supposerons que (α) ne passe par aucun point ξ; nous allons montrer d'abord qu'il est possible qu'il en soit ainsi.

L'origine est ici limite des ξ qui correspondent aux ζ''_ν racines de

$$(E) \qquad z\mathrm{L}z(\mathrm{P'R}-\mathrm{R'P})+z(\mathrm{Q'R}-\mathrm{R'Q})+\mathrm{PR}=0.$$

Nous allons montrer que, si l'on pose $\xi=\xi'+i\xi''$, le rapport $\frac{\xi''}{\xi'}$ tend vers $(q-p)$ limites quand $|\xi|$ tend vers o.

On a

$$z(\mathrm{P'R}-\mathrm{R'P})=(p-r)a_p c_r z^{r+p}+\ldots, \qquad z(\mathrm{Q'R}-\mathrm{R'Q})=(q-r)b_q c_r z^{r+q}+\ldots$$

et les racines ζ_ν de grand module sont voisines des racines de

$$\mathrm{L}z=-\frac{b_q}{a_p}\frac{(r-q)}{(r-p)}z^{q-p}$$

qui est de la forme (γ') du paragraphe 9, en posant $z=\frac{1}{u}$, $m=(q-p)$, $y=\frac{b_q}{a_p}\frac{(r-q)}{(r-p)}$.

Les arguments θ des racines sont de la forme

$$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2(q-p)}+\varepsilon_k+\frac{2n\pi}{q-p}, \qquad [n=0,1,2,\ldots(q-p-1)]$$

et, d'autre part, ρ^{q-p} est voisin de $-\frac{a_p}{b_q}\frac{(r-p)}{(r-q)}\theta$.

Considérons

$$\xi=\frac{\mathrm{PL}\zeta+\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}=\frac{(a_p\zeta^p+\ldots)\mathrm{L}\zeta+(b_q\zeta^q+\ldots)}{c_r\zeta^r+\ldots}, \qquad \xi_1=\frac{a_p\zeta^p\mathrm{L}z+b_q\zeta^q}{c_r\zeta^r};$$

si $|\zeta|$ est grand, ξ est voisin de ξ_1; or si l'on pose $\xi_1=\xi'_1+i\xi''_1$, $\zeta=\rho'e^{i\theta'}$, on a

$$\xi'_1=\frac{a_p\rho'^p[\log\rho'\cos(p-r)\theta'-\theta'\sin(p-r)\theta']+b_q\rho'^q\cos(q-r)\theta'}{c_r\rho'^r},$$

$$\xi''_1=\frac{a_p\rho'^p[\log\rho'\sin(p-r)\theta'+\theta'\cos(p-r)\theta']+b_q\rho'^q\sin(q-r)\theta'}{c_r\rho'^r}$$

et, $a_p\rho'^p\theta'$ étant voisin de $-b_q\frac{(r-q)}{(r-p)}\rho'^q$, il en résulte que $\frac{\xi''_1}{\xi'_1}$ est voisin de

$$\lambda=-\frac{(r-q)\cos(p-r)\theta'-(r-p)\sin(q-r)\theta'}{(r-q)\sin(p-r)\theta'+(r-p)\cos(q-r)\theta'}$$

et, comme θ' est voisin, à $2k\pi$ près, de $\frac{\pi+4n\pi}{2(q-p)}$, $\frac{\xi''_1}{\xi'_1}$ et $\frac{\xi''}{\xi'}$ tendent vers les $(q-p)$ valeurs λ correspondantes.

On peut donc déterminer dans (x), $(q-p)$ angles d'ouverture arbitrairement petite ayant leurs sommets à l'origine, tels qu'en dehors de ces angles, il n'y ait qu'un nombre fini de ξ dans le voisinage de l'origine. On peut donc tracer (α) de ε à l'infini en passant par aucun ξ. Or, tous les points de (C) étant à distance finie, aucun point de (Γ) n'approche de l'origine de moins de ε. Montrons maintenant que *les contours* (A) *n'ont pas de points communs*. Nous supposerons la direction de (α) telle que l'on ait $\cos(t+\sigma_0-\upsilon_0)>0$ afin que pour x décrivant (α), aucune branche ne soit (e).

Désignons par $\eta'_{k1}, \ldots, \eta'_{kr}$ les racines de $R=0$ sur le plan $[k]$ et par $W_{k1}, \ldots, W_{kq}$ les racines de $PLz+Q=0$.

Considérons les $h-g+1$ plans $[g], \ldots, [h]$.

Pour $x=\varepsilon$, nous savons, d'après le paragraphe **47**, que l'on a sur chaque plan $(r-p)$ ou $(r-q)$ branches z_k dont ρ_k est d'ordre supérieur à $|\varepsilon|^{-\frac{1}{r-p}}$ ou égal à $|\varepsilon|^{-\frac{1}{r-q}}$ et dont θ_k est voisin de

$$2(k-1)\pi+\frac{2n\pi-\sigma_p-t-\upsilon_r}{r-p} \qquad \text{ou de} \qquad 2(k-1)\pi+\frac{2n\pi+\tau_q-t-\upsilon_r}{r-p}.$$

Si $r>p>q$, il en est ainsi pour tous les plans $[k]$ d'indice supérieur à un entier fixe; si $r>q>p$, au contraire, il en est encore ainsi pour un plan d'indice déterminé quand ε est assez petit. Mais dans le cas ci-dessus, comme nous considérons un nombre déterminé $(h-g+1)$ de ces plans, nous pouvons supposer $|\varepsilon|$ assez petit pour qu'il en soit ainsi pour tous.

Les p ou q autres branches z_k sont voisines des points W_k.

Pour $|x|$ croissant de $|\varepsilon|$ à l'infini sur (α), chaque branche z_k décrit un contour (A) qui tend vers un point η' et, comme cette branche est (o), *la variation de l'indice du feuillet de* (Σ) *qu'elle occupe est inférieure à un entier fixe* μ. Donc, pour une branche dont la valeur inititiale est sur l'un des plans $[g], \ldots, [h]$, l'extrémité η' du contour (A) décrit par elle est sur l'un des plans $[g-\mu], \ldots, [h+\mu]$.

Ainsi l'on a sur ces plans un nombre fini de contours (A) puisque l'on a au plus $r(h-g+1+2\mu)$ points η' et qu'il n'y a dans le voisinage de chacun des η', racine simple de $R=0$, qu'une branche z lorsque l est assez grand. Ces contours (A) vont, soit d'un W à un η', soit de l'infini à un η'.

Nous pouvons établir maintenant que les (A) ne se recoupent pas les uns les autres et n'ont pas de points multiples.

Pour montrer qu'il en est ainsi, supposons que deux (A) se rencontrent en un point z_0 qui n'est pas un η' et auquel correspond un point x_0 à distance finie. Comme x_0 n'est pas un ξ, $\frac{dz}{dx}$, d'après son expression du paragraphe 49, a une valeur finie non nulle. Les voisinages de x_0 et de z_0 se correspondent de façon biunivoque, ce qui contredit l'hypothèse que deux z appartenant à deux (A) tendent vers z_0 quand x tend vers x_0.

D'autre part un (A) ne se recoupe pas, car il correspondrait au point multiple de (A) plusieurs valeurs de $x(z)$, qui est uniforme sur (Σ).

Les (A) *ne morcèlent donc pas* (Σ). On peut donc joindre $\overline{z}_{gi}$ à $\overline{z}_{hj}$ par un contour (C) tout entier sur les plans $[g-\mu], \ldots, [h+\mu]$, ne passant par aucun η' et ne rencontrant aucun (A).

Le contour (Γ) correspondant ne contient pas l'origine, ainsi que nous voulions l'établir.

3° Supposons $a_0 \neq 0$, r supérieur à p et q, $R = 0$ ayant ici des racines multiples.

Faisons encore décrire à x un rayon (α). Si, par exemple, η'_{gi} est une racine double de $R = 0$, deux contours (A_{1g}) et (A_{2g}) aboutissent alors à ce point et le contour $(A_{1g} + A_{2g})$ formé par leur réunion et qui va de l'infini à l'infini, partage (Σ). Il en est de même pour les homologues de η'_i et l'on a, par exemple, pour $\eta'_{g+1,i}$, deux contours $(A_{1,g+1})$ et $(A_{2,g+1})$ qui, par leur réunion, partagent aussi (Σ).

Nous pouvons échanger deux branches z_A et z_B, dont les valeurs initiales $\overline{z}_A$ et $\overline{z}_B$ ne sont pas séparées par un contour (A), par la marche précédemment suivie.

Il reste à considérer le cas où l'on veut échanger deux branches dont les valeurs initiales sont séparées, c'est-à-dire qu'il existe deux régions (Σ') et (Σ'') contenant respectivement $\overline{z}_A$ et $\overline{z}_B$ et séparées par un ou plusieurs contours (A). Nous supposerons ici (Σ') et (Σ'') séparées par un seul contour (A).

Montrons d'abord que *si x s'éloigne à l'infini sur un rayon* (δ) *distinct de* (α), z_A *tend vers un point* η' *de* (Σ') *et* z_B *tend vers un* η_1, *de* (Σ''). En effet, si pour une valeur x' de x sur (δ), z_A rencontrait (A_{1g}) ou (A_{2g}) par exemple, il correspondrait à ce point un point x'' sur (α), ce qui est impossible, puisque $x(z)$ est uniforme sur (Σ). Par conséquent z_A et z_B ne changent pas de région quand x décrit (δ).

Nous savons d'autre part que deux branches z_C et z_D tendent vers η'_{gi}

quand l croît indéfiniment. Supposons alors que (δ) soit le symétrique de (α) par rapport à o ou une direction voisine de celle-ci, dans le cas où elle serait une direction limite de ξ.

En posant $R = (z - \eta'_{gl})^2 S$, on peut tirer de (I)

$$z - \eta'_{gl} = \left[\frac{PLz + Q}{xS} \right]^{\frac{1}{2}}$$

et, par suite, aux directions presque opposées de α et de (δ) correspondent pour $(z - \eta'_{gl})$ et pour le contour $(A_{1g} + A_{2g})$ au point η'_{gl} deux directions presque rectangulaires, de sorte que les deux valeurs z'_g et z''_g de z_C et z_D, qui correspondent à l grand pour x sur (δ), sont voisines de la normale en η'_{gl} à $(A_{1g} + A_{2g})$ et, comme l'argument de $(z' - \eta'_{gl})$ diffère de celui de $(z'' - \eta'_{gl})$ d'environ π, l'un des points, par exemple z'_g, est sur (Σ'), tandis que l'autre, z''_g, est sur (Σ'').

Il en résulte que les valeurs $\bar{z}_C$ et $\bar{z}_D$ de z_C et z_D étaient aussi respectivement sur (Σ') et (Σ'').

Pour échanger z_A avec z_B, décrivons d'abord un contour (Γ') qui échange z_A et z_C et un contour (Γ'') qui échange z_B et z_D, puis décrivons un trajet simple (λ) de $\bar{x}$ à un point x', de grand module, sur (δ); z_A et z_B ont alors pour affixes deux points M′ et M″, voisins de η'_{gl} et respectivement sur (Σ') et (Σ''). Décrivons alors le cercle $(\mathcal{C})$ de centre o et de rayon $|x'|$ qui amène z_A en M″ et z_B en M′, puis $(-\lambda)$ qui amène z_A en $\bar{z}_D$ et z_B en $\bar{z}_C$. Enfin décrivons de nouveau (Γ') qui amène z_B en $\bar{z}_A$, et (Γ'') qui amène z_A en $\bar{z}_B$. *Nous avons réalisé ainsi l'échange des deux branches.*

On peut d'ailleurs résumer ces résultats par le tableau ci-dessous, où I et F désignent respectivement les valeurs initiale et finale.

	Valeurs.					
	x.		z_A.		z_B.	
Contours.	I.	F.	I.	F	I.	F.
Γ'	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{z}_A$	$\bar{z}_C$	$\bar{z}_B$	$\bar{z}_B$
Γ''	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{z}_C$	$\bar{z}_C$	$\bar{z}_B$	$\bar{z}_D$
λ	$\bar{x}$	x'	$\bar{z}_C$	M′	$\bar{z}_D$	M″
$\mathcal{C}$	x'	x'	M′	M″	M″	M′
$-\lambda$	x'	$\bar{x}$	M″	$\bar{z}_D$	M′	z_C
Γ'	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{z}_D$	$\bar{z}_B$	$\bar{z}_C$	z_C
Γ''	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{z}_B$	$\bar{z}_B$	$\bar{z}_C$	z_A

54. Supposons maintenant $a_0 = 0$ et r non supérieur à p et q.

Pour que le contour (Γ), image de (C) joignant $\bar{z}_A$ à $\bar{z}_B$, ne renferme qu'un nombre fini de points critiques algébriques ξ, il suffit qu'il ne renferme pas X, point transcendant et, peut être, limite de ξ. Nous sommes ainsi conduits a tracer dans (x) un contour (β) allant de X à l'infini et à assujettir (C) à ne pas rencontrer les contours (B), images de (β) sur (Σ).

Considérons, comme au paragraphe 46, (I) sous la forme

$$\begin{aligned} & z^m(a_m + \ldots + a_p z^{p-m}) \mathrm{L}\, z \\ & \quad = x c_0 - b_0 + x z^h (c_h + \ldots + c_r z^{r-h}) - z^g (b_g + \ldots + b_q z^{q-g}); \end{aligned}$$

nous savons que pour $x = \mathrm{X}$ on a $z = 0$ ou $z = \varphi$, autre racine de cette équation, et pour $x = \infty$, on a $z = \eta'$ ou $z = \infty$.

Il en résulte quatre sortes de contours (B) : 1° (B) allant de 0 à η'; 2° (B) allant de φ à η'; 3° (B) allant de φ à ∞; 4° (B) allant de 0 à ∞. Supposons que φ soit une racine simple, ce qui est le cas général; deux contours (B) appartenant à l'une des trois premières sortes ne morcèlent pas (Σ), car ceux de la première sorte partent de l'origine mais aboutissent à des points à distance finie et ceux des deuxième et troisième sortes n'ont aucun point commun. Les (B) de la quatrième sorte, au contraire, se réunissent tous à l'origine et s'éloignent à l'infini et, par suite, divisent (Σ) en une infinité de régions (Σ').

Nous savons, d'autre part, d'après le paragraphe 46, que si x tend vers X, m racines z_h tendent vers 0 comme celles de $z_0^m \mathrm{L}\, z_0 = \frac{c_0 x'}{a_m}$, ou ν racines z_h tendent vers 0 comme celles de $z_0^\nu = \lambda x'$, λ étant une constante. Si x' tend vers 0 avec un argument déterminé, il en est de même pour z_0. Cela est évident dans le second cas. Pour le premier, il vient, en posant $z_0^m = u$, une équation (γ). Or, on a pour celle-ci, d'après le paragraphe 8,

$$\rho = l \frac{\sin(t-\theta)}{\theta} = e^{\theta \frac{\cos(t-\theta)}{\sin(t-\theta)}},$$

qui montre que, lorsque l tend vers 0, $\sin(t-\theta)$ doit tendre vers 0, de tel sorte que (si $\theta > 0$), $\cos(t-\theta)$ reste négatif. Par suite, θ tend vers une valeur de forme $(2n+1)\pi + t$. Les arguments θ_0 des z_0 tendent donc vers des valeurs déterminées qui diffèrent d'environ $\frac{2\pi}{m}$. Il en résulte que les (B) morcèlent (Σ) en régions qui, dans le voisinage de

l'origine, forment des secteurs presque égaux; par suite, si x approche de X suivant une direction (δ') différente de (β), les branches z correspondantes sont chacune dans une région (Σ'). Or, comme nous le verrons au paragraphe 56, si x décrit une seule fois un petit cercle $(\mathcal{C}')$ autour de X, chacune des branches voisines de o prend comme valeur finale la valeur initiale d'une branche immédiatement voisine, en supposant celles-ci rangées par ordre d'arguments croissants et le rayon de $(\mathcal{C}')$ assez petit pour que $(\mathcal{C}')$ ne contienne pas les ξ qui correspondent aux branches considérées; par suite, chacune de celles-ci change de région (Σ'). Nous pouvons maintenant échanger deux branches en suivant une marche analogue à celle utilisée dans le troisième cas du paragraphe 53.

Supposons définies les régions (Σ') pour un rayon (β). Considérons pour $x = \bar{x}$ deux branches z_A et z_B dont les valeurs initiales $\bar{z}_A$ et $\bar{z}_B$ sont dans des régions voisines (Σ'_1) et (Σ'_2). Traçons un chemin $\bar{x}x_1$ tel que x_1 ne soit pas sur (β) et que $\overline{x_1 X}$ satisfasse à la condition énoncée plus haut. Parmi les branches dont les valeurs initiales sont sur (Σ'_1) et (Σ'_2), il en est une, soit z_C pour (Σ'_1) et soit z_D pour (Σ'_2), qui devient voisine de o quand x vient en x_1.

Si x décrit $(\mathcal{C}')$ de rayon $\overline{Xx_1}$, en partant de x_1 et dans un sens convenable z_C prend comme valeur finale la valeur initiale de z_D et par suite, passe dans (Σ'_2).

Il en résulte que, pour échanger z_A et z_B, nous pouvons d'abord, par un contour (C) ordinaire, échanger z_A et z_C dans (Σ'_1) puis faire prendre par z_A la valeur de z_D quand x est en x_1, en décrivant $\bar{x}x_1$, puis $(\mathcal{C}')$; enfin z_A étant maintenant dans (Σ'_2), échanger z_A et z_B par un contour ordinaire (C) et ramener z_B en $\bar{z}_A$ par le parcours inverse.

Supposons enfin $a_0 = 0$, mais r supérieur à p et q.

Ici les (B) ne morcèlent plus (Σ), puisque pour $x = \infty$, on a seulement $z = \eta'$, et le mécanisme précédent devient inutile. Mais on retrouve le deuxième cas du paragraphe 53, où l'origine peut être limite de ξ. Il faut donc encore tracer, outre un contour (β), un rayon (α) et faire éviter par (C) les contours (A) ainsi que les (B).

55. Rôle de l'origine dans l'échange des branches. — Nous allons chercher l'effet d'un petit contour décrit par x autour de l'origine, point transcendant quand r est supérieur à p et q.

Supposons $r > p > q$.

Il existe sur le plan $[k]$, $(r-p)$ branches z_k grandes avec $\frac{1}{l}$ et qui sont voisines des racines z_0 de l'équation

$$c_r x z_0^{r-p} = a_p \mathrm{L} z_0$$

et dont les arguments diffèrent d'environ $\frac{2\pi}{r-p}$. On peut écrire (I)

$$c_r x z^{r-p} = a_p \mathrm{L} z \left[1 + \frac{\chi_1(z)}{a_p \mathrm{L} z} \right],$$

$\chi_1(z)$ étant la fonction définie au paragraphe 47, petite avec $\frac{1}{z}$.

Soit $\overline{x}$ la valeur pour laquelle ces $(r-p)$ branches z_k ont été définies. Faisons décrire par x un cercle (c) de rayon $l = |\overline{x}|$ autour de l'origine; comme t n'intervient pas dans la détermination des z_k, le module de ces branches reste grand quand x décrit (C).

En effet, les z restent de l'ordre des z_0 correspondants quand t varie, puisque les inégalités qui établissent la convergence des approximations au paragraphe 47, sont indépendantes de la valeur de t. Il suffit donc de montrer que $\rho_0 = |z_0|$ reste de l'ordre de $\overline{\rho}_0 = |\overline{z}_0|$, correspondant à $x = \overline{x}$, quand x décrit (C).

Or, l'équation ci-dessus se ramène à une équation (γ) en posant $z_0^{r-p} = \frac{1}{z_0'}$; pour laquelle nous avons, au paragraphe 8, les relations

$$\rho = l \frac{\sin(t-\theta)}{\theta}, \qquad \rho^2[(\log\rho)^2 + \theta^2] = l^2;$$

la première montre que, ρ ne pouvant s'annuler pour $l \neq 0$, $\sin(t-\theta)$ ne s'annule pas et, par suite, quand t varie de 2π, θ varie d'une quantité comprise entre π et 3π. La variation de θ étant bornée, la seconde relation montre que ρ_0 reste du même ordre.

Il en résulte que les arguments de $\mathrm{L} z$ et de $\left[1 + \frac{\chi_1(z)}{a_p \mathrm{L} z} \right]$ varient peu et que l'argument θ_k d'une branche z_k varie d'environ $\frac{2\pi}{r-p}$; il devient donc égal à la valeur initiale de l'argument d'une des branches voisines, puisque les $(r-p)$ branches z_k sont les seules branches de grand module. Donc si $\overline{z}_{ki}$ et $\overline{\overline{z}}_{ki}$ désignent les valeurs initiale et finale de z_{ki}, les z_k étant rangés par ordre d'arguments croissants, on a, si t diminue de 2π et quel que soit k,

$$\ldots, \quad \overline{\overline{z}}_{k,i-1} = \overline{z}_{k,i}, \quad \overline{\overline{z}}_{k,i} = \overline{z}_{k,i+1}, \quad \overline{\overline{z}}_{k,i+1} = \overline{z}_{k,i+2}, \quad \ldots.$$

Supposons $r > q > p$.

L'origine peut jouer le même rôle que dans le cas précédent, mais seulement pour un nombre fini de valeurs k.

On a ici, d'une part q branches z_k voisines, pour l petit, des racines de $PLz + Q = 0$ et dont le module reste borné ou de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}}$. Pour les z_k que nous considérons, au nombre de $(r-q)$ et qui vérifient (I) avec les notations du paragraphe 47,

$$c_r x z^{r-q} = b_q + \chi_2(z),$$

$|\chi_2(z)|$ reste petit avec l quel que soit t et, par suite, quand t varie de 2π, $\arg[b_q + \chi_2(z)]$ varie peu et θ_k varie de $\frac{2\pi}{r-q}$ environ. Mais les inégalités auxquelles $|\chi_2|$ doit satisfaire ne sont vérifiées que pour un nombre fini de valeurs k, puisque Lz figure au numérateur dans l'expression de $\chi_2(z)$.

Nous pouvons remarquer, d'autre part, que l'origine est ici limite des ξ_k, qui correspondent aux $\zeta_{k\nu}$ du paragraphe 50 et pour lesquelles $|\xi_k|$ est de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}}$.

Or, k étant fixé, on peut déterminer $l(k)$ assez petit pour que (C) ne contienne pas ces ξ_k.

En effet, $|\xi_k| = \left|\frac{P^2 + \zeta_k(PQ' - QP')}{\zeta_k(PR' - RP')}\right|$ est de l'ordre de $k^{-\left(\frac{r-q}{q-p}\right)}$.

En supposant $u > 0$, prenons l de l'ordre de $k^{-\left(\frac{r-q}{q-p}\right)-(r-q)u}$; les modules ρ_k des $(r-q)$ branches considérées sont de l'ordre de $l^{-\frac{1}{r-q}}$ ou $k^{\frac{1}{q-p}+u}$ et restent de cet ordre quand x décrit (C). Les modules des q autres branches étant au plus de l'ordre de $k^{\frac{1}{q-p}}$, elles ne s'échangent donc pas avec celles-ci, mais seulement entre elles.

Exemple :

$$Lz = x(z^2 + 1) + z.$$

Ici (E) s'écrit $-2z^2 Lz + z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ et admet ζ_{k1} et ζ_{k2} voisines de 0 avec $\frac{1}{k}$ et ζ_{k3} pour laquelle ρ_{k3} est de l'ordre de k.

Il lui correspond $|\xi_{k3}|$ de l'ordre de k^{-1} par $|\xi_{k3}| = \left|\frac{L\zeta_{k3} - \zeta_{k3}}{\zeta_{k3}^2 + 1}\right|$. Or pour l de l'ordre de k^{-1-u}, on a une branche z_{k1} pour laquelle ρ_{k1} est de

l'ordre de k et une branche z_{k2} pour laquelle ρ_{k2} est de l'ordre de k^{1+u}, z_{k2} étant comparable à la racine de $xz = 1$ et z_{k1} à celle de $Lx - z = 0$. Il en résulte que si x décrit (C) avec l comme rayon, (C) ne contenant pas ξ_{k3}, on a $\overline{\overline{z}}_{k,2} = \overline{z}_{k-1,2}$ ou $\overline{\overline{z}}_{k,2} = \overline{z}_{k+1,2}$.

56. **Rôle de X.** — Supposons (I) écrite sous la forme du paragraphe 46,

$$\begin{aligned} &z^m(a_m + \ldots + a_p z^{p-m})Lz \\ &\quad = xc_0 - b_0 + xz^h(c_h + \ldots + c_r z^{r-h}) - z^g(b_g + \ldots + b_q z^{q-g}). \end{aligned}$$

Pour un plan $[k]$ déterminé et pour x tendant vers $X = \frac{b_0}{c_0}$, nous savons, d'après le paragraphe 44, que m branches z_k tendent vers 0 si m est inférieur ou égal au plus petit (ν) des nombres g et h et que, si m est supérieur à ν, on a seulement ν branches z_k qui tendent vers 0. Nous savons d'autre part, par le paragraphe 50, que si $m \leqq \nu$, X n'est pas limite de ξ, tandis qu'au contraire, si $m > \nu$, X est limite de ξ. En supposant $m > \nu$, nous allons montrer d'abord que pour un entier k déterminé, on peut entourer X d'un cercle (C) de rayon l' assez petit pour que (C) ne contienne à son intérieur aucun ξ_k. Ici (E_1), du paragraphe 50, admet des racines ζ qui tendent vers 0 et pour lesquelles $\xi = \frac{\zeta^m SL\zeta + b_0 + \zeta^g B}{c_0 + \zeta^h C}$ tend vers $\frac{b_0}{c_0} = X$. Évaluons alors

$$|\xi - X| = \left|\frac{\zeta^m SL\zeta + b_0 + \zeta^g B}{c_0 + \zeta^h C} - \frac{b_0}{c_0}\right| = \left|\frac{c_0\zeta^m SL\zeta + c_0\zeta^g B - b_0\zeta^h C}{c_0(c_0 + \zeta^h C)}\right|.$$

Or, comme $|\zeta|$ est de l'ordre de $k^{-\frac{1}{m-\nu}}$, $|\zeta^m L\zeta|$ est de l'ordre de $k^{-\frac{\nu}{m-\nu}}$, le numérateur du second membre et, par suite, $|\xi - X|$ est, au plus, de cet ordre.

Considérons maintenant l'effet d'une rotation autour de X, x décrivant (C).

Supposons $m > \nu$. Il vient, en posant $x = X + x'$,

$$z^m SLz = \left(x' + \frac{b_0}{c_0}\right)c_0 - b_0 + (x' + X)z^h C - z^g B,$$

dont on tire, en posant $Xz^h C - z^g B = z^\nu(d_\nu + zD)$, $d_\nu \neq 0$,

$$x' = \frac{z^\nu[d_\nu + zD + z^{m-\nu}SLz]}{c_0 + z^h C}.$$

Donc si $l' = |\overline{x}'|$, pour les ν branches voisines de o avec x', ρ est de l'ordre de $l'^{\frac{1}{\nu}}$ et reste de cet ordre quand x décrit (C) avec le rayon l'.

Considérons, pour $x' = \overline{x}'$, les branches $\ldots, z_{k,i-1}, z_{k,i}, z_{k,i+1}, \ldots,$ parmi ces ν branches petites du plan $[k]$.

Si l' est de l'ordre de $k^{-\frac{-\nu}{m-\nu}-u}$ où $u = 0$, (C) ne contient pas les ξ_k, points critiques pour les branches z_k, de sorte que lorsque x décrit (C), celles-ci ne s'échangent pas.

Or, si l' est petit, l'expression $\frac{d_\nu + zD + z^{m-\nu}SLz}{c_0 + z^h C}$ reste voisine de $\frac{d_\nu}{c_0}$ et par suite, l'argument de z_k^ν varie d'environ 2π avec celui de x', c'est-à-dire que celui de z_k varie d'environ $\frac{2\pi}{\nu}$.

Comme les arguments des branches considérées diffèrent aussi d'environ $\frac{2\pi}{\nu}$, on doit donc avoir, quand t' croît de 2π,

$$\ldots, \quad \overline{\overline{z}}_{k,i-1} = \overline{z}_{k,i}, \qquad \overline{\overline{z}}_{k,i} = \overline{z}_{k,i+1}, \quad \ldots.$$

Supposons $m \leqq \nu$. On peut écrire (I) sous la forme

$$x' = z^m Lz \left[\frac{S}{c_0 + z^h C} + \frac{XCz^{h-m} - z^{g-m}B}{(c_0 + z^h C)Lz} \right].$$

Quand l' est assez petit, le crochet reste voisin de $\frac{a_m}{c_0}$ pour les m branches z_k petites avec l' et, si t' croît de 2π, θ_k croît ici d'environ $\frac{2\pi}{m}$ et l'on a

$$\ldots, \quad \overline{\overline{z}}_{k,i-1} = \overline{z}_{k,i}, \qquad \overline{\overline{z}}_{k,i} = \overline{z}_{k,i+1}, \quad \ldots,$$

mais ici quel que soit k, X n'étant pas limite de ξ.

Remarque. — Quand $m > \nu$, on a, pour un plan $[k]$ d'indice assez grand, m branches z_k pour lesquelles ρ_k est de l'ordre de $k^{-\frac{1}{m}}$, l' restant fixe. Comme $|z^m Lz|$ reste fini. on peut écrire (I) sous la forme ci-dessus et l'on a, quand x' décrit (C), une variation de $\frac{2\pi}{m}$ pour θ_k et non plus de $\frac{2\pi}{\nu}$ comme dans la première hypothèse. Mais ici (C) contient en général, c'est-à-dire pour k assez grand, les ξ_k qui peuvent échanger ces branches, de sorte que les échanges qui s'opèrent ne sont plus dus à la seule existence du point X.

57. Exemples :

(1) $$z \mathrm{L} z = x.$$

Nous nous proposons d'étudier directement le mécanisme d'échange des branches de $z(x)$ définies par cette relation, pour laquelle nous pouvons déterminer les branches de tous les feuillets, ce qui, comme nous le savons, est impossible dans le cas général, où nous devons exclure de nos conclusions un nombre limité de feuillets.

Ainsi que nous l'avons montré au paragraphe 50, $\xi = -e^{-1}$ est l'unique point critique algébrique de la fonction; d'autre part, on a $X = 0$.

Nous allons étudier l'effet d'une rotation autour de ce dernier point.

En reprenant les notations du paragraphe 8, faisons varier t de t_0 à $t_0 + 2\pi$. Considérons d'abord, en supposant $0 < t < 2\pi$, les deux racines θ, qui sont comprises dans $[t - 2\pi, t]$, de l'équation $\delta_1 = 0$,

$$\delta_1(\theta) = \alpha_1 - \beta_1 = \frac{l \sin(t-\theta)}{\theta} - e^{\theta \frac{\cos(t-\theta)}{\sin(t-\theta)}}.$$

On a, pour

$$\begin{array}{lll}
t = \varepsilon, & \theta_0 \text{ dans } (0, \varepsilon) & \text{et } \theta_{-1} \text{ dans } (\varepsilon - 2\pi, \varepsilon - \pi); \\
t = 2\pi - \varepsilon, & \theta_{-1} \text{ dans } (-\varepsilon, 0) & \text{et } \theta_0 \text{ dans } (\pi - \varepsilon, 2\pi - \varepsilon); \\
t = \pi - \varepsilon, & \theta_0 \text{ dans } (0, \pi - \varepsilon) & \text{et } \theta_{-1} \text{ dans } (-\pi - \varepsilon, -\varepsilon); \\
t = \pi + \varepsilon, & \theta_0 \text{ dans } (\varepsilon, \pi + \varepsilon) & \text{et } \theta_{-1} \text{ dans } (-\pi + \varepsilon, 0).
\end{array}$$

Nous allons voir que, lorsque t prend la valeur π_1, θ_{-1} et θ_0 restent dans les intervalles ci-dessus sans tendre vers 0 si l'on a $l > e^{-1}$, tandis que θ_1 et θ_0 tendent vers 0 avec ε si l'on a $l < e^{-1}$.

Posons $l = e^{-1+u}$; on doit avoir, pour $t = \pi - \varepsilon$,

$$\frac{\sin(\varepsilon + \theta)}{\theta} = e^{1 - u - \theta \frac{\cos(\varepsilon + \theta)}{\sin(\varepsilon + \theta)}}.$$

Soit $u > 0$. En posant $\frac{\sin(\varepsilon + \theta)}{\theta} = w$, il faut $we^{\frac{\cos(\varepsilon + \theta)}{w}} = e^{1-u} < e$. Or, si une valeur de θ, petite avec ε vérifiait cette égalité, le premier membre serait arbitrairement voisin de $we^{\frac{1}{w}}$, expression au moins égale à e; l'égalité est donc impossible pour une telle valeur θ.

Soit $u < 0$. En posant $\theta = \lambda\varepsilon$, on peut écrire

$$\frac{\sin[(\lambda+1)\varepsilon]}{\lambda\varepsilon} = e^{1-u-\lambda\varepsilon\frac{\cos[(\lambda 1)\varepsilon]}{\sin[(\lambda 1)\varepsilon]}}.$$

Faisons varier λ. Pour $\lambda = -\lambda_1 < 1$, le premier membre est voisin de $1 - \frac{1}{\lambda_1} < 1$; d'autre part, $1 - u + \lambda_1\varepsilon\frac{\cos[(1-\lambda_1)\varepsilon]}{\sin[(1-\lambda_1)\varepsilon]}$ est voisin de $1 + |u| - 1 + \frac{1}{1-\lambda_1} = |u| - \frac{1}{\lambda_1 - 1} > 0$ pour $\lambda_1(u)$ assez grand. On a donc $\beta_1 > 1 > \alpha_1$.

Pour $\lambda = -1 - \eta_1$, α_1 est voisin de η_1, β_1 est voisin de $e^{1+|u|-\frac{1}{\eta_1}}$ et, pour $\eta_1(u)$ assez petit, on a $\beta_1 < \alpha_1$.

On a donc $\delta_1 = 0$ pour $\lambda = \lambda'$ comprise entre $-\lambda_1(u)$ et $-1-\eta_1(u)$ et ce ne peut être que pour la racine θ_{-1}.

Pour $\lambda = \eta_2$, α_1 est voisin de $\frac{1}{\eta_2} + 1$, β_1 est voisin de $e^{1+|u|}$, on a donc, pour η_2 assez petit, $\beta_1 < \alpha_1$.

Pour $\lambda = \lambda_2$ assez grand, α_1 est voisin de 1, tandis que β_1 est voisin de $e^{|u|}$; on a $\beta_1 > \alpha_1$.

On a donc $\delta_1 = 0$ pour $\lambda = \lambda''$ comprise entre $\eta_2(u)$ et $\lambda_2(u)$ et ce ne peut être que pour la racine θ_0.

Ces racines θ_{-1} et θ_0 qui tendent vers 0 avec ε sont continues puisque, λ_1 et λ_2 dépendant de u et non de ε, λ' et λ'' restent bornées.

Considérons maintenant x décrivant un cercle (C_1) de rayon $l > e^{-1}$, t variant de $t_0 < \pi$ à $t_0 + 2\pi$ et soient, pour $t = t_0, \ldots, \bar\theta_{-2}, \bar\theta_{-1}, \bar\theta_0, \bar\theta_1, \ldots$, les arguments de $\ldots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, \ldots$ dans $[t_0 - 4\pi, t_0 - 2\pi]$, $[t_0 - 2\pi, t_0 - \pi]$, $[t_0 - \pi, t_0]$, $[t_0, t_0 + 2\pi]$, $\ldots$, $\bar\theta_0$ étant d'ailleurs compris entre 0 et t_0.

Quand t varie de 2π, θ doit varier d'une quantité comprise entre π et 3π, car autrement $\rho = \frac{l\sin(t-\theta)}{\theta}$ s'annulerait, l n'étant pas nul.

Donc, quand t croît de 2π, on a en général, c'est-à-dire sauf pour θ_{-1} et θ_0 comprises dans $(t_0 - 2\pi, t_0)$, $\bar{\bar\theta}_i = \bar\theta_{i+1}$, puisqu'il n'existe qu'une racine θ_i par intervalle d'étendue 2π.

Quand t passe par la valeur π, aucun θ ne s'annule, tandis que pour $t = 2\pi$, un θ prend la valeur 0. Or, pour $t = t_0 + 2\pi$, $\bar{\bar\theta}_1 = \bar\theta_2$ nécessite $\bar{\bar\theta}_0 = \bar\theta_1$ et $\bar{\bar\theta}_{-1} = \bar\theta_0$; c'est donc θ_{-1} qui s'annule pour $t = 2\pi$.

Il en résulte que toutes les valeurs finales $\overline{\overline{z}}$ avancent d'une unité dans la suite des valeurs initiales et que $\overline{\overline{z}}_i = \overline{z}_{i+1}$ quelque soit i.

Considérons de même un cercle (C_2) de rayon $l < e^{-1}$. Quand t dépasse π, θ_0 devient négatif et θ_{-1} positif, puisque pour $t = \pi - \varepsilon$, l'on avait θ_0 positif et θ_{-1} négatif et que les limites de λ' et λ'', quand ε tend vers o, ne sont pas nulles. Quand $t = 2\pi$, θ_0 s'annule de nouveau puisque θ_{-1} ne peut s'annuler pour revenir à sa valeur initiale, celle-ci étant la valeur finale de θ_{-2}. *On a donc* ..., $\overline{\overline{z}}_{-2} = \overline{z}_{-1}$, $\overline{\overline{z}}_{-1} = \overline{z}_1$, $\overline{\overline{z}}_1 = \overline{z}_2$, ..., *mais, par exception*, $\overline{\overline{z}} = \overline{z}_0$.

D'autre part, l'effet d'un contour (γ) tournant seulement autour de $\xi = -e^{-1}$ est d'échanger z_{-1} et z_0, en supposant pour la valeur initiale $t_0 < \pi$.

On peut donc échanger z_g et z_0 : il suffit de décrire $(g+1)$ fois (C_2); alors $\overline{\overline{z}}_g = \overline{z}_{-1}$, puis (γ), qui échange z_{-1} et z_0, puis (g) fois (C_2) en sens inverse, qui ramène z_0 en $\overline{z}_g$.

On peut enfin échanger z_g et z_h en échangeant d'abord z_g et z_0 par la marche précédente, puis z_g, jouant maintenant le rôle de z_0 avec z_h, puis enfin en échangeant z_h et z_0.

$$z^2 \mathrm{L} z = x - (z+1). \tag{2}$$

Ici, d'après le paragraphe 50, $X = 1$ est limite de ξ.

En posant $x = 1 + x'$, on peut écrire $x' = z[1 + z\mathrm{L}z]$ et, pour un plan $[k]$ déterminé et $l' = |x'|$ petit, on a, puisque ici $\nu = 1$, une branche z_k voisine de l'origine. Quand x' tourne autour de l'origine, $z_{k,1}$ devient $\overline{z}_{k-1,1}$ ou $\overline{z}_{k+1,1}$. Supposons, au contraire, l' fixe et k grand. On peut écrire aussi $x' = z^2 \mathrm{L} z \left[1 + \frac{1}{z\mathrm{L}z}\right]$, qui définit deux branches z_{k1} et z_{k2} voisines de o, Pour ces branches, ρ est de l'ordre de $k^{-\frac{1}{2}}$, ainsi que $|z\mathrm{L}z|^{-1}$; par suite, l'argument du crochet est petit et varie peu quand x' tourne autour de o; il en résulte que $\arg(z^2 \mathrm{L} z)$ varie d'environ 2π.

En posant $z^2 = w$, on voit que la variation de $\arg x'$ doit être voisine de celle de $\arg\left(\frac{w}{2}\mathrm{L}w\right)$, qui, d'après l'exemple précédent, est voisine de 2π; donc θ varie d'environ π et $z_{k,1}$ devient $\overline{z}_{k-1,2}$ ou $\overline{z}_{k,2}$. Cet exemple met en évidence les rôles différents de X pour les deux hypothèses : k fixe et l' petit ou l' fixe et k grand.

Dans cette dernière hypothèse, en effet, le cercle décrit par x autour de X contient, pour k assez grand, le ξ_k voisin de X qui correspond aux branches z_k considérées, par la racine ζ_k voisine de o de $2z\mathrm{L}z + z + 1 = 0$.

58. Échange des branches $z(x)$ à l'aide d'une branche (e). — L'étude du mode d'échange des branches de $z(x)$ définie par (β) a montré l'existence de deux modes d'échange distincts :

1° Quand x est dans le demi-plan (π') pour lequel il n'existe pas de branche (e), l'échange se fait en passant par l'intermédiaire des branches z_{k+1}, z_{k+2}, ..., z_{k+n-1} entre les branches considérées z_k et z_{k+n}, par rotations autour des ξ qui les échangent deux à deux;

2° Quand x vient dans le demi-plan (π), pour lequel il existe une branche (e), une branche quelconque, par exemple z_k, peut devenir (e) et être échangée directement avec z_{k+n} par rotation autour d'un ξ.

Pour le cas général, nous avons trouvé, au paragraphe 53, que deux branches quelconques z_A et z_B peuvent être échangées par un contour (Γ) décrit par x. Il en résulte que l'on peut échanger z_A et z_C par un contour (Γ_1) puis z_C et z_B par (Γ_2) et que, z_C étant quelconque, on peut, en général, former une infinité de contours $(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ qui échangent z_A et z_B. On peut de ce fait distinguer encore dans le cas général le cas où l'une des branches intermédiaires est la branche z_e; la possibilité de faire passer z_e sur un plan quelconque, en laissant certaines branches dans le voisinage de leurs valeurs initiales, permettant parfois de réaliser des modes d'échange particulièrement simples, analogues au second mode employé pour (β).

Considérons, par exemple, $z(x)$ définie par

$$z^2 + Lz = x(1 - z); \tag{I}$$

ici $P = 1$, $Q = z^2$, $R = (1 - z)$ donnent, dans (E),

$$\zeta L\zeta - (\zeta^3 - 2\zeta^2 + \zeta - 1) = 0.$$

Cette équation admet une racine ζ'_k voisine de 0 comme $\frac{1}{k}$ et deux racines ζ''_{k1} et ζ''_{k2} comparables aux racines de l'équation

$$L\zeta - \zeta^2 = 0,$$

qui sont, en module, de l'ordre de $k^{\frac{1}{2}}$.

Les valeurs correspondantes ξ_k données par

$$\xi_k = \frac{\zeta_k^2 + L\zeta_k}{1 - \zeta_k}$$

sont, pour ζ'_k, ξ'_k voisines de $L\zeta'_k$, $|\xi'_k|$ étant de l'ordre de k et, pour ζ''_{k1} et ζ''_{k2}, ξ''_{k1} et ξ''_{k2}, dont les modules sont de l'ordre de $k^{\frac{1}{2}}$, au plus.

Pour l assez grand, on a une valeur z_{k1} voisine de 1 et une valeur z_{k2} pour laquelle ρ_{k2} est de l'ordre de l.

De plus, quand x est dans le demi-plan (π), où $\cos t < 0$, il existe une branche (e), soit z_e, pour laquelle ρ est voisin de $e^{l\cos t}$ et θ est voisin de $l \sin t$.

Supposons d'abord x en x_0, l_0 étant grand par rapport à k, et t_0 étant petit, de sorte que z_e n'existe pas; considérons les branches $z_{k,1}$ et $z_{k+n,1}$ voisines de 1 sur les plans $[k]$ et $[k+n]$, $(n > 0)$.

Avant de déterminer un trajet permettant d'échanger ces branches, définissons les courbes (γ_k). A cet effet, faisons dans

$$x = \frac{z^2 + Lz}{1 - z}$$

$z = \rho e^{i\theta}$, $\theta = 2k\pi$, ρ variant de 0 à 1. En posant $x_k = \lambda_k + i\mu_k$, il vient

$$\lambda_k = \frac{\rho^2 + \log\rho}{1-\rho}, \qquad \mu_k = \frac{2k\pi}{1-\rho},$$

$$\lambda'_k = \frac{-\rho^3 + 2\rho^2 - \rho + 1 + \rho\log\rho}{(1-\rho)^2}, \qquad \mu'_k = \frac{2k\pi}{(1-\rho)^2};$$

on a $\mu'_k > 0$ et nous verrons plus loin que l'on a aussi $\lambda'_k > 0$. En admettant ce résultat on voit que, pour deux courbes (γ_k) et (γ_{k+1}), on a $\lambda_{k+1} = \lambda_k$, $\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{2\pi}{1-\rho}$, pour une valeur $\rho < 1$; par suite λ_k croissant de $-\infty$ à $+\infty$ et μ_k de $2k\pi$ à $+\infty$, (γ_k) et (γ_{k+1}) limitent une région R_{k+1}.

Les courbes (γ_k) et (γ_{k+1}) admettent pour asymptotes, pour $\lambda < 0$, les droites $m_k = 2k\pi$ et $m_{k+1} = 2(k+1)\pi$.

Il résulte de la définition même de (γ_k) et (γ_{k+1}) que, si x se déplace dans R_{k+1}, toute branche z_{k+1} du plan $[k+1]$ de module inférieur à 1 reste sur ce plan.

En effet, z_{k+1}, pour en sortir, prendrait une valeur pour laquelle on aurait $\theta_k = 2k\pi$ ou $\theta_k = 2(k+1)\pi$; il correspondrait à celle-ci une valeur x sur (γ_k) ou (γ_{k+1}), différente de celle dans R_{k+1} à laquelle z_{k+1} correspond, ce qui est impossible, $x(z)$ étant uniforme sur (Σ).

Remarquons qu'une branche z_{k+1} de module supérieur à 1 possède la même propriété, puisque l'on peut définir, pour ρ variant de 1 à $+\infty$,

deux courbes (γ'_k) et (γ'_{k+1}), situées au-dessous de l'axe réel, et pour lesquelles on peut raisonner comme pour (γ_k) et (γ_{k+1}).

En définitive, si x décrit un contour entièrement contenu dans R_{k+1}, toute branche z_{k+1} reste sur le plan $[k+1]$.

Faisons d'abord décrire par x un arc de cercle de centre O avec le rayon l_0, du point x_0 jusqu'en un point x_1 de R_{k+1} pour lequel on a

$$2k\pi < l_0 \sin t_1 < 2(k+1)\pi$$

après avoir traversé (γ_{k+1}). Les inégalités ci-dessus montrent que pour x venu en x_1, z_e est le plan $[k+1]$. Il en est de même de z_k; en effet,

$$-z_k = \frac{z_k^2 + \mathrm{L}z_k}{x} - 1, \qquad \frac{z_k^2 + \mathrm{L}z_k}{x} = \frac{\rho_k^2 e^{2i\theta_k - it} + e^{-it}(\log\rho_k + i\theta_k)}{l_0}$$

et, pour l_0 grand par rapport à k, z_k est voisin de 1. En posant $\rho_k = 1 + u$, on peut écrire la dernière expression

$$\frac{(1+u)^2\cos(2\theta_k - t) + \cos t \log(1+u) + \theta_k \sin t}{l_0}$$
$$+ i\,\frac{(1+u)^2\sin(2\theta_k - t) - \sin t \log(1+u) + \theta_k \cos t}{l_0},$$

dont les parties principales sont $\frac{\theta_k \sin t}{l_0}$ et $\frac{i\theta_k \cos t}{l_0}$; z_k est donc voisin de $1 - \frac{\theta_k \sin t}{l_0} - \frac{i\theta_k \cos t}{l_0}$.

On a $\rho_k < 1$; en effet, $\rho_k = \sqrt{1 - \frac{2\theta_k \sin t}{l_0} + \frac{\theta_k^2}{l_0^2}\cdots}$ et quand x vient en x_1, $l_0 \sin t$, est voisin de θ_k, de sorte que ρ_k est voisin de $\sqrt{1 - \frac{\theta^2 k}{l_0^2}}$.

D'autre part, le coefficient de i est de signe contraire à $\cos t$; donc, pour t_0, z_k est voisine de 1 sur la droite d'argument $2k\pi$ et au-dessous de celle-ci, au contraire, pour $\cos t_1 < 0$, z_k est au-dessus de cette droite, sur $[k+1]$.

Montrons maintenant que ξ'_{k+1} est sur R_{k+1}.

La racine ζ'_{k+1} est voisine de celle de l'équation $\zeta \mathrm{L}\zeta = -1$. Or, en posant $\zeta = \rho' e^{i\theta'}$, celle-ci donne le système

$$\rho' = \frac{\sin\theta'}{\theta'} = e^{-\theta' \frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}},$$

θ' étant positif et grand, $\cos\theta' > 0$ est petit et $\sin\theta' > 0$ est voisin de 1.

On peut poser $\theta_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ si $\zeta_{k+1} = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $\rho_1 = \rho'(1+\eta)$, ε et η étant petits et ρ' étant voisin de $\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$. Il vient alors, en négligeant les termes petits avec ε et η,

$$\xi'_{k+1} = \lambda + i\mu = \frac{-\rho'^2 + \log\rho' + i\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]}{1 - i\rho'},$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{-\rho'^2 + \log\rho' - \rho'\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]}{1+\rho'^2}, \qquad \mu = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2} - \rho'(\rho'^2 - \log\rho')}{1+\rho'^2}.$$

Il en résulte que λ équivaut à $-\log k$ et μ à $2k\pi + \frac{\pi}{2}$; ζ'_{k+1} est donc compris entre m_k et m_{k+1} et, par suite, dans R_{k+1}.

Nous allons montrer que si x, partant de x_1, décrit un lacet (L) entourant ξ'_{k+1}, z_e et $z_{k,1}$ s'échangent.

En effet, pour x_1, $l = l_1 = l_0$ est grand par rapport à k; d'autre part $|\xi'_{k+1}|$ est de l'ordre de k; par suite, le long de (L), $|x|$ reste de cet ordre, ainsi que $|z_{k+1,2}|$ et cette branche ne peut devenir voisine de ζ'_k, point pour lequel $|\zeta'_k|$ est de l'ordre de $\frac{1}{k}$.

D'autre part une branche d'un autre plan ne peut passer sur $[k+1]$, car elle prendrait une valeur $z = \rho e^{i2k\pi}$ ou $z = \rho e^{i2(k+1)\pi}$, ce qui, nous le savons, est impossible.

Considérons la variation de $z_{k+n,1}$. Quand x décrit l'arc de cercle de x_0 en x_1, $z_{k+n,1}$ reste voisin de 1 sur $[k+n]$ ou $[k+n+1]$, ce dernier cas étant celui où x, pour venir en x_1, traverse (γ_{k+n+1}). Quand x décrit (L), $z_{k+n,1}$ décrit un contour fermé.

Faisons maintenant croître $l\sin t$, $l\cos t$ restant fixe, de manière que x vienne en x_2 dans R_{k+n+1}; en admettant que pour $x = x_1$, $z_{k+n,1}$ soit sur $[k+n+1]$, cette branche reste sur ce plan quand x vient en x_2. En effet, $z_{k+n,1}$ voisine de 1, aurait pu seulement passer sur $[k+n+2]$ si x avait traversé (γ_{k+n+1}); or, pour arriver en x_2, x traverse seulement (γ_{k+n}).

D'autre part, $z_{k,1}$ qui est maintenant (e), est venue sur $[k+n+1]$.

Nous pouvons donc échanger $z_{k,1}$ et $z_{k+n,1}$ par un lacet (L) entourant ξ'_{k+n+1} et ramener $z_{k+n,1}$ à la valeur initiale de $z_{k,1}$ en suivant le premier parcours $x_2 x_1 x_0$, en sens inverse.

L'échange de ces branches se fait ainsi par l'intermédiaire de z_e, comme pour (β).

Ce mécanisme peut d'ailleurs s'étendre à $z_{k,2}$ en échangeant au préalable cette branche avec $z_{k,1}$ par un contour (Γ) convenable.

Il reste à montrer que $u = -\rho^3 + 2\rho^2 - \rho + 1 + \rho \log \rho$ ne s'annule pas quand ρ varie de 0 à 1.

Considérons $u' = -3\rho^2 + 4\rho + \log \rho$ et $u'' = -6\rho + 4 + \frac{1}{\rho}$; on a $u'' = 0$ pour $\rho = \frac{2+\sqrt{10}}{6}$ et pour cette valeur

$$u' = \frac{1+2\sqrt{10}}{6} + \log\left(\frac{2+\sqrt{10}}{6}\right) > 1.$$

Pour $\rho = 0$, $u' = -\infty$ et pour $\rho = 1$, $u' = 1$, donc u' est croissante de 0 à $\frac{2+\sqrt{10}}{6}$ et décroissante ensuite, donc $u' = 0$ pour $\rho < \frac{2+\sqrt{10}}{6}$.

On trouve pour $\rho = 0,35$, $u' = -0,02$ et pour $\rho = 0,36$, $u' = 0,12$. Il résulte pour $\rho = 0,35$, $u = 0,47, \ldots$ et comme entre 0,35 et 0,36, u décroît de moins de $0,01 \times u'(0,35) < 0,01$, u a un minimum encore positif entre 0 et 1 (puisque $u = 1$ pour $\rho = 0$ et $\rho = 1$) et, par suite, ne s'annule pas.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 mars 1939.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 mars 1939.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.