

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

D. BARBIER

**Les étoiles doubles à longue période. Propriétés statistiques
et valeurs hypothétiques de leurs éléments**

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1934

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1934__157__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :

2326

Série A

N° 1462

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. D. BARBIER

1^{re} THÈSE. — LES ÉTOILES DOUBLES A LONGUE PÉRIODE. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES ET VALEURS HYPOTHÉTIQUES DE LEURS ÉLÉMENTS.

2^e THÈSE. — LE PROBLÈME DES DEUX CORPS DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

Soutenues le

1934, devant la Commission d'Examen.

MM. ESCLANGON, *Président.*

CHAZY

LAMBERT

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1934

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

<i>Professeurs honoraires</i>	{	H. LE CHATELIER.	Léon BRILLOUIN.
		H. LEBESGUE.	GOURSAT.
		A. FERNBACH.	WALLERANT.
		A. LEDUC.	GUILLET.
		Émile PICARD.	PECHARD.
		Rémy PERRIER.	FREUNDLER.

PROFESSEURS

P. JANET.....	Électrotechnique générale.	G. BRUHAT.....	Physique.
G. BERTRAND.....	Chimie biologique.	E. DARMOIS.....	Physique.
M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.	A. DEBIERNE.....	Radioactivité.
M. CAULLERY.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).	A. DUFOUR.....	Physique (P.C.N.).
		L. DUNOYER.....	Optique appliquée.
G. URBAIN.....	Chimie générale.	A. GUILLIERMOND.	Botanique (P.C.N.).
Émile BOREL.....	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	M. JAVILLIER.....	Chimie biologique.
L. MARCHIS.....	Aviation.	L. JOLEAUD.....	Paléontologie.
Jean PERRIN.....	Chimie physique.	ROBERT-LÉVY.....	Zoologie.
H. ABRAHAM.....	Physique.	H. MOUTON.....	Chimie physique.
E. CARTAN.....	Géométrie supérieure.	F. PICARD.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
M. MOLLIARD.....	Physiologie végétale.		
L. LAPICQUE.....	Physiologie générale.	Henri VILLAT.....	Mécanique des fluides et applications.
E. VESSIOT.....	Théorie des fonctions et théorie des transformations.	Ch. JACOB.....	Géologie.
A. COTTON.....	Physique.	P. PASCAL.....	Chimie minérale.
J. DRACH.....	Analyse supérieure.	M. FRÉCHET.....	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Charles FABRY.....	Physique.	E. ESCLANGON.....	Astronomie.
Charles PÉREZ.....	Zoologie.	M ^{me} RAMART-LUCAS.	Chimie organique.
Léon BERTRAND.....	Géologie structurale et géologie appliquée.	H. BÉGHIN.....	Mécanique physique et expérimentale.
É. BLAISE.....	Chimie organique.	FOCH.....	Mécanique expérimentale des fluides.
R. LESPIEAU.....	Théories chimiques.	PAUTHENIER.....	Physique (P.C.N.).
P. PORTIER.....	Physiologie comparée.	De BROGLIE.....	Théorie physique.
E. RABAUD.....	Biologie expérimentale.	CHRÉTIEN.....	Optique appliquée.
P.-A. DANGEARD.....	Botanique.	P. JOB.....	Chimie générale.
V. AUGER.....	Chimie appliquée.	LABROUSTE.....	Physique du Globe.
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.	PRENANT.....	Zoologie.
Paul MONTEL.....	Mécanique rationnelle.	VILLEY.....	Mécanique physique et expérimentale.
P. WINTREBERT.....	Anatomie et histologie comparées.	BOHN.....	Zoologie (P.C.N.).
L. BLARINGHEM.....	Botanique.	COMBES.....	Sciences naturelles (P.C.N.).
O. DUBOSQ.....	Biologie maritime.	GARNIER.....	Mécanique rationnelle.
G. JULIA.....	Mécanique analytique.	PÈRES.....	Mécanique des fluides.
C. MAUGUIN.....	Minéralogie.	HACKSPILL.....	Chimie (P.C.N.).
A. MICHEL-LÉVY.....	Pétrographie.	LAUGIER.....	Physiologie générale.
H. BÉNARD.....	Mécanique expérimentale des fluides.	TOUSSAINT.....	Technique Aéronautique.
A. DENJOY.....	Calcul différentiel et calcul intégral.	M. CURIE.....	Physique (P.C.N.).
L. LUTAUD.....	Géographie physique et géologie dynamique.	G. RIBAUD.....	Hautes températures.
Eugène BLOCH.....	Physique théorique et physique céleste.	CHAZY.....	Mathématiques.
		GAULT.....	Chimie (P.C.N.).
		CROZE.....	Physique.
		DUPONT.....	Chimie (P.C.N.).

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.

A MES PARENTS

PREMIÈRE THÈSE

LES

ÉTOILES DOUBLES A LONGUE PÉRIODE

PROPRIÉTÉS STATISTIQUES ET VALEURS HYPOTHÉTIQUES
DE LEURS ÉLÉMENTS

INTRODUCTION.

1. L'étude des propriétés statistiques des éléments des étoiles doubles est de la plus haute importance pour accroître ou tout au moins pour vérifier nos connaissances sur l'évolution des étoiles en général. Il semble, en effet, qu'une étoile sur trois soit double et par suite la formation d'un tel système ne peut être considérée comme un accident fortuit et elle doit trouver sa place normale dans une théorie correcte de l'évolution des étoiles. En particulier on doit rejeter absolument la théorie, qui n'est d'ailleurs plus guère soutenue, suivant laquelle les étoiles doubles seraient formées par la réunion de deux étoiles simples qui se seraient approchées suffisamment près pour qu'il y ait capture. Les calculs effectués par certains auteurs semblaient montrer que l'ordre de grandeur de la probabilité d'une telle capture pouvait satisfaire à la condition qu'une étoile sur trois soit double. L'examen attentif des hypothèses effectuées à ce sujet ne permet pas d'accepter ce résultat. En effet on suppose que :

a. Lorsque l'approche de deux étoiles s'effectue à une distance plus petite qu'une certaine distance donnée, par exemple 40 unités astronomiques, il y a forcément capture. Rien ne permet de justifier cette hypothèse car ceci supposerait un choc ou tout au moins

une perturbation très importante due à une grosse planète appartenant à l'une des étoiles, planète purement hypothétique et dont l'action serait dans la presque totalité des cas tout à fait négligeable.

b. Toutes les étoiles approchant à une certaine distance d'une étoile donnée ont la même probabilité d'être captées, quel que soit leur mouvement relatif par rapport à l'étoile de référence. Il est bien évident que les étoiles qui ont le plus de chances d'être captées par une étoile donnée sont celles qui ont un mouvement relatif négligeable (en dehors de la sphère d'action de l'étoile), mais ce sont également celles qui ont la probabilité la plus faible d'en approcher à une distance convenable pour permettre la formation d'une étoile double.

Une deuxième théorie a été proposée, celle de la scission. Sous sa forme initiale une étoile était supposée fluide, homogène, en rotation, ce qui devait entraîner avec le temps sa séparation en deux composantes. Nos connaissances sur l'état des étoiles ayant effectué de nombreux progrès cette théorie doit être profondément modifiée pour faire intervenir la pression de radiation qui doit accentuer l'instabilité des étoiles, en particulier de celles qui ont une masse importante puisque celles-ci sont déjà instables en l'absence d'une rotation. La théorie complète de cet équilibre n'a pas été tentée et nous ne savons pas si l'on est conduit à une scission d'une manière continue ou à un cataclysme présentant l'aspect d'une explosion.

Enfin une troisième théorie destinée à expliquer la formation des étoiles doubles est la suivante : les étoiles doubles se sont formées à partir de deux noyaux voisins à l'origine. Cette théorie est assez peu satisfaisante car elle ne fait que déplacer le problème, puisqu'elle n'explique pas la fréquence considérable de deux noyaux voisins.

2. Si nous admettons que, au moment de leur formation, les deux composantes d'une étoile double sont très voisines l'une de l'autre, il nous faut expliquer de quelle manière l'évolution de tels systèmes a lieu pour aboutir à des couples dont les périodes peuvent sans doute atteindre et même dépasser cent mille ans.

Ceci présente de très grandes difficultés. Les causes que nous connaissons et qui pourraient modifier la période sont les suivantes :

- 1° Les marées produites sur les étoiles par leur action mutuelle;
- 2° Une variation séculaire de la masse des composantes;
- 3° Le potentiel de gravité de l'ensemble des étoiles (H. Mineur);
- 4° Les approches d'étoiles étrangères au système;
- 5° La présence d'un milieu résistant.

Toutes ces causes ont été soumises au calcul par de très nombreux auteurs et il en résulte que d'après ce que nous croyons savoir sur l'évolution des étoiles, elles sont insuffisantes pour produire l'effet cherché. En particulier Markowitz ⁽¹⁾ conclut : S'il n'y a pas de forces agissant sur une étoile double qui tende à accroître la période, le demi-grand axe et l'excentricité, autre que celles dues aux marées, à la décroissance de masse, et aux rapprochements d'étoiles, alors en général ces éléments décroissent. De même Mineur conclut que l'action de l'ensemble des étoiles est négligeable pour les couples dont la période n'atteint pas 100000 ans. L'effet d'un milieu résistant serait également de diminuer les éléments en question. Les difficultés qui se présentent pour expliquer l'évolution ultérieure des étoiles doubles semblent montrer que la théorie de la scission est encore établie sur des bases bien fragiles.

D'après Öpik ⁽²⁾ les différences entre les caractères des étoiles doubles proviennent non d'un degré différent dans l'évolution mais bien de conditions initiales différentes, sans qu'on puisse d'ailleurs préciser quel est le mode de formation des étoiles doubles. D'une manière plus générale toutes les étoiles auraient le même âge, ce qui est d'accord avec les théories modernes sur l'univers en expansion.

3. On voit, d'après ce très court résumé, que pratiquement nous ne savons presque rien sur la formation et l'évolution des étoiles doubles. Qualitativement, en effet, la théorie classique de

⁽¹⁾ *Astrophysical Journal*, t. 75, 1932, p. 69.

⁽²⁾ *Publications de l'Observatoire de Tartu*, t. XXV, 1924.

l'évolution (Lockyer, Russell, Eddington) rend assez bien compte des faits, mais ainsi que nous venons de le dire il n'en est pas de même quantitativement à cause de la difficulté d'expliquer la variation des éléments des étoiles doubles avec le temps et aussi à cause des idées de l'abbé Lemaître et d'Öpik d'après lesquelles les étoiles auraient toutes sensiblement le même âge.

Ceci montre le très grand intérêt qu'il y a à accroître nos connaissances relatives aux étoiles doubles. Certaines recherches ont pu être menées à bien par la considération des distances apparentes entre les composantes des étoiles doubles, mais il serait sans doute plus fructueux de s'adresser à des éléments physiques tels que l'excentricité ou la période. Malheureusement le nombre des étoiles doubles, et en particulier de celles ayant une longue période, dont l'orbite est connue est très faible : on a guère pu déterminer plus de 120 orbites d'étoiles doubles visuelles alors qu'on en connaît plusieurs milliers. Outre que ce nombre est bien faible pour permettre des recherches statistiques sérieuses, les données ont le très grave inconvénient d'être troublées par un phénomène de sélection. Celui-ci agit de plusieurs manières très différentes.

1° Il y a sélection par rapport aux périodes : les étoiles de faibles périodes sont très serrées et ne sont pas dédoublées ; les étoiles de grandes périodes ont un mouvement trop lent pour permettre le calcul d'une orbite. Cet effet rend impossible une réponse même grossièrement approchée à des questions telles que la suivante : quelle est la période moyenne des étoiles doubles en général ou des étoiles doubles présentant une caractéristique particulière en ce qui concerne le spectre, l'excentricité, etc. ?

2° Il y a sélection par rapport aux excentricités. Si un couple a une période faible il est très serré, mais si son excentricité est grande il augmentera beaucoup ses chances d'être observé vers l'apoastre. Si sa période est grande et si son excentricité est faible il faudra attendre presque une période complète pour connaître son mouvement, au contraire si l'excentricité est grande, des observations au voisinage du périastre permettent d'obtenir assez rapidement une orbite. Nous devons donc connaître les orbites des couples qui ont une excentricité plus élevée que la moyenne. Comme la manière dont cette sélection agit dépend de la période on peut se demander si la corrélation entre les périodes et les

excentricités qui a été mise en évidence est bien réelle, ce qui est très probable, mais tout au moins si son caractère n'est pas sérieusement altéré ⁽¹⁾.

3° Il y a sélection par rapport aux magnitudes absolues, les étoiles faibles nous échappent plus facilement que les autres et aussi par rapport à la différence entre les magnitudes des deux composantes, le dédoublement d'un couple étant d'autant plus facile que cette différence est plus faible.

4° Il y a encore une sélection d'une très grande importance. C'est celle due aux anomalies moyennes. Nous avons déterminé les anomalies moyennes de 38 couples de période supérieure à 100 ans pour l'année 1900. On a trouvé la répartition suivante (en pour cent).

$\pm$ g.....	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
N.....	52,6	7,9	13,1	7,9	10,6	7,9	

Ceci montre qu'en général on peut déterminer l'orbite seulement au moment du passage du compagnon au périastre. Dans les recherches relatives aux couples dont l'orbite est inconnue une sélection analogue est à craindre et il sera en général peu prudent de supposer *a priori* que toutes les anomalies moyennes des étoiles étudiées sont également probables.

4. On voit qu'un accroissement du nombre des données, qui serait très important en lui-même, aurait aussi pour résultat de réduire les effets de la sélection. C'est pourquoi nous avons entrepris une série de recherches sur les étoiles doubles dont l'orbite est inconnue en vue de déterminer des valeurs hypothétiques de certains de leurs éléments. Les éléments en question sont l'excentricité et la période. L'étude des étoiles doubles dont l'orbite est connue a montré l'intérêt de ces éléments car il y a une corrélation très nette entre eux et aussi d'autres plus incertaines avec les magnitudes absolues ou les types spectraux. Nous y joignons l'étude de la répartition des pôles des orbites; il serait également intéressant d'étudier la répartition des grands axes. Un dernier chapitre

(1) Notons que des effets de la sélection analogues à ceux qu'on vient d'exposer existent également pour les étoiles doubles spectroscopiques.

enfin est consacré à des remarques sur l'emploi des parallaxes dynamiques.

Ces recherches ont été entreprises à l'Observatoire de Paris où j'ai exécuté, jusqu'à mon passage à l'Observatoire de Marseille à la fin de 1930, une grande partie des calculs qu'elles ont nécessité. Je suis extrêmement reconnaissant à M. Esclangon, directeur de cet établissement et à M. Jules Baillaud, chef du service photographique, pour la bienveillance qu'ils n'ont cessé de me témoigner pendant l'exécution de ce travail. Je remercie également M. J. Bosler, directeur de l'Observatoire de Marseille, où ce travail a pu être achevé grâce à l'intérêt qu'il a bien voulu y porter.

CHAPITRE I.

FONCTION DE RÉPARTITION DES EXCENTRICITÉS ET DES ANOMALIES MOYENNES. L'ÉQUATION DU PROBLÈME.

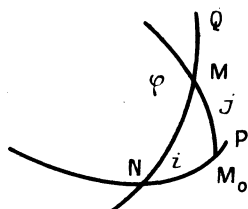
1. Étant donné un ensemble d'étoiles doubles nous nous proposons de trouver la répartition de leurs excentricités et de leurs anomalies moyennes, c'est-à-dire le nombre de couples, pour lesquels on a à la fois une excentricité comprise entre e et $e + de$ et une anomalie moyenne comprise entre g et $g + dg$. Dans presque toutes les recherches statistiques relatives aux étoiles doubles on suppose a priori toutes les anomalies moyennes également probables. Ceci est vrai pour l'ensemble des étoiles doubles, mais ainsi que nous l'avons dit plus haut, la sélection peut agir de manière à rendre certaines anomalies plus probables que d'autres et cela d'une manière qu'il serait difficile de prévoir a priori. C'est pourquoi nous considérons la répartition des anomalies moyennes comme inconnue.

Il semble que le problème que nous posons ici soit moins important et plus difficile que celui qui consisterait à obtenir pour chaque couple une valeur probable de son excentricité. Nous verrons au troisième paragraphe que ce dernier problème donne naissance à de graves difficultés théoriques et qu'on ne peut obtenir une valeur hypothétique de l'excentricité d'un couple appartenant à un certain groupe d'étoiles doubles que lorsque la répartition des excentricités des étoiles appartenant à ce groupe est connue.

2. Les couples dont nous nous occupons ici sont ceux pour lesquels on connaît à un instant donné l'angle de position θ et la séparation apparente ρ des composantes et en outre les dérivées θ' , ρ' , ρ'' de ces données par rapport au temps. Nous allons établir deux relations qui lient ces quantités à l'excentricité et à l'anomalie moyenne.

Soit (*fig. 1*) P le plan de référence, c'est-à-dire le plan perpendiculaire à la ligne de visée passant par l'étoile principale du

Fig. 1.



couple et soit Q le plan de l'orbite dont l'inclinaison est i . Soient encore M la position du compagnon à une certaine époque et M_0 sa projection sur P. Appelons j l'angle $M_0 M$ et φ l'angle de $M_0 M$ avec le plan de l'orbite. Nous ferons varier j de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et φ de 0 à π .

Les relations suivantes nous sont fournies par le problème des deux corps :

$$\begin{aligned}\rho^3 \theta'^2 - \rho^2 \varphi'' &= n^2 a^3 \cos^3 j, \\ \rho^2 \theta' &= n a^3 \sqrt{1 - e^2} \cos i, \\ \rho &= a(1 - e \cos u) \cos j,\end{aligned}$$

où a , n et u sont respectivement le demi-grand axe, le moyen mouvement et l'anomalie excentrique.

De ces relations on tire

$$\frac{1 - e \cos u}{1 - e^2} = \left(1 - \frac{\varphi''}{\rho \theta'^2}\right) \frac{\cos^2 i}{\cos^4 j}.$$

Mais dans le triangle rectangle NMM₀ on a

$$\cos i = \cos j \sin \varphi,$$

l'équation précédente s'écrit par suite

$$\frac{1 - e \cos u}{1 - e^2} = \left(1 - \frac{\varphi''}{\rho \theta'^2}\right) \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 j},$$

et c'est sous cette forme que nous l'utiliserons.

Établissons maintenant la deuxième relation. Soit.

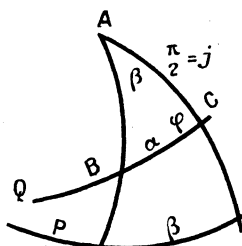
$$\cot \alpha = \frac{dr}{r dv},$$

où v est l'anomalie vraie et r le rayon vecteur, on sait que α est l'angle de la tangente à l'orbite et du rayon vecteur. De même pour l'orbite projetée on a

$$\cot \beta = \frac{d\rho}{\rho d\theta},$$

Soit A le pôle de la sphère céleste (*fig. 2*), P et Q sont les plans

Fig. 2.



de référence et le plan de l'orbite et soit $BC = \alpha$, on a dans le triangle ABC

$$\cot \alpha \cos j = \cot \beta \sin \varphi + \sin j \cos \varphi$$

$$\frac{dr}{r dv} = \frac{d\rho}{\rho d\theta} \frac{\sin \varphi}{\cos j} + \tan j \cos \varphi.$$

D'autre part on sait que

$$r = a(1 - e \cos u);$$

$$u - e \sin u = n(t - T),$$

d'où

$$\frac{dr}{dt} = aen \frac{\sin u}{1 - e \cos u},$$

ce qui avec l'équation des aires

$$r^2 \frac{dv}{dt} = na^2 \sqrt{1 - e^2}$$

nous donne facilement

$$\frac{dr}{r dv} = \frac{e \sin u}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Notre deuxième relation s'écrit donc

$$\frac{e \sin u}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\rho'}{\rho \theta'} \frac{\sin \varphi}{\cos j} + \tan g j \cos \varphi.$$

Nous posons

$$(1) \quad \frac{\rho'}{\rho \theta'} = \omega, \quad 1 - \frac{\rho''}{\rho \theta'^2} = \sigma.$$

Pour chaque couple ω et σ sont des données de l'observation. σ est essentiellement positif puisque

$$\sigma = \frac{1 - e \cos u}{1 - e^2} \frac{\cos^2 j}{\sin^2 \varphi}$$

et que e est toujours plus petit que l'unité. ω peut être positif ou négatif, nous ne considérons que sa valeur absolue, son signe ne provenant que de la convention faite pour la mesure des angles de position.

Posons également

$$(2) \quad \frac{e \sin u}{\sqrt{1-e^2}} = \lambda, \quad \frac{1 - e \cos u}{1 - e^2} = \mu,$$

λ et μ sont fonction uniquement de l'excentricité et de l'anomalie moyenne g puisque

$$u - e \sin u = g.$$

Nos deux relations fondamentales deviennent donc

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\omega \sin \varphi + \sin j \cos \varphi}{\cos j}, \\ \mu = \sigma \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 j}, \end{cases}$$

3. Les équations (2) nous donnent

$$(4) \quad e^2 = \frac{\lambda^2 + (\mu - 1)^2}{\mu^2},$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad \sigma^2(1 - e^2) = \cos^2 j (1 + \cot^2 \varphi) \\ \times (\sin^2 j - 2\omega \sin j \cot \varphi + 2\sigma - 1 - \omega^2 - \cot^2 \varphi),$$

on pourrait penser obtenir une valeur probable de e^2 en multipliant

cette expression par la probabilité élémentaire $p(j, \varphi) dj d\varphi$ pour que j soit compris entre j et $j + dj$ et φ entre φ et $\varphi + d\varphi$ et en intégrant pour j de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et pour φ de 0 à π .

$p(j, \varphi) dj d\varphi$ est le quotient de l'élément d'aire sur la sphère céleste par π , c'est-à-dire qu'on a

$$(6) \quad p(j, \varphi) dj d\varphi = \frac{\cos j}{\pi} dj d\varphi.$$

On s'aperçoit sans peine que l'intégrale

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} e^2(j, \varphi) \cos j dj d\varphi$$

n'a pas une valeur finie et cela s'explique facilement.

On a

$$e^2 < 1$$

et par suite

$$A(j, \varphi) = \cot^2 \varphi + 2\omega \sin j \cot \varphi + 1 + \omega^2 - 2\sigma - \sin^2 j < 0.$$

Les racines de $A(j, \varphi) = 0$ sont

$$\cot \varphi = -\omega \sin j \pm \sqrt{2\sigma - (1 + \omega^2) \cos^2 j},$$

on doit donc avoir

$$\cos^2 j < \frac{2\sigma}{1 + \omega^2}$$

et par suite

$$-\omega - \sqrt{2\sigma} < \cot \varphi < -\omega + \sqrt{2\sigma}.$$

Les angles j et φ devant satisfaire aux inégalités précédentes ils ne peuvent prendre toutes les valeurs possibles. En particulier φ ne peut jamais varier dans tout l'intervalle $0 - \pi$ et si $\frac{2\sigma}{1 + \omega^2} < 1$ l'angle j reste plus grand qu'une certaine limite.

On peut alors se demander si l'excentricité probable n'est pas donnée par

$$\bar{e^2} = \frac{\int \int_{\mathbf{D}} e^2 \cos j dj d\varphi}{\int \int_{\mathbf{D}} \cos j df d\varphi},$$

D désignant le domaine défini par la condition $A(j, \varphi) < 0$. Il n'en est rien et il est facile de s'en assurer : si les données permettent de calculer ω et σ elles sont théoriquement suffisantes pour déterminer une orbite et par suite on pourrait trouver la valeur vraie de j et φ . En réalité les données de l'observation sont trop incertaines pour permettre ce calcul d'une manière même approchée, mais rien ne permet de supposer que l'incertitude sur les données soit telle que toutes les valeurs de $\sin j$ et φ comprises dans le domaine D soient également probables.

Nous verrons au Chapitre VI que ces remarques ont une certaine importance au point de vue de la théorie des parallaxes dynamiques.

4. Le calcul de l'excentricité probable d'un couple n'est donc pas aussi simple qu'on aurait pu le supposer à priori et nous renvoyons ce calcul à un chapitre suivant. Nous allons maintenant établir l'équation qui permet de résoudre le problème que nous avons en vue, savoir celui de déterminer la répartition de e et g , ou, ce qui revient au même, celle $\varphi(\lambda, \mu)$ de λ et μ .

Le nombre des couples pour lesquels on a à la fois λ compris entre λ et $\lambda + d\lambda$, μ entre μ et $\mu + d\mu$, j entre j et $j + dj$ et φ entre φ et $\varphi + d\varphi$ est

$$(7) \quad \varphi(\lambda, \mu) p(j, \varphi) d\lambda d\mu dj d\varphi$$

et l'on a

$$p(j, \varphi) dj d\varphi = \frac{\cos j}{\pi} dj d\varphi.$$

En effet nous ne trouvons plus dans le cas discuté au paragraphe 3, dans ce cas on connaissait pour un couple ω et σ et nous avons vu que toutes les valeurs de $\sin j$ et φ ne pouvaient être regardées comme également possibles, tandis que dans le cas présent il est bien évident que la répartition de ces angles ne subit aucune restriction du fait de la connaissance de l'excentricité et de l'anomalie moyenne du couple considéré.

Posons $\sin j = \psi$, l'expression (7) devient

$$\frac{1}{\pi} \varphi(\lambda, \mu) d\lambda d\mu d\psi d\varphi$$

Si au lieu de $\lambda, \mu, \varphi, \psi$ on prend comme variables indépendantes $\lambda, \mu, \omega, \sigma$ l'élément différentiel devient

$$\frac{1}{\pi} \varphi(\lambda, \mu) \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\omega, \sigma)} d\lambda d\mu d\omega d\sigma$$

et le nombre total des couples pour lesquels ω et σ sont compris entre ω et $\omega + d\omega$, σ et $\sigma + d\sigma$ est

$$\frac{d\omega d\sigma}{\pi} \int_D \varphi(\lambda, \mu) \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\omega, \sigma)} d\lambda d\mu.$$

Le domaine d'intégration D est défini par $e^2 < 1$, c'est-à-dire

$$\lambda^2 - 2\mu + 1 < 0.$$

L'expression précédente représente donc la fonction de répartition des données de l'observation ω et σ , qui est connue, appelons-la $\alpha(\omega, \sigma) d\omega d\sigma$, et l'on a enfin l'équation fondamentale

$$(8) \quad \pi \alpha(\omega, \sigma) = \int_D \varphi(\lambda, \mu) \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\omega, \sigma)} d\lambda d\mu.$$

Il nous faut maintenant exprimer le Jacobien $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\omega, \sigma)}$ à l'aide des variables $\omega, \sigma, \lambda, \mu$.

On a

$$\omega = \frac{\lambda \sqrt{1 - \psi^2} - \psi \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad \sigma = \frac{\mu(1 - \psi^2)}{\sin^2 \varphi};$$

par suite

$$\begin{aligned} d\omega &= - \frac{\lambda \psi (1 - \psi^2)^{-\frac{1}{2}} + \cos \varphi}{\sin \varphi} d\psi + \frac{\psi - \lambda \sqrt{1 - \psi^2} \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi \\ d\sigma &= - \frac{2\mu\psi}{\sin^2 \varphi} d\psi - \frac{2\mu \cos \varphi (1 - \psi^2)}{\sin^3 \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &= \frac{2\mu}{\sin^2 \varphi} [(1 - \psi^2) \cos^2 \varphi + \psi^2] d\psi \\ &= \frac{2\mu \cos \varphi (1 - \psi^2)}{\sin \varphi} d\omega + (\psi - \lambda \sqrt{1 - \psi^2} \cos \varphi) d\sigma, \\ \frac{2\mu}{\sin^3 \varphi} [(1 - \psi^2) \cos^2 \varphi + \psi^2] d\varphi &= \frac{2\mu\psi}{\sin \varphi} d\omega - \left(\frac{\psi\lambda}{\sqrt{1 - \psi^2}} + \cos \varphi \right) d\sigma \end{aligned}$$

et l'on a

$$G(\lambda, \mu, \omega, \sigma) = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\omega, \sigma)} = \frac{\sin^2 \varphi (1 - \psi^2)}{2\sigma(\cos^2 \varphi + \psi^2 \sin^2 \varphi)},$$

ce qui peut s'écrire

$$G(\lambda, \mu, \omega, \sigma) = \frac{\mu}{2\sigma^2} \frac{z^2}{1 - \frac{\mu}{\sigma} z^2},$$

où l'on a posé $z = 1 - \psi^2 = \cos^2 j$.

Il suffit maintenant d'exprimer z en fonction de λ, μ, ω et σ .
On a

$$\lambda = \frac{\omega \sin \varphi + \sqrt{1 - z^2} \cos \varphi}{\sqrt{z}},$$

$$\mu = \frac{\sigma \sin^2 \varphi}{z},$$

d'où en éliminant φ

$$z^2 - \frac{\sigma}{\mu} \left[1 + \frac{\mu}{\sigma} + \left(\lambda - \omega \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \right)^2 \right] z + \frac{\sigma}{\mu} = 0.$$

Posons $q = \frac{\sigma}{\mu}$,

$$2p = \frac{\sigma}{\mu} \left[1 + \frac{\mu}{\sigma} + \left(\lambda - \omega \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \right)^2 \right] = 1 + q + (\lambda \sqrt{q} - \omega)^2.$$

Il vient

$$z^2 - 2pz + q = 0,$$

z doit être compris entre 0 et 1 ; on voit sans peine que seule convient la racine

$$z = p - \sqrt{p^2 - q}.$$

Il est inutile d'écrire explicitement la forme de la fonction $G(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$, il suffit de savoir que pour chaque groupe de variables on pourra trouver sa valeur par les équations

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{\sigma}{\mu}, \\ 2p = 1 + q + (\lambda \sqrt{q} - \omega)^2, \\ z = p - \sqrt{p^2 - q}, \\ G(\lambda, \mu, \omega, \sigma) = \frac{\frac{z^2}{q}}{2\sigma \left(1 - \frac{z^2}{q} \right)}. \end{array} \right.$$

5. On voit que le noyau $G(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$ de notre équation intégrale est très compliqué, le domaine d'intégration est illimité et l'équation est de première espèce. Toutes ces considérations montrent qu'il serait vain de chercher à résoudre analytiquement l'équation proposée

$$\pi a(\omega, \sigma) = \int \int_D \varphi(\lambda, \mu) G(\lambda, \mu, \omega, \sigma) d\lambda d\mu.$$

Nous devons donc nous contenter d'une résolution numérique, ce qui fera l'objet du chapitre suivant. Faisons toutefois deux remarques sur le noyau :

1° *Il devient infini pour $z^2 = q$, c'est-à-dire pour $\lambda = \omega$ et $\mu = \sigma$*

La fonction $G(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$ reste toutefois intégrable. Posons

$$\lambda = \omega + x \sin \gamma, \quad \mu = \sigma + x \cos \gamma.$$

Il vient

$$\frac{z^2}{q} = 1 - 2x \sqrt{\left(\sin \gamma - \frac{\omega}{2\sigma} \cos \gamma\right)^2 + \frac{\cos^2 \gamma}{4\sigma^2}}$$

et

$$G(x, \gamma, \omega, \sigma) = \frac{1 - 2x \sqrt{\left(\sin \gamma - \frac{\omega}{2\sigma} \cos \gamma\right)^2 + \frac{\cos^2 \gamma}{4\sigma^2}}}{4\sigma x \sqrt{\left(\sin \gamma - \frac{\omega}{2\sigma} \cos \gamma\right)^2 + \frac{\cos^2 \gamma}{4\sigma^2}}}.$$

Enfin

$$G(\lambda, \mu, \omega, \sigma) d\lambda d\mu = \frac{1 - 2x \sqrt{\left(\sin \gamma - \frac{\omega}{2\sigma} \cos \gamma\right)^2 + \frac{\cos^2 \gamma}{4\sigma^2}}}{4\sigma \sqrt{\left(\sin \gamma - \frac{\omega}{2\sigma} \cos \gamma\right)^2 + \frac{\cos^2 \gamma}{4\sigma^2}}} dx d\gamma.$$

La quantité sous le radical est toujours positive et par suite la fonction est intégrable.

2° $G(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$ *tend vers zéro lorsque μ augmente indéfiniment.* On obtient sans peine la valeur asymptotique

$$G_{\mu \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{2\mu(1 + \omega^2)^2}.$$

CHAPITRE II.

FONCTION DE RÉPARTITION DES EXCENTRICITÉS ET DES ANOMALIES MOYENNES (*suite*). RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION.

1. Nous devons résoudre l'équation

$$\pi a(\omega, \sigma) = \int_D \varphi(\lambda, \mu) G(\lambda, \mu, \omega, \sigma) d\lambda d\mu,$$

où $\varphi(\lambda, \mu)$ est la fonction inconnue.

Divisons le plan (ω, σ) en aires suffisamment petites de centre ω_i, σ_j et de surface S_{ij} , soit N_{ij} le nombre de couples tels que leurs ω, σ se trouvent dans l'aire (i, j) .

Divisons de même le domaine D du plan (λ, μ) en aires de centres λ_k, μ_l , contenant n_{kl} couples et soit G_{ij}^{kl} la valeur de $G(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$ au point $\lambda_k, \mu_l, \omega_i, \sigma_j$. On a en remplaçant l'intégrale par une somme

$$(1) \quad \frac{\pi}{S_{ij}} N_{ij} = \sum_{k,l} n_{kl} G_{ij}^{kl}.$$

On ne peut songer à résoudre le système précédent par rapport aux inconnues n_{kl} , il faut en effet pour avoir une approximation suffisante décomposer le plan (λ, μ) en une vingtaine de régions approximativement et la résolution d'un système d'équations à 20 inconnues serait extrêmement pénible. Cette méthode laisserait d'ailleurs à désirer; on n'a jamais avantage à représenter une fonction résultant de données expérimentales, sujettes à erreurs par une expression contenant un trop grand nombre de constantes arbitraires, mais il est préférable de trouver une fonction d'interpolation d'une forme convenable ne dépendant que de quelques constantes à déterminer.

Dans le cas actuel supposons que, par une méthode quelconque, nous connaissions une première approximation n'_{kl} des n_{kl} , nous pourrions chercher une solution de la forme

$$n_{kl} = n'_{kl} f(\lambda_k, \mu_l),$$

$f(\lambda, \mu)$ étant une fonction dont on choisira plus ou moins arbi-

trairement la forme analytique mais qui ne contiendra qu'un petit nombre de constantes à déterminer par les équations (1)

La fonction $f(\lambda, \mu)$ doit être paire en λ , nous avons tout lieu de penser en effet que le nombre de couples dont l'anomalie moyenne est comprise entre g et $g + dg$ est le même que celui des couples dont l'anomalie moyenne est comprise entre $-g$ et $-g - dg$. Nous avons adopté l'expression suivante :

$$f(\lambda, \mu) = \alpha_0 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \mu^2$$

et les équations (1) deviennent

$$(2) \quad \begin{aligned} \pi N_{ij} = & \alpha_0 S_{ij} \sum_{kl} n'_{kl} G_{ij}^{kl} + \alpha_1 S_{ij} \sum_{kl} n'_{kl} \mu_l G_{ij}^{kl} \\ & + \alpha_2 S_{ij} \sum_{kl} n'_{kl} \lambda_k^2 G_{ij}^{kl} + \alpha_3 S_{ij} \sum_{kl} n'_{kl} \mu_l^2 G_{ij}^{kl}. \end{aligned}$$

Ces équations traitées par la méthode des moindres carrés feront connaître les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

2. Passons maintenant à l'application numérique de ce qui précède.

Nous avons obtenu pour 183 couples les valeurs de ω et σ . Nous en avons dressé une table qu'on trouvera en appendice (1) (Appendice I).

L'Appendice II donne deux tableaux montrant la division du plan (ω, σ) en 25 régions et une table fournissant les coordonnées du centre de chaque région ainsi que sa surface et le nombre de couples qui y sont contenus. On a effectué cette division de manière que les nombres de couples contenus dans les différentes aires soient du même ordre de grandeur. Certains de ces nombres sont fractionnaires, ils proviennent de points se trouvant sur la frontière de deux régions.

L'Appendice III fait connaître la division, de la portion du plan (λ, μ) comprise dans le domaine d'intégration et pour $\lambda > 0$, en 23 aires élémentaires. Une table donne les coordonnées des

(1) Toutes les tables qui ne sont pas indispensables à l'intelligence du texte ont été rejetées en appendice pour ne pas alourdir la rédaction.

centres et les surfaces de ces aires. Ce qui nous intéresse c'est la répartition des excentricités et des anomalies moyennes et non la répartition des variables λ et μ . En vue de trouver directement cette répartition, la division du domaine D a été obtenue par le moyen des courbes $e = \text{const.}$ et $g = \text{const.}$ On trouvera donc dans la table des valeurs e et g correspondant au centre de chaque aire. Nous définissons ce centre de la manière suivante : soit une aire limitée par les courbes e_1, e_2, g_1, g_2 , le centre sera défini par $e = \frac{e_1 + e_2}{2}, g = \frac{g_1 + g_2}{2}$. Pour éviter les difficultés qui auraient pu provenir du fait que le domaine D est illimité, nous l'avons dans la réalité borné par la courbe $e = 0,98$ et non $e = 1$. Ceci n'a aucune importance pratique puisque $G(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$ tend vers zéro, comme nous l'avons vu précédemment lorsque μ croît indéfiniment. En outre, le nombre des couples tels que e soit plus grand que 0,98 est certainement très petit et l'on n'aura pas d'erreur importante à redouter en les voyant reporter aux aires correspondant à une excentricité comprise entre 0,90 et 0,98. Dans la discussion finale, on considérera d'ailleurs que ces aires correspondent à une excentricité comprise entre 0,90 et 1,00.

3. A l'Appendice IV on trouvera la table de la fonction $g(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$ donnée pour $23 \times 25 = 575$ groupes des variables. Ce n'est pas la fonction $G(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$ telle que nous l'avons définie au chapitre précédent. Nous avons fait l'hypothèse que le nombre de couples ayant une anomalie moyenne donnée négative est égale au nombre de ceux ayant la même anomalie mais positive. Par suite nous avons pris

$$g(\lambda, \mu, \omega, \sigma) = G(+\lambda, \mu, \omega, \sigma) + G(-\lambda, \mu, \omega, \sigma).$$

Le domaine d'intégration dans l'intégrale est alors limité à l'axe $\lambda = 0$.

Le calcul de G a donc été effectué réellement pour 1150 valeurs des variables. Dans la plupart des cas le calcul ne présente pas de difficultés et il s'effectue à l'aide des formules (9) du chapitre précédent. Dans le cas où les valeurs λ, μ sont comprises dans une aire où G devient infini, nous avons dû faire un calcul spécial. En effet ce qui nous importe ce n'est pas G mais la valeur

de $\int \int G d\lambda d\mu$ étendue à l'aire de centre λ_k, μ_l et de surface s_{kl} .
Par suite nous avons défini la valeur de G_{kl}^{ij} par la relation

$$(3) \quad G_{kl}^{ij} s_{kl} = \int \int G d\lambda d\mu.$$

Le calcul direct de l'intégrale serait en général inextricable et pour l'éviter nous avons employé une méthode détournée. Rappelons que l'on a

$$G(\lambda, \mu, \omega, \sigma) = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\omega, \sigma)} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\lambda, \mu)} \frac{D(\lambda, \mu)}{D(\omega, \sigma)},$$

mais

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(\omega, \sigma)} = \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \psi^2}} \right)^3 = \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Par suite

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\lambda, \mu)} = \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} G(\lambda, \mu, \omega, \sigma),$$

on a alors

$$(4) \quad \int \int_{D_1} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} G(\lambda, \mu, \omega, \sigma) d\lambda d\mu = \int \int_{D_2} d\varphi d\psi.$$

Soit D_1 défini par la condition $e < 0,98$, c'est-à-dire

$$\frac{\lambda^2 + (\mu - 1)^2}{\mu^2} < 0,9694,$$

D_2 est défini par la condition que φ et ψ doivent se trouver à l'intérieur du domaine limité par la droite $\psi = 0$ et la courbe

$$(5) \quad (1 + \cot^2 \varphi)(\psi^2 + 2\sigma - 1 - \omega^2 - 2\omega\psi \cot \varphi - \cot^2 \varphi) = \frac{0,0396\sigma^2}{1 - \psi^2}.$$

Supposons calculée l'aire comprise dans ce domaine. Soient G_{ij}^{kl} la valeur que prend à l'intérieur de chacune des aires où G reste fini et soit G_{ij}^{rs} la valeur définie par (3) dans l'aire où il devient infini. On a en remplaçant le premier membre de (4) par une somme

$$\sum_k \sum_l \left(\frac{\sigma_l}{\mu_l} \right)^{\frac{3}{2}} G_{ij}^{kl} + \left(\frac{\sigma_j}{\mu_s} \right)^{\frac{3}{2}} G_{ij}^{rs} = \int \int_{D_2} d\varphi d\psi$$

et cette équation fait connaître G_{ij}^{rs} .

Le calcul de l'aire $\int \int_{D_2} d\varphi d\psi$ est effectué graphiquement. Il suffit de tracer la courbe représentée par l'équation (5). Ceci ne présente pas de difficultés. On commence par tracer le contour (fig. 3 en pointillé) défini par l'équation

$$\psi^2 - 2\omega \cot \varphi \psi + 2\sigma - 1 - \omega^2 - \cot^2 \varphi = 0.$$

Soient ψ_1 et ψ_2 les racines de cette équation, on a

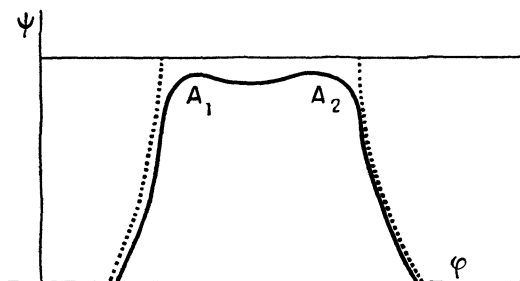
$$(\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2)(1 - \psi^2) = \frac{0,0396\sigma^2}{1 + \cot^2 \varphi}.$$

Supposons qu'on cherche la racine ψ qui devient ψ_1 pour $1 - e^2 = 0$. Elle est donnée par

$$\psi = \psi_1 + \frac{0,0396\sigma^2}{(1 + \cot^2 \varphi)(\psi_1 - \psi_2)(1 - \psi_1^2)}.$$

Bien entendu cette formule et les formules correspondant aux racines ψ_2 et 1 ne permettent pas de tracer toute la courbe, car elles ne sont pas toujours correctes puisqu'elles représentent uniquement le premier terme du développement par la formule de Lagrange dont le rayon de convergence est fini. En particulier au

Fig. 3.



voisinage des points A_1, A_2 ces formules ne sont plus applicables, mais le tracé de la courbe étant dégrossi on peut déterminer des valeurs approchées de φ et ψ permettant l'emploi des méthodes d'approximation successives.

Nous avons dû calculer 18 valeurs de G_{ij}^{kl} par cette méthode.

4. Indiquons maintenant comment on peut obtenir simplement

des valeurs approchées n'_{kl} des n_{kl} . Reportons les points ω, σ correspondant aux divers couples sur le graphique en (λ, μ) de l'Appendice III. Le plus grand nombre de ceux-ci (154) se trouve dans le domaine D et se répartissent comme suit dans les aires élémentaires, exprimées à l'aide des variables e et g :

TABLEAU 1.

$g = 0^\circ$	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$e = 0^\circ$	7			4		
0,3	4		5		4	
0,5	4	7	4	6	4	5
0,7	9	11	9	12	11	6
0,9	12	5	5	7	6	7
1,0						

Supposons que pour les étoiles telles que $\omega^2 - 2\sigma + 1 < 0$ on ait en première approximation

$$\varphi(\lambda, \mu) = a(\lambda, \mu),$$

on trouve pour fonction de répartition de e en effectuant la sommation par lignes :

e	0	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$N(e)$	11	13	30	58	42	

Ce qui donnait une excentricité moyenne de 0,72. On voit que, d'après ce qu'on sait des couples à orbites connues, ces données ne sont pas invraisemblables, et que par suite elles peuvent constituer une première approximation. Ceci est d'ailleurs confirmé par la répartition des anomalies moyennes. Cette répartition se détermine en faisant, dans le Tableau I la sommation par colonne en supposant qu'à l'intérieur de chaque case des deux premières lignes la répartition est uniforme. On obtient ainsi :

g	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$N(g)$	29,33	27,33	22,83	28,83	24,33	21,33	

et l'on constate que $N(g)$ est à peu près une constante, ce qui cor-

respond bien à la réalité probable au moins en première approximation.

On voit donc qu'on pourra prendre pour les n'_{kl} les nombres du Tableau I.

5. Nous avons maintenant à notre disposition tous les éléments entrant dans les coefficients des équations (2); on calcule sans difficulté les diverses sommes qui les constituent. Pour chaque équation on adopte pour poids le nombre N de couples se trouvant dans l'aire (ω , σ) correspondante. On obtient ainsi le système :

15,09 α_0 +	33,85 α_1 +	9,61 α_2	165,3 α_3 =	21,99	N = 7
7,33	17,56	6,33	87,9	21,99	7
6,66	10,65	1,74	41,2	4,71	1,5
6,12	10,18	1,84	40,4	21,99	7
9,14	16,92	4,02	72,5	12,57	4
7,74	22,30	16,17	105,5	26,70	8,5
4,38	8,57	1,06	30,9	7,85	2,5
4,03	8,18	1,20	36,3	9,42	3
7,52	15,99	3,04	71,4	21,99	7
7,30	15,18	4,75	61,9	21,99	7
12,81	25,68	11,46	98,3	12,57	4
15,82	39,72	15,37	204,6	39,27	12,5
12,44	38,77	24,94	204,6	15,71	5
9,75	26,78	2,69	135,2	9,42	3
9,46	26,10	3,74	129,8	28,27	9
16,44	44,24	12,38	214,8	25,13	8
14,62	52,20	4,84	325,6	11,00	3,5
14,35	54,86	11,23	326,2	39,27	12,5
17,44	58,70	32,70	318,2	40,84	13
65,41	316,88	60,55	2367,2	62,83	20
29,81	253,32	27,88	3276,0	34,56	11
47,42	470,98	96,96	6373,8	21,99	7
10,57	63,44	51,79	425,6	18,85	6
29,75	234,35	86,10	2413,5	31,42	10
17,85 α_0 +	138,70 α_1 +	36,04 α_2 +	16400 α_3 =	12,57	N = 4

Ces équations, traitées par la méthode des moindres carrés conduisent au système :

$$\begin{aligned}
 141\alpha_0 + 790\alpha_1 + 172\alpha_2 + 8490\alpha_3 &= 154, \\
 790\alpha_0 + 5040\alpha_1 + 1070\alpha_2 + 60700\alpha_3 &= 782, \\
 172\alpha_0 + 1070\alpha_1 + 270\alpha_2 + 13100\alpha_3 &= 181, \\
 849\alpha_0 + 6070\alpha_1 + 1310\alpha_2 + 165000\alpha_3 &= 747,
 \end{aligned}$$

dont la solution est

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= + 1,77, & \alpha_2 &= + 0,167, \\ \alpha_1 &= - 0,156, & \alpha_3 &= - 0,000174. \end{aligned}$$

Par suite la répartition que nous cherchons est donnée par

$$n_{kl} = n'_{kl}(1,77 - 0,156\mu_l + 0,167\lambda_k^2 - 0,000174\mu_l^2),$$

ce qui conduit au tableau suivant :

TABLEAU II.

$g = 0^\circ$	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$e = 0^\circ$	11,41			6,36		
0,3	6,56		7,80		6,08	
0,5	6,72	11,48	6,28	8,88	5,68	6,90
0,7	15,66	17,90	12,78	14,76	11,77	6,48
0,9	22,80	7,35	3,35	-0,28	-3,42	-5,95
1,0						

Ce tableau donne la solution du problème que nous nous proposons de résoudre. A son inspection deux remarques s'imposent :

1° Il y a trois nombres négatifs qui pris isolément n'ont pas de sens. On pourrait les remplacer par zéro, mais il nous semble plus correct de les laisser subsister pour que leur effet se fasse sentir dans l'étude séparée des excentricités ou des anomalies moyennes.

2° La somme des nombres du tableau précédent est 187,35. Théoriquement on aurait dû trouver les nombres de couples utilisés, soit 183. Nous considérons que l'accord est excellent, étant donné que la méthode approchée que nous avons employée pour la résolution de l'équation intégrale n'introduisait nullement la condition de la conservation du nombre des couples. Ce résultat justifie donc la méthode employée.

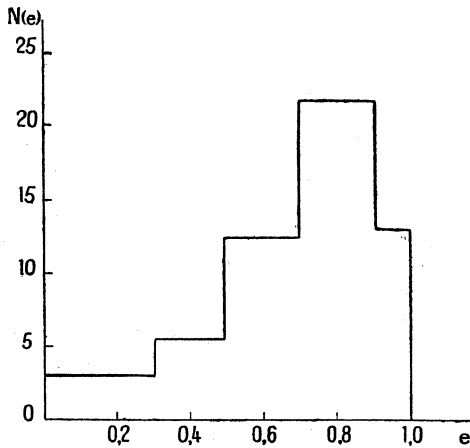
6. Il nous faut encore calculer les résidus $R = N_{\text{observé}} - N_{\text{calculé}}$

pour les différentes régions du plan (ω, σ). Les résultats de ce calcul sont donnés au tableau suivant :

Aire n°.	Nobs.	R.	Aire n°.	Nobs.	R.
1.....	7	-0,32	14.....	3	-1,30
2.....	7	+3,43	15.....	9	+4,77
3.....	1,5	-1,80	16.....	8	+0,46
4.....	7	+3,96	17.....	3,5	-2,38
5.....	4	-0,54	18.....	12,5	+6,57
6.....	8,5	+4,36	19.....	13	+4,41
7.....	2,5	+0,41	20.....	20	-4,22
8.....	3	+1,08	21.....	11	+5,31
9.....	7	+2,39	22.....	7	-0,96
10.....	7	+2,39	23.....	6	+0,45
11.....	4	-2,53	24.....	10	-0,02
12.....	12,5	+4,73	25.....	4	-0,93
13.....	5	-1,42			

On peut constater que ces résidus ne présentent pas de marche régulière et que, prenant en considération le faible nombre des données, leurs valeurs ne sont pas exagérées. Si nous avons jugé

Fig. 4.



que l'approximation n'était pas suffisante nous aurions dû pousser plus loin le développement de $f(\lambda, \mu)$.

7. Nous allons considérer ici, séparément la répartition des

excentricités et celle des anomalies moyennes. En effectuant la sommation par ligne, on obtient $N(e)$ que nous donnons en pour cent :

e	0	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$N(e)$	9,48	10,91	24,52	42,36	12,73	

De là on déduit la valeur moyenne de e et sa valeur moyenne quadratique :

$$\bar{e} = 0,665, \quad \sqrt{\overline{e^2}} = 0,703.$$

La figure ci-dessus (fig. 4) représente la répartition des excentricités. On peut également la représenter par une courbe de K. Pearson d'équation

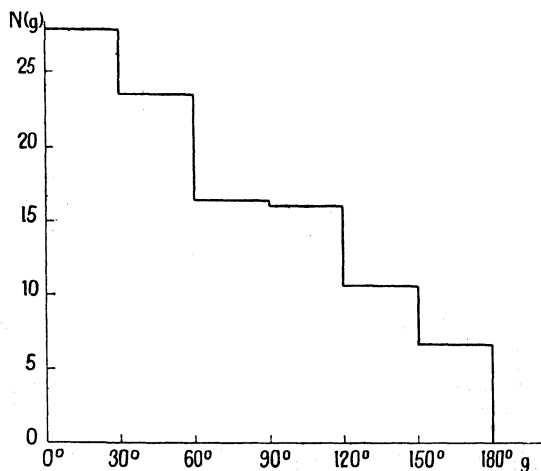
$$N(e) = 53,5 e^{2,42} (1 - e)^{0,25}.$$

On a de même pour la répartition des anomalies moyennes :

g	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$N(g)$	27,91	23,38	16,07	15,68	10,24	6,72	

La figure 5 représente ces résultats. Résultats que nous pouvons

Fig. 5.



représenter avec une approximation suffisante par la fonction

$$N(g) = 16,67 + 10,67 \cos g + 0,81 \cos 2g.$$

On voit que $N(g)$ est loin d'être une constante ainsi qu'on le suppose généralement dans les recherches statistiques sur les étoiles doubles. Ceci provient de la sélection opérée dans le matériel fourni par l'observation.

8. La méthode que nous venons de développer s'applique uniquement aux couples pour lesquels on connaît la quantité ρ'' . Leur nombre est assez faible et l'on doit se demander comment il est possible d'obtenir des renseignements sur leurs excentricités lorsque cette quantité ne peut être déterminée.

Russell ⁽¹⁾ a proposé la solution suivante : il considère la fonction de répartition de la quantité ω et supposant que tous les couples ont la même excentricité, il détermine quelle doit être cette excentricité pour que la répartition calculée de ω soit identique à la répartition observée. Il faut naturellement faire une hypothèse sur la répartition des anomalies moyennes. Dans les très brèves indications qu'il a publiées, Russell ne précise pas l'hypothèse faite à ce sujet. Il est probable qu'il a supposé, suivant l'usage, toutes les valeurs de g également probables, hypothèse fort peu probable car la sélection des couples étudiés la modifie profondément ainsi que nous venons de le constater lorsque le mouvement orbital est important. Dans le cas où le mouvement est faible, cas de Russell, il est à supposer que les anomalies moyennes voisines de 180° doivent être plus probables que les autres, car la séparation des deux composantes est plus grande et par suite elles sont plus faciles à découvrir.

Russell a obtenu le résultat suivant : pour deux groupes de couples dont les périodes probables sont évaluées respectivement à 2000 et 5000 années, les excentricités probables sont 0,61 et 0,76.

Ces résultats sont en contradiction avec celui que nous venons d'obtenir. Notre excentricité moyenne est 0,66 pour des couples dont la période moyenne est, ainsi que nous le verrons plus loin, de l'ordre de 500 ans, or l'on sait que l'excentricité croît avec la période et par suite les résultats de Russell doivent être trop

⁽¹⁾ *Polar Astronomy*, t. 30, 1922, p. 167; voir aussi Russell, Dugan, Stewart, *Astronomy*, t. 2, p. 694.

faibles de 0,10 environ. Ceci s'explique sans peine : s'il y a un excès, par rapport à une distribution constante, d'anomalies moyennes voisines de 0° ou 180° elles donnent un excès de petites valeurs de ω qui sont attribuées à des couples de faibles excentricités.

Nous nous proposons d'étendre ultérieurement nos résultats au cas où ρ'' est inconnu en utilisant au lieu de la variable σ la variable $\frac{4\pi^2 M \varpi^3}{\theta'^2}$ où M représente la masse qu'on peut calculer par la relation d'Eddington connaissant la parallaxe ϖ . La transformation de nos diverses équations se fera grâce à la relation

$$4\pi^2 M \varpi^3 \cos^3 j = \rho^3 \theta'^2 \sigma.$$

Cette méthode ne pourra être appliquée que pour les couples dont la parallaxe est connue avec une exactitude suffisante. Leur nombre n'en sera pas très considérable mais les résultats obtenus pour la répartition des anomalies moyennes permettront l'emploi de la méthode de Russell.

CHAPITRE III.

LES EXCENTRICITÉS HYPOTHÉTIQUES.

1. Nous avons montré, dans les chapitres précédents, qu'on peut obtenir la répartition des excentricités d'un ensemble d'étoiles doubles et par suite l'excentricité moyenne des étoiles de cet ensemble. Ce résultat n'a en soi qu'un intérêt assez faible; ce qui est particulièrement intéressant pour accroître nos connaissances sur les étoiles doubles, c'est de pouvoir étendre aux couples d'orbites inconnues l'étude de certaines corrélations, entre l'excentricité et d'autres éléments, qu'on a mises en évidence pour les couples dont l'orbite est connue. Il n'est pas possible de calculer pour chaque valeur de l'élément de comparaison la fonction de répartition des excentricités, le nombre des données étant insuffisant. *Nous sommes ainsi conduits à déterminer pour chaque étoile double une excentricité hypothétique*, c'est l'exposé de la méthode qui permet de la calculer qui fait l'objet de ce chapitre.

2. Nous avons donné au Chapitre I une formule faisant con-

naître l'excentricité en fonction de j , φ , ω , σ . Écrivons-la de nouveau sous une forme un peu différente :

$$(1) \quad e^2 = 1 + \left(\frac{\omega^2}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma} - \frac{\sin^2 j}{\sigma^2} \right) \frac{\cos^2 j}{\sin^2 \varphi} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\cos^2 j}{\sin^4 \varphi} + \frac{2\omega}{\sigma^2} \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \cos^2 j \sin j.$$

Soit $p(j, \varphi) dj d\varphi$ la probabilité élémentaire pour que j soit compris entre j et $j + dj$ et φ entre φ et $\varphi + d\varphi$. On a

$$\overline{e^2} = \iint e^2(j, \varphi, \omega, \sigma) p(j, \varphi) dj d\varphi.$$

Nous avons montré précédemment que $p(j, \varphi)$ ne peut être pris égal à $\frac{\cos j}{\pi}$ et que j et φ ne peuvent varier de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de 0 à π . Il est à remarquer que l'on ne peut déterminer exactement $p(j, \varphi)$ par des considérations purement mathématiques. En effet si les données sont suffisantes pour que l'on connaisse θ , θ' , ρ , ρ' , ρ'' elles sont théoriquement suffisantes pour déterminer l'orbite et par suite les angles j et φ . En pratique il n'en est pas ainsi à cause de l'incertitude avec laquelle ces données sont connues. Admettons, en première approximation que j et φ sont connus pour une incertitude telle que tous les points de la sphère céleste, de coordonnées j et φ et qui conduisent par la formule (1) à des valeurs de e^2 plus petites que l'unité sont également probables. On a par suite

$$p(j, \varphi) = \frac{\cos j}{\int \int_D \cos j dj d\varphi}.$$

Le domaine D correspond à la condition $e^2 < 1$, c'est-à-dire

$$(2) \quad \cot^2 \varphi + 2\omega \sin j \cot \varphi + \omega^2 - 2\sigma + \cos^2 j < 0.$$

Soit ε^2 la valeur hypothétique de e^2 que nous obtenons ainsi

$$(3) \quad \varepsilon^2 = \frac{\int \int_D e^2(j, \varphi, \omega, \sigma) \cos j dj d\varphi}{\int \int_D \cos j dj d\varphi}.$$

Cette valeur ε^2 ne représente pas l'excentricité probable d'un couple étant donné que la forme de $p(j, \varphi)$ que nous avons adoptée repose sur une hypothèse et par suite n'est pas rigoureuse.

Nous allons faire subir à ε^2 une correction destinée à faire satisfaire à sa valeur corrigée $\overline{e^2}$ la condition suivante : pour un groupe d'étoiles doubles la fonction de répartition de $\overline{e^2}$ est identique à la fonction de répartition de e^2 , telle qu'on l'obtient par la méthode développée aux chapitres précédents. Faisons en outre l'hypothèse vraisemblable en première approximation que $\overline{e^2}$ est fonction uniquement de ε^2 et en est une fonction entière :

$$(4) \quad \overline{e^2} = a_0 + a_1 \varepsilon^2 + a_2 \varepsilon^4 + a_3 \varepsilon^6 + \dots$$

Nous déterminerons les coefficients de ce développement de manière que $\overline{e^2}$ satisfasse à la condition énoncée ci-dessous.

Étant donné que notre méthode n'est pas rigoureuse nous la justifierons en l'appliquant à l'étude des couples dont l'orbite est connue.

3. Indiquons comment se fait le calcul de la quantité ε^2 définie par l'équation (3).

Les racines de l'équation

$$(4) \quad \cot^2 \varphi + 2 \omega \sin j \cot \varphi + \omega^2 - 2 \sigma + \cos^2 j = 0$$

sont

$$\cot \varphi_1 = -\omega \sin j - \sqrt{2 \sigma - (1 + \omega^2) \cos^2 j} = \xi_1,$$

$$\cot \varphi_2 = -\omega \sin j + \sqrt{2 \sigma - (1 + \omega^2) \cos^2 j} = \xi_2.$$

On a

$$I_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \xi_2 - \xi_1,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi} = \xi_2 - \xi_1 + \frac{1}{3} (\xi_2^3 - \xi_1^3) \\ &= I_1 \left[1 + \frac{1}{3} (4 \omega^2 \sin^2 j - \omega^2 + 2 \sigma - \cos^2 j) \right]. \end{aligned}$$

et l'on obtient par suite

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{\frac{2}{3 \sigma^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1 \cos^3 j [(1 + \omega^2) \cos^2 j - 2 \sigma] dj}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan \left[\frac{2 \sqrt{2 \sigma - (1 + \omega^2) \cos^2 j}}{1 + \omega^2 - 2 \sigma + \cos^2 j} \right] \times \cos j dj}.$$

Si

$$\frac{1 + \omega^2}{2\sigma} < 1,$$

on a

$$j_0 = 0.$$

Si

$$\frac{1 + \omega^2}{2\sigma} > 1,$$

on a

$$\cos j_0 = \sqrt{\frac{2\sigma}{1 + \omega^2}},$$

ainsi que cela résulte de l'équation (4).

Posons enfin

$$k^2 = \frac{1 + \omega^2}{2\sigma}$$

et

$$\alpha = 1 + \omega^2 - 2\sigma = 2\sigma(k^2 - 1),$$

il vient

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\sigma}} \frac{\int_{j_0}^{\pi} (1 - k^2 \cos^2 j)^{\frac{3}{2}} \cos^3 j \, dj}{\int_{j_0}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \pi - \arctan \left[\frac{-2\sqrt{2\sigma}\sqrt{1 - k^2 \cos^2 j}}{\alpha + \cos^2 j} \right] \right\} \cos j \, dj}$$

ou

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\sigma}} \frac{J_1}{J_2}.$$

4. Calculons d'abord l'intégrale

$$J_1 = \int_{j_0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \cos^2 j)^{\frac{3}{2}} \cos^3 j \, dj.$$

Dans le cas $k^2 < 1$ on a $j_0 = 0$ et J_1 est donné par le développement rapidement convergent :

$$J_1 = 0,667 - 0,800 k^2 + 0,171 k^4 + 0,025 k^6 + 0,008 k^8 + 0,004 k^{10} \\ + 0,002 k^{12} + 0,002 k^{14} + 0,001 k^{16} + \dots$$

Dans le cas $k^2 > 1$ on a $\cos j_0 = \frac{1}{k}$ et en posant

$$(5) \quad I_n = \int_{j_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} j \, dj$$

il vient

$$J_1 = I_1 - 1,500 \ k^2 I_2 + 0,375 \ k^4 I_3 + 0,0625 \ k^6 I_4 \\ + 0,0234 \ k^8 I_5 + 0,0117 \ k^{10} I_6 + \dots$$

Les intégrales (5) se calculent facilement. Posons

$$\sin j = u,$$

il vient

$$I_n = \int_{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}}^1 (1-u^2)^n du.$$

Faisons le changement de variable

$$z = \frac{1-u}{\eta} \quad \text{avec} \quad \eta = 1 - \frac{\sqrt{k^2-1}}{k},$$

on obtient

$$I_n = 2^n \eta^{n+1} \int_0^1 \left(1 - \frac{z\eta}{2}\right)^n z^n dz$$

et par suite

$$I_1 = \eta^2 - \frac{\eta^3}{3},$$

$$I_2 = \frac{4}{3} \eta^3 - \eta^4 + \frac{\eta^5}{5},$$

$$I_3 = 2 \eta^4 - \frac{12}{5} \eta^5 + \eta^6 - \frac{\eta^7}{7},$$

et d'une manière générale

$$I_n = 2^n \left[\frac{\eta^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{1!} \frac{\eta^{n+2}}{2(n+2)} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\eta^{n+3}}{2^2(n+3)} + \dots \right].$$

Nous avons calculé une table de J_1 , qu'on trouvera à l'Appendice V.

Pour $k^2 > 1$ il a suffi de pousser le développement jusqu'au terme en k^6 .

5. Le calcul de J_2 est plus compliqué et plus long puisque la valeur de cette intégrale dépend de deux constantes indépendantes.

On peut employer plusieurs méthodes :

1° On peut développer la fonction de $\cos^2 j$:

$$f(\cos^2 j) = \text{arc tang} \left[\frac{-2 \sqrt{2} \sigma \sqrt{1-k^2 \cos^2 j}}{\alpha + \cos^2 j} \right]$$

en série de Taylor et intégrer terme à terme. On doit se borner aux trois premiers termes, sinon le calcul devient inextricable :

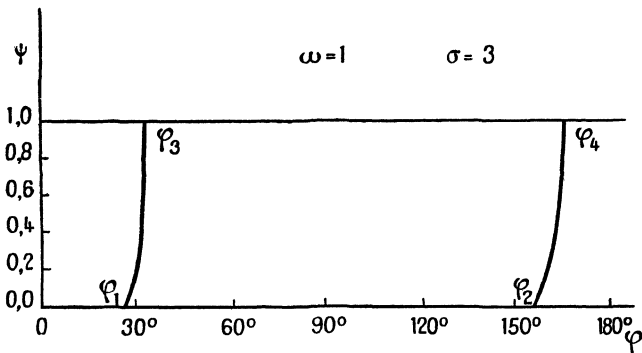
$$\begin{aligned}
 J_2 = & \left(\pi - \arctan - \frac{2\sqrt{2\sigma}}{\alpha} \right) \int_{j_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos j \, dj \\
 & - \frac{2\sqrt{2\sigma} \left(1 + \frac{\alpha k^2}{2} \right)}{\alpha^2 + 8\sigma} \int_{j_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 j \, dj \\
 & + \left[\frac{2\sqrt{2\sigma}}{(\alpha^2 + 8\sigma)^2} \left(1 + \frac{\alpha k^2}{2} \right) (\alpha - 4\sigma k^2) - \frac{2\sqrt{2\sigma}}{\alpha^2 + 8\sigma} \frac{\alpha k^4}{8} \right] \\
 & \times \int_{j_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 j \, dj + \dots
 \end{aligned}$$

Lorsque $k^2 < 1$, cette formule devient, en groupant convenablement les termes :

$$\begin{aligned}
 J_2 = & \pi - \arctan \left(- \frac{2\sqrt{2\sigma}}{\alpha} \right) - \frac{2\sqrt{2\sigma}}{\alpha^2 + 8\sigma} \left[0,667 \left(1 + \frac{\alpha k^2}{2} \right) + 0,533 \frac{\alpha k^4}{8} \right] \\
 & + \frac{2\sqrt{2\sigma}}{\alpha^2 + 8\sigma} \frac{0,533 \left(1 + \frac{\alpha k^2}{2} \right) (\alpha - 4\sigma k^2)}{\alpha^2 + 8\sigma} + \dots
 \end{aligned}$$

Ce sont ces formules qui nous ont servi, dans le plus grand nombre de cas pour calculer J_2 .

Fig. 6.



2° Nous avons également employé la méthode graphique. On a en effet

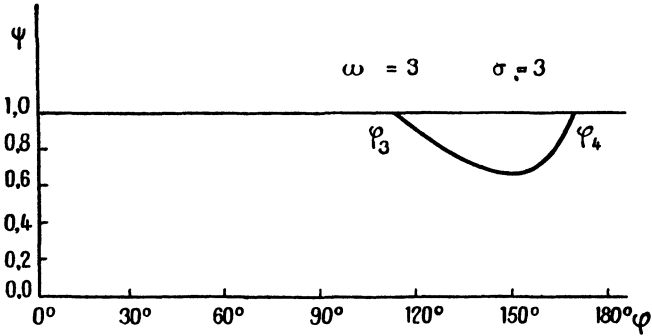
$$J_2 = \int \int_D \cos j \, dj \, d\varphi = \int \int_D d\varphi \, d\Psi,$$

en posant $\psi = \sin j$ et par suite J_2 n'est autre chose que l'aire comprise à l'intérieur de la courbe (4) de la droite $\psi = 1$ et de l'axe $\psi = 0$ (ce dernier seulement si $k^2 < 1$).

La figure 6 représente une courbe caractéristique du cas $k^2 < 1$ et la figure 7 de $k^2 > 1$.

3° On peut encore opérer d'une autre manière en inversant

Fig. 7.



l'ordre d'intégration. Soient φ_1, φ_2 les points pour lesquels $\psi = 0$ et φ_3, φ_4 ceux où $\psi = 1$.

On a dans le cas $k^2 < 1$

$$J_2 = \varphi_4 - \varphi_3 + \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \psi d\varphi + \int_{\varphi_4}^{\varphi_2} \psi d\varphi$$

et dans le cas $k^2 > 1$

$$J_2 = \varphi_4 - \varphi_3 - \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \psi d\varphi;$$

$\psi = \sin j$ est d'ailleurs une des racines de l'équation (4), c'est-à-dire qu'on a

$$\psi = \omega \cot \varphi \pm \sqrt{(1 + \omega^2)(1 + \cot^2 \varphi) - 2\sigma}.$$

Une seule de ces racines est comprise entre 0 et 1 dans chacun des intervalles d'intégration.

On voit sans peine que les intégrales $\int \psi d\varphi$ sont d'un type qu'on sait calculer directement.

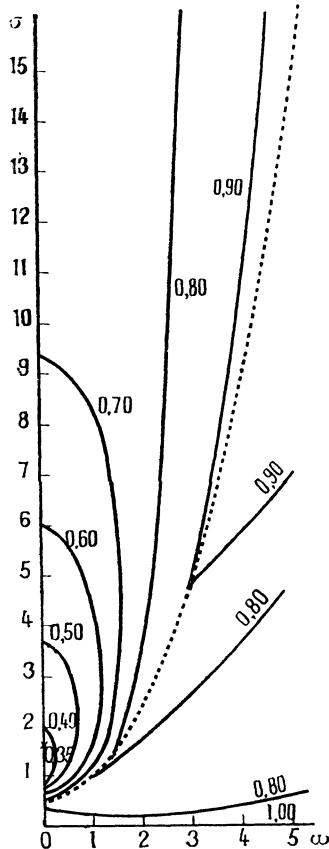
Lorsque nous avons utilisé cette méthode nous n'avons pas cal-

culé directement les intégrales, ce qui est long, mais nous avons fait usage de développements en série tels que la nature des données nous les suggérait.

La table de l'intégrale J_2 se trouve à l'Appendice V.

6. Les intégrales J_1 et J_2 étant calculées on peut obtenir sans peine ε^2 . Sur un graphique (*fig. 8*) on reporte chaque point cal-

Fig. 8.



culé ε^2 d'abscisse ω et d'ordonnée σ . Ceci fait, et le nombre de points calculés étant suffisant, on trace les courbes $\varepsilon^2 = \text{const.}$

Étant donnée son importance nous avons représenté également la

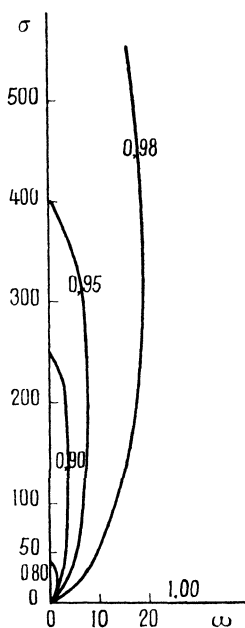
parabole $k^2 = 1$ d'équation

$$\omega^2 - 2\sigma + 1 = 0.$$

En effet pour $k^2 = 1$ la nature analytique des formules est modifiée, ce qui se traduit pour chaque courbe $\varepsilon^2 = \text{const.}$ par un point de rebroussement.

La figure 9. valable pour $\sigma > 15$. donne le prolongement des

Fig. 9.



courbes pour les grandes valeurs de σ . On remarque que le minimum de ε^2 se produit pour $\omega = 0$ et $\sigma = 1$ et il a pour valeur

$$\varepsilon^2 = 0,35.$$

La précision avec laquelle ces graphiques ont été établis n'est pas considérable mais elle est certainement suffisante étant donnée l'erreur probable que nous devons avoir sur nos excentricités hypothétiques.

7. Avant de déterminer les excentricités hypothétiques des

étoiles dont l'orbite est inconnue nous allons appliquer cette méthode, en vue de sa vérification, aux couples dont l'orbite a été calculée. Pour 117 de ces couples nous avons déterminé les variables ω et σ à l'époque 1870. Ceci a été effectué soit directement à partir des observations, soit lorsque celles-ci manquaient à l'époque considérée à l'aide d'une éphéméride dressée d'après les éléments orbitaux.

Rappelons que nos excentricités hypothétiques sont déterminées en fonction de ε^2 par la formule

$$\overline{e^2} = a_0 + a_1 \varepsilon^2 + a_2 \varepsilon^4 + \dots,$$

les coefficients étant déterminés par la condition que la répartition de $\overline{e^2}$ soit identique à celle des carrés des excentricités vraies. Dans le cas où les orbites sont connues, un simple dénombrement fournit cette dernière. ε^2 est lu pour chaque couple sur les figures 8 et 9 et par suite on dispose de sa fonction de répartition.

Ces deux fonctions sont données par le tableau suivant :

e^2 ou ε^2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Répart. de e^2 ...	23	24	27	12	6	9	4	6	4	2	
Répart. de ε^2 ...	0	0	0	16	32	23	20	10	11	5	

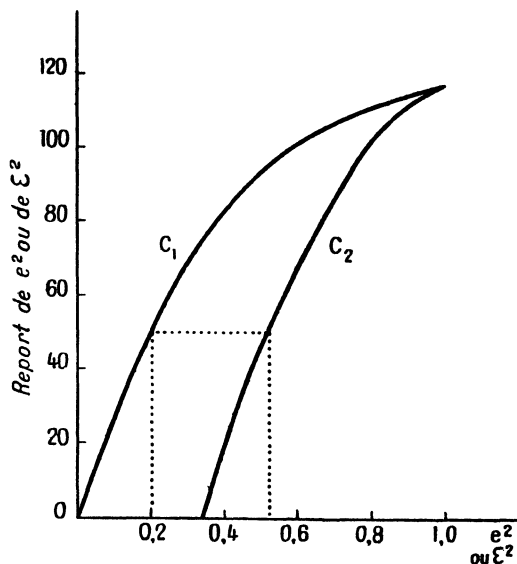
Pour plus de commodité nous passons aux fonctions de répartition intégrales, c'est-à-dire qui représentent le nombre de couples tel que e^2 (ou ε^2) soit plus petit qu'une certaine valeur. Ces courbes sont tracées sur la figure 10. La courbe C_1 représente la répartition de e^2 et la courbe C_2 celle de ε^2 . Nous faisons alors correspondre les points de ces deux courbes qui ont même ordonnée. La valeur e^2 qui correspond à ε^2 est alors par définition le carré de notre excentricité hypothétique. Il n'est pas difficile d'établir une formule reliant e^2 à ε^2 et nous avons obtenu :

$$\overline{e^2} = -0,284 + 0,546 \varepsilon^2 + 0,738 \varepsilon^4.$$

À l'aide de cette formule nous avons calculé l'excentricité hypothétique de chaque couple. Pour vérifier que ces excentricités ont réellement une signification physique nous avons établi, grâce à elles, la relation bien connue entre les périodes et les excentricités. Nous avons utilisé les périodes vraies données par le calcul des

orbites; elles ont été divisées en quatre groupes, tels que les nombres des couples des différents groupes soient du même ordre de grandeur. Pour chaque groupe nous donnons la moyenne e^2

Fig. 10.



des carrés de leurs excentricités vraies, déduites des orbites et la moyenne $\overline{e^2}$ des carrés des excentricités hypothétiques. Le tableau suivant fait connaître le résultat de ces calculs :

P années	0	40	80	120	∞
Nombre de couples . . .	29	27	29	32	
e^2 vrai	0,222	0,268	0,333	0,383	
$\overline{e^2}$ hyperbolique	0,255	0,271	0,319	0,367	

On peut considérer que le résultat est très satisfaisant et que par suite il justifie le procédé employé pour la détermination des excentricités hypothétiques.

8. Nous allons maintenant appliquer ce qui précède aux 183 couples dont l'orbite est inconnue et pour lesquels nous avons obtenu la répartition de leurs excentricités vraies au chapitre précédent.

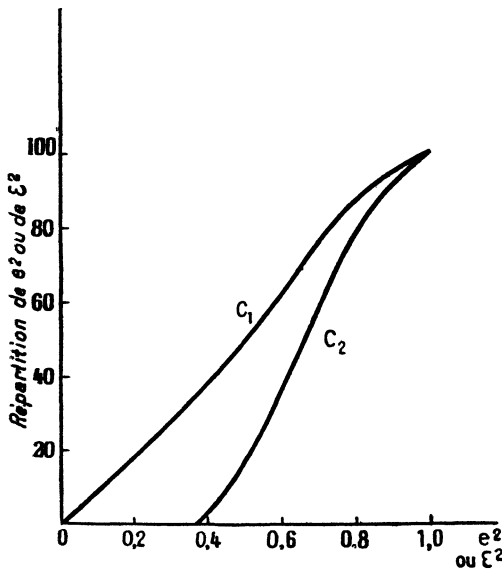
La table de l'Appendice VI donne pour chaque couple la valeur de ε^2 et celle de e^2 déduite de la formule que nous allons établir. Elle donne également la valeur hypothétique du logarithme de la période; le calcul de cette quantité fera l'objet du chapitre suivant.

Le tableau suivant fait connaître la répartition (en pour-cent) de e^2 vrai d'après les résultats du chapitre précédent ainsi que celle de ε^2 :

e^2 ou ε^2	0	0,09	0,25	0,49	0,81	1,00
Répart. de e^2 .	9,48	10,91	24,52	42,36	12,73	
Répart. de ε^2 .	0	0	15,85	64,48	19,67	

La figure ci-dessous (*fig. 11*) montre les deux courbes de répar-

Fig. 11.



tition intégrales. De leur étude on déduit la formule donnant les excentricités hypothétiques

$$\overline{e^2} = 0,032 - 1,62\varepsilon^2 + 5,36\varepsilon^4 - 2,78\varepsilon^6.$$

Cette formule est en apparence très dissemblable de celle obtenue pour les couples dont l'orbite est connue, mais en pratique elle

donne des résultats peu différents, ce qui contribue encore à justifier la méthode.

A l'aide de ces excentricités hypothétiques cherchons s'il existe une corrélation entre l'excentricité et le type spectral.

Nous obtenons le tableau suivant :

Type spectral.....	B.	A.	F.	G.	K.	M.
Nombre de couples...	7	25	63	56	26	0
e^2	(0,524)	0,383	0,496	0,584	0,495	—

Les étoiles B sont bien peu nombreuses pour permettre un emploi justifié des excentricités hypothétiques. Si nous en faisons abstraction nous voyons que l'excentricité semble croître avec le type spectral (à l'exclusion du type K). Cette variation est-elle réelle? Ceci n'est pas très certain. Pour les couples visuels, dont l'orbite est connue, l'excentricité ne semble pas dépendre du type spectral; pour les couples spectroscopiques il semble bien que l'excentricité croisse lorsque le type spectral avance (¹). La répartition du nombre de couples des différents types spectraux n'étant pas la même suivant la classe d'étoiles doubles à laquelle on s'adresse il semble que pour l'ensemble des étoiles doubles la corrélation que nous envisageons soit assez probable. On sait d'ailleurs que le type spectral est une variable d'un intérêt assez médiocre, étant donné qu'à un même type spectral peuvent correspondre des étoiles de magnitudes absolues très diverses.

Il conviendra, lorsqu'on aura acquis des données relatives aux étoiles à très faible mouvement, de reprendre pour l'ensemble des étoiles doubles l'étude de ces corrélations.

(¹) BARBIER, *Sur une corrélation possible entre les coordonnées des étoiles doubles et leur excentricité ou leur période* (*Journal des Observateurs*, vol. XIV, 1931, p. 137).

CHAPITRE IV.

LES PÉRIODES HYPOTHÉTIQUES.

1. Nous avons déjà utilisé au cours [du premier chapitre les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\rho^3 \theta'^2 - \rho^2 \rho'' &= n^2 a^3 \cos^3 j, \\ \rho &= a(1 - e \cos u) \cos j.\end{aligned}$$

En désignant par P la période

$$P = \frac{2\pi}{n},$$

on obtient

$$(1) \quad P = \frac{2\pi}{\theta' \sqrt{\sigma}} (1 - e \cos u)^{-\frac{3}{2}}$$

et en passant aux logarithmes,

$$(2) \quad \log P = \log 2\pi - \log \theta' - \frac{1}{2} \log \sigma - \frac{3}{2} \log(1 - e \cos u).$$

Finsen a publié cette formule indépendamment de nous et à une date un peu antérieure ⁽¹⁾. *Les formules (1) et (2) ont un grand intérêt pratique.* De la formule (1) nous avons déduit une méthode entièrement nouvelle pour le calcul des orbites des étoiles doubles ⁽²⁾. *La formule (2) est à la base du calcul des périodes hypothétiques.*

⁽¹⁾ *The détermination of Dynamical parallaxes of double stars* (M. N. t. 92, 1931, p. 52).

⁽²⁾ *Bulletin astronomique*, 2^e série, t. 7, 1932, p. 141.

2. Nous allons montrer d'abord comment on peut obtenir la fonction de répartition de $\log P$. Posons

$$\begin{aligned}\log P &= \nu, \\ \log \frac{\theta' \sqrt{\sigma}}{2\pi} &= \tau, \\ -\frac{3}{2} \log(1 - e \cos u) &= \alpha.\end{aligned}$$

La formule (2) devient

$$(3) \quad \nu = \alpha - \tau.$$

Soit $\varphi(\nu)$ la répartition cherchée de $\log P$. Soient également $a(\tau)$ la répartition de τ connue par les observations et $n(\alpha)$ la répartition de α telle qu'elle résulte de la répartition $N(e, g)$ obtenue au deuxième chapitre.

Le nombre de couples tels que, simultanément, ν soit compris entre ν et $\nu + d\nu$ et α entre α et $\alpha + d\alpha$ est

$$\varphi(\nu) n(\alpha) d\nu d\alpha$$

ou

$$\varphi(\nu) n(\nu + \tau) d\nu d\tau$$

et par suite $\varphi(\nu)$ est donné par l'équation

$$(4) \quad a(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu) n(\nu + \tau) d\nu.$$

Cette équation est d'un type qui a été résolu par Schwarzschild. Soient $a^{-1}(\omega)$ et $n^{-1}(\omega)$ les fonctions de Fourier conjuguées de $a(\omega)$ et $n(\omega)$, c'est-à-dire définies par

$$\begin{aligned}a^{-1}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) e^{x\omega i} dx, \\ n^{-1}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} n(x) e^{x\omega i} dx.\end{aligned}$$

On a

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^{-1}(\omega)}{n^{-1}(\omega)} e^{\nu\omega i} d\omega.$$

Telle est la solution du problème. Dans le cas où les fonctions sont des fonctions de répartition du type de Gauss, le calcul des intégrales ne présente pas de difficultés.

Nous n'avons pas effectué les calculs numériques relatifs à ce problème. En effet, il est facile de voir que l'équation (4) n'est correcte que s'il n'existe aucune corrélation entre $\log P$ d'une part et e, g d'autre part. Or on sait précisément, pour les couples dont l'orbite est connue, qu'il existe une corrélation entre e et $\log P$. En outre la détermination directe de la fonction de répartition de $\log P$ ne semble pas présenter un grand intérêt car nous allons montrer qu'on peut obtenir directement et pour chaque couple une valeur hypothétique, assez précise de cet élément.

Notons enfin qu'on peut mettre en équation le problème le plus général, celui de trouver la répartition $N(e, g, \log P)$. La résolution numérique de l'équation à laquelle on est conduit est certainement assez laborieuse et il n'est pas certain que les données soient en nombre suffisant pour permettre de l'effectuer utilement.

3. Pour chaque couple on connaît $\log \theta'$ et $\log \sigma$; supposons qu'on puisse également déterminer la valeur probable de $\log(1 - e \cos u)$, alors la valeur probable de $\log P$ serait donnée par la formule

$$(5) \quad \overline{\log P} = \log 2\pi - \log \theta' - \frac{1}{2} \log \sigma - \frac{3}{2} \log(1 - e \cos u).$$

En réalité on ne connaît pas la valeur probable de $\log(1 - e \cos u)$, mais on peut obtenir, par le même moyen que pour les excentricités, une valeur hypothétique satisfaisant à la condition que la répartition de ces valeurs hypothétiques soit identique à celle des valeurs vraies.

Nous avons, en réalité, opéré un peu différemment en faisant l'hypothèse suivante : la probabilité pour chaque couple pour que e soit compris entre e et $e + de$ et g entre g et $g + dg$ est identique à la répartition de ces éléments pour l'ensemble des couples. Cette simplification qui est très souvent faite implicitement dans des recherches statistiques de même nature est parfaitement légitime ici étant donnée l'erreur probable importante qu'on aurait sur la valeur hypothétique de la quantité $\log(1 - e \cos u)$ relative à un couple donné. Nous allons d'ailleurs vérifier que cette hypothèse n'introduit pas dans le calcul d'erreur notable en calculant par cette méthode les périodes hypothétiques des couples dont l'orbite est déjà connue.

4. On a utilisé 117 couples pour lesquels la période est déjà connue. D'après les éléments et pour chacun d'eux ⁽¹⁾, on a calculé la valeur de

$$\log_{10}(1 - e \cos u).$$

On a trouvé pour la valeur moyenne de la quantité

$$-\frac{3}{2} \log(1 - e \cos u).$$

$$-\frac{3}{2} \log(1 - e \cos u) = +0,0032 \pm 0,203.$$

Par suite la formule (5) devient

$$\overline{\log_{10} P} = 0,80 - \log_{10} \theta' - \frac{1}{2} \log_{10} \sigma,$$

Pour l'ensemble des couples on a

$$\overline{\log_{10} P} = 1,84,$$

alors que, d'après les périodes vraies, on a

$$\overline{\log_{10} P} = 1,88.$$

La comparaison directe, pour chaque couple, la période vraie et de la période hypothétique nous a montré que l'erreur probable sur $\overline{\log_{10} P}$ est 0,274. La plus grande partie provient de l'erreur probable sur la quantité $-\frac{3}{2} \log(1 - e \cos u)$, le surplus devant être attribué à l'incertitude sur les données θ' et σ .

5. Il nous est maintenant possible de déterminer pour chacun de nos 183 couples, dont l'orbite est inconnue, une valeur hypothétique de $\log_{10} P$. Pour cela nous devons d'abord calculer la valeur moyenne de

$$X = -\frac{3}{2} \log(1 - e \cos u).$$

Ceci ne présente pas de difficultés : on calcule quelle est la valeur de cette expression pour le centre de chacune des aires du

⁽¹⁾ On a fait entrer deux fois chaque couple dans la statistique, pour les époques 1870 et 1900 respectivement, dans le but d'accroître les données.

Tableau II du premier chapitre, et n_{kl} représentant le nombre de couples correspondant, on a

$$\bar{X} = \frac{\sum n_{kl} X_{kl}}{\sum n_{kl}}.$$

L'erreur moyenne est donnée par

$$E(X) = \frac{\sum n_{kl} |X_{kl} - \bar{X}|}{\sum n_{kl}}.$$

On a trouvé

$$-\frac{3}{2} \log(1 - e \cos x) = +0,0102 \pm 0,267,$$

on voit que cette quantité diffère assez peu de celle obtenue pour les couples dont l'orbite est connue. *Les périodes hypothétiques des couples que nous considérons sont données par la formule*

$$\overline{\log P} = 0,81 - \log \theta' - \frac{1}{2} \log \sigma \pm 0,35.$$

Nous n'avons pas adopté 0,267 comme erreur probable pour tenir compte de l'erreur probable sur les données de l'observation en forçant un peu ce nombre.

Pour l'ensemble de nos 183 couples on a

$$\overline{\log_{10} P} = 2,73 \pm 0,03.$$

La moyenne géométrique des périodes est donc de l'ordre de 500 ans.

Les valeurs extrêmes que nous avons obtenues pour $\overline{\log P}$ sont 1,51 pour le couple β G.C. 6972 et 3,83 pour β G.C. 7375. *La répartition de $\overline{\log P}$ est d'ailleurs la suivante :*

$\overline{\log P} \dots$	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00
N.....	1	2	11	30	57	43	27	8	3	1	

Cette répartition est mise en évidence par la figure 12. On peut la représenter d'une manière très satisfaisante par une fonction de Charlier du type A. Avec ses notations ⁽¹⁾ on a

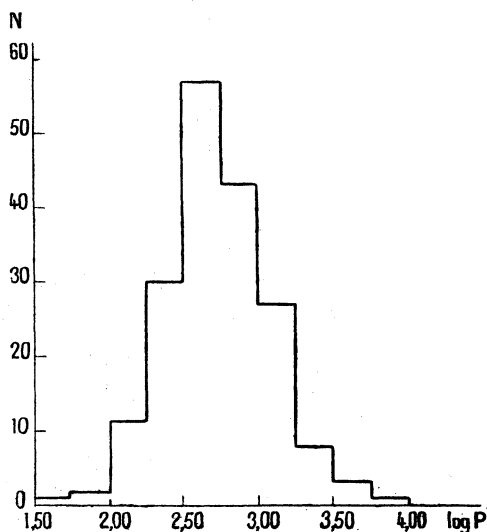
$$b = 2,73, \quad \sigma = 0,356,$$

$$F(x) = 128[\varphi_0 - 0,0240\varphi_3 + 0,0196\varphi_4].$$

⁽¹⁾ *Meddelanden från Lund*, § II, n 4, 1906.

Cette courbe est très peu différente d'une courbe normale de Gauss.

Fig. 12.



6. Examinons maintenant s'il existe, pour les couples étudiés ici, une corrélation entre $\log P$ et le type spectral.

Les résultats sont donnés ci-dessous,

Spectre.....	B.	A.	F.	G.	K.	M.
N. de couples.....	7	25	63	56	26	0
$\overline{\log P}$	2,530	2,613	2,741	2,741	2,922	—

Ce tableau semble bien montrer qu'une telle corrélation est probable, toutefois ce que nous avons dit à propos des excentricités s'applique encore ici.

Les données obtenues nous permettent d'étudier si la corrélation entre les périodes et les excentricités, mise en évidence à l'aide des couples dont l'orbite est connue, existe aussi pour les couples dont nous avons obtenu les éléments hypothétiques.

Nous déterminons les deux courbes de régression

$$\begin{aligned} \overline{e^2} &= f_1(\log P), \\ \overline{\log P} &= f_2(e^2). \end{aligned}$$

Pour la première de ces courbes nous avons classé les couples suivant leurs périodes en quatre groupes contenant sensiblement le même nombre de couples. A l'aide de la courbe de répartition de $\overline{\log P}$ nous avons déterminé une valeur approchée de la moyenne de cette quantité dans chaque intervalle. Nous avons ensuite déterminé directement la valeur moyenne de e^2 .

Nous avons ainsi obtenu :

$\log P$	1,5	2,5	2,7	3,0	4,0
N. de couples	44	47	52	40	
$\overline{\log P}$	2,27	2,60	2,85	3,15	
$\overline{e^2}$	0,498	0,438	0,505	0,617	

De même on trouve pour l'autre courbe de régression :

e^2	0	0,25	0,50	0,75	1,00
N. de couples	44	43	54	42	
$\overline{e^2}$	0,11	0,38	0,62	0,85	
$\overline{\log P}$	2,66	2,72	2,74	2,83	

Ces deux tableaux montrent qu'il y a bien corrélation entre les excentricités et les périodes. Un seul nombre est aberrant dans le premier tableau.

Lundmark (1) a déterminé les droites de régression pour l'ensemble des couples dont les orbites sont connues (visuelles et spectroscopiques). Leurs équations s'écrivent avec nos unités :

$$\begin{aligned}\overline{\log P} &= 4,8356e - 1,7523, \\ e &= 0,0973 \log P + 0,3357.\end{aligned}$$

Nous ne pouvons utiliser la première de ces droites de régression pour vérifier nos résultats, car il faudrait tenir compte pour chaque valeur de l'excentricité de toutes les étoiles pour lesquelles $\log P$ est connu, c'est-à-dire qu'on ne peut laisser de côté les étoiles dont l'orbite est connue. D'ailleurs cette droite est sans signification physique puisqu'elle dépend étroitement des matériaux employés. Par contre on peut utiliser la deuxième droite, tout au moins pour les couples tels que $\log P > 2,3$, car les couples, dont

(1) *Statistical concerning the binary stars (Meddelanden från Lund, n° 20, 1927).*

on connaît l'orbite satisfaisant à cette condition, sont peu nombreux et ne peuvent modifier le résultat d'une manière appréciable.

Pour l'ensemble de nos 183 couples on a :

$$\log P = 2,73,$$

et par suite

$$\bar{e} = 0,601,$$

valeur plus faible que celle obtenue directement (0,665).

Pour les étoiles classées d'après leurs périodes on a :

$\log P$	2,27	2,60	2,85	3,15
e calculé.....	0,557	0,589	0,613	0,642
$\sqrt{\bar{e}^2}$	0,706	0,662	0,711	0,785

Les nombres donnés par la droite de régression sont systématiquement trop faibles. Cela tient en partie à ce que nous les comparons à $\sqrt{\bar{e}^2}$ et non à e ; cette dernière quantité, comme on l'a vu pour l'ensemble des couples, est plus petite que $\sqrt{\bar{e}^2}$ de 0,05 environ. Ceci ne suffit pas à expliquer les écarts observés. Comme nous l'avons dit dans l'Introduction à ce mémoire, la sélection des couples étudiés peut modifier d'une manière très sensible la corrélation entre les excentricités et les périodes. Il est peu probable que cette sélection agisse de la même façon pour les différentes classes d'étoiles doubles et ceci contribue, sans doute, à expliquer nos écarts.

7. La formule (2) du présent chapitre a été utilisée par Finsen pour établir une formule donnant des périodes hypothétiques. Il suppose que toutes les anomalies moyennes sont également probables et que la répartition des excentricités des étoiles doubles en général est celle qui convient aux couples dont l'orbite est connue. Il obtient ainsi

$$\log P = 0,74 - \log \theta' - \frac{1}{2} \log \sigma.$$

Nous avons trouvé, au lieu de la constante 0,74, la valeur 0,80 valable pour les couples d'orbites connues et 0,81 pour les autres couples. *La valeur de Finsen est trop faible*, ce qui s'explique par l'insuffisance des hypothèses effectuées.

8. Signalons encore que W. J. Luyten a donné ⁽¹⁾ des formules destinées à faire connaître la période hypothétique des couples ne présentant aucun mouvement orbital.

La première des ces formules s'applique lorsque l'on connaît la distance angulaire apparente des deux composantes, la parallaxe et la masse, celle-ci étant calculée à l'aide de la parallaxe et de la magnitude.

M et ϖ représentant la masse et la parallaxe, on a

$$P^2 = \left(\frac{a}{\varpi} \right)^3 M^{-1}$$

ou

$$\log P = \frac{3}{2} \log \frac{a}{\varpi} - \frac{1}{2} \log M.$$

A l'époque de l'observation on a

$$r = a f(e),$$

$$\rho = r \cos j = a f(e) \cos j$$

et par suite

$$\log P = \frac{3}{2} \log \frac{\rho}{\varpi} - \frac{1}{2} \log M - \frac{3}{2} [\log \cos j + \log f(e)].$$

Le terme entre crochets est inconnu. Moyennant certaines hypothèses on en peut obtenir une valeur probable, qui dépend de $\log P$. La formule donnée par Luyten est

$$(6) \quad \log P = 1,460 \log \frac{\rho}{\varpi} - 0,487 \log M + 0,22 \pm 0,35.$$

L'erreur probable est purement théorique. Elle suppose que les hypothèses effectuées sur les excentricités et les anomalies moyennes sont correctes et que les quantités ρ , ϖ et M ne sont pas sujettes à erreurs.

La deuxième formule donnée par Luyten (ainsi que sa variante) s'applique au cas où la parallaxe est inconnue. Elle revient au fond à remplacer dans la formule (6), $\log \varpi$ et $\log M$ par des valeurs hypothétiques déduites de relations empiriques faisant intervenir la magnitude m et le mouvement propre μ . On a

$$(7) \quad \log P = 0,86 + \frac{3}{2} \log \rho + 0,100 m - 1,00 \log \mu,$$

(1) *Proc. Nat. Ac. of Sciences*, t. 16, 1930, p. 252, et *M. N.*, t. 93, 1933, p. 196.

formule valable si la magnitude est visuelle et

$$(7') \quad \log P = 0,73 + \frac{3}{2} \log \rho + 0,100m - 1,00 \log \mu$$

lorsque m est une magnitude photographique.

Ces formules ont été vérifiées à l'aide de quelques couples dont l'orbite est connue. La formule (6) a donné des résultats satisfaisants. Pour les formules (7) et (7') les résultats laissent quelque peu à désirer.

On trouvera, dans les publications indiquées, des listes de périodes hypothétiques obtenues grâce à ces formules. [27 pour la formule (6) et 102 pour la formule (7')].

CHAPITRE V.

RÉPARTITION SUR LA SPHÈRE CÉLESTE DES POLES DES ORBITES D'ÉTOILES DOUBLES.

1. Le nombre des recherches effectuées pour établir si les plans des orbites des étoiles doubles sont réellement distribués au hasard est déjà considérable. On pourra en trouver une liste récente dans un travail de Y. C. Chang ⁽¹⁾.

Ce problème présente en effet une difficulté car la détermination de l'orbite donne bien la valeur absolue de l'inclinaison mais non son signe. Par suite pour chaque orbite il y a deux pôles possibles dont un seul est correct. La différence des vitesses radiales des deux composantes peut bien faire connaître le signe de l'inclinaison, mais cette quantité n'a pu être déterminée que pour seize couples. Les différents auteurs qui ont étudié cette question ont cherché par des procédés plus ou moins empiriques à se débarrasser des pôles fictifs. Suivant les procédés employés les résultats diffèrent complètement.

Il semble, dans ces conditions, qu'il soit préférable de s'adresser à des couples dont l'orbite est inconnue. C'est ce qu'a fait J. M. Poor ⁽²⁾. Sa méthode est basée sur la remarque suivante :

⁽¹⁾ *A study of the orientation of the orbit's planes of 16 visual binaries having determinate inclinations* (A. J., t. 40, 1920, p. 11).

⁽²⁾ *Preliminary results of a search for parallelism in the orbit-planes of binary stars* (A. J., t. 28, 1914, p. 145).

supposons que les plans des orbites soient tous parallèles à un plan donné, les étoiles situées sur le grand cercle parallèle à ce plan auront toutes des orbites apparentes rectilignes. Par suite il suffit d'étudier, dans chaque région du ciel, la répartition des compagnons par rapport aux étoiles principales. Soient $N(\rho, \theta) = \text{const.}$ les courbes faisant connaître dans une région cette distribution. Suivant qu'elles seront plus ou moins elliptiques on saura si le point du ciel correspondant est plus ou moins loin du grand cercle défini plus haut. Sans entrer dans les détails pratiques du calcul qu'il suffise de savoir que Poor a trouvé que *les pôles des orbites ont tendance à se grouper autour d'un point de coordonnées*

$$\alpha = 70^{\circ},$$

$$\delta = +24^{\circ}$$

ou en coordonnées galactiques

$$\lambda = 145^{\circ},$$

$$\beta = -13^{\circ}.$$

2. La méthode que nous allons développer utilise également des couples dont l'orbite est inconnue. *Il arrive, en effet, que sans avoir déterminé l'orbite on connaisse la position de son plan.* Ceci se produit (*fig. 13*) lorsque la trajectoire du compagnon est

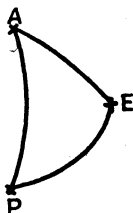
Fig. 13.



rectiligne, son prolongement passant par l'étoile principale. L'inclinaison est alors égale à $\frac{\pi}{2}$ et l'angle de position θ n'est pas autre chose que l'angle Ω définissant la position de la ligne des nœuds. On obtient sans peine, pour de tels couples, les coordonnées du pôle de leurs orbites.

Soient (fig. 14) A le pôle de la sphère céleste, E l'étoile double de

Fig. 14.



coordonnées équatoriales α , δ et P le pôle de son orbite de coordonnées α_0 , δ_0 . On a

$$\widehat{AEP} = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

et par suite le triangle APE donne

$$(1) \quad \begin{cases} \sin \delta_0 = \sin \theta \cos \delta, \\ \cos(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 = -\sin \theta \sin \delta, \\ \sin(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 = \cos \theta. \end{cases}$$

Le calcul est effectué pour chaque couple. Les coordonnées équatoriales des étoiles et des pôles sont ensuite transformées en coordonnées galactiques.

3. Il est aisé de voir que la répartition des pôles dépend de la répartition des étoiles elles-mêmes. Montrons-le d'abord dans deux cas simples :

1° Les étoiles considérées se trouvent toutes au voisinage des pôles galactiques. Il est évident alors que tous les pôles des orbites doivent se trouver dans le plan galactique et que toutes les longitudes sont également probables ;

2° Les étoiles considérées se trouvent dans le plan galactique à une longitude λ . Les pôles sont nécessairement à la longitude $\lambda \pm \frac{\pi}{2}$ et toutes les latitudes sont également probables.

Ceci nous suggère deux méthodes pour l'étude de la répartition des pôles sur la sphère céleste :

a. *La distribution des étoiles étudiées peut déceler une répartition anormale des pôles.* Supposons par exemple que, par rapport à l'ensemble des étoiles, il y ait une proportion très minime d'étoiles ayant une faible latitude galactique, cela signifierait que les pôles ont tendance à se répartir dans le plan galactique.

Nous n'avons pas utilisé cette méthode étant donnée la difficulté de reconnaître si une concentration apparente des couples étudiés dans une région de la sphère céleste est bien réelle et n'est pas due, par exemple, à une répartition différente des types spectraux ou à une exploration insuffisante de certaines régions du ciel.

b. *La véritable méthode consiste à comparer la répartition vraie des pôles à une répartition calculée en s'appuyant sur la théorie des probabilités, par une généralisation de ce qui a été effectué plus haut dans deux cas particuliers.* C'est cette méthode que nous avons employée et que nous allons développer.

4. Soit θ_g l'angle de position de l'étoile, compté à partir du nord galactique. On a les relations suivantes entre les coordonnées λ, β d'une étoile et les coordonnées λ_0, β_0 du pôle,

$$(2) \quad \begin{cases} \sin \beta_0 = \sin \theta_g \cos \beta, \\ \cos(\lambda - \lambda_0) \cos \beta_0 = -\sin \theta_g \sin \beta, \\ \sin(\lambda - \lambda_0) \cos \beta_0 = \cos \theta_g. \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système (1), le système de coordonnées ayant seul été changé. On tire de (2)

$$(3) \quad \theta_g = \arcsin \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta},$$

$$(4) \quad \theta_g = \arcsin \frac{\cot(\lambda_0 - \lambda)}{\sin \beta}.$$

Toutes les valeurs de θ_g sont également probables a priori. La probabilité p_{mn} pour que β_0 soit compris entre β_m et β_n est par suite

$$(5) \quad \frac{\pi}{2} p_{mn} = \arcsin \frac{\sin \beta_m}{\cos \beta} - \arcsin \frac{\sin \beta_n}{\cos \beta}.$$

On doit nécessairement avoir

$$\frac{\sin \beta_m}{\cos \beta} < 1.$$

Par conséquent la latitude du pôle d'une étoile considérée ne peut donc jamais prendre toutes les valeurs possibles à moins que $\beta = 0$ et dans ce cas, comme nous l'avons dit, elles sont toutes également probables.

La probabilité q_{rs} pour que λ_0 soit compris entre λ_r et λ_s est donnée par

$$(6) \quad \pi q_{rs} = \text{arc tang} \frac{\cot(\lambda_r - \lambda)}{\sin \beta} - \text{arc tang} \frac{\cot(\lambda_s - \lambda)}{\sin \beta}.$$

Enfin la probabilité composée pour que simultanément β_0 soit compris entre β_m et β_n et λ_0 entre λ_r et λ_s est

$$(7) \quad p_{mnrs} = \frac{p_{mn} q_{rs}}{\Sigma(p_{mn} q_{rs})}.$$

Il est alors facile de calculer, d'après la répartition des étoiles, quelle doit être celle des pôles. La comparaison avec la répartition réellement observée fera connaître les singularités qui pourraient se présenter.

5. Indiquons maintenant quels sont les matériaux que nous avons utilisés. Presque tous les couples qui présentent un mouvement orbital appréciable se trouvent catalogués par Russell ⁽¹⁾; la liste fournit en particulier ρ , θ , ρ' , θ' . Nous avons sélectionné les couples tels que l'angle V entre le rayon vecteur et la tangente à l'orbite soit plus petit que 7° , c'est-à-dire $\cot V > 8$ ou

$$\frac{\rho'}{\rho \theta'} > 8.$$

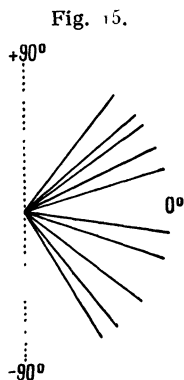
Nous avons trouvé 74 couples répondant à cette condition. On trouvera à l'Appendice VII la liste de ces étoiles, ainsi que leurs coordonnées et celles ⁽²⁾ des pôles de leurs orbites. Ces coordonnées n'ont d'ailleurs été déterminées qu'à 2 ou 3° près, ce qui est très suffisant pour le but que nous nous proposons.

6. Étudions d'abord les couples se trouvant dans les deux cas particuliers examinés plus haut.

(1) H. N. RUSSELL and C. E. MOORE, *Dynamical parallaxes of 1777 double stars* (A. J., t. 39, 1929, p. 165).

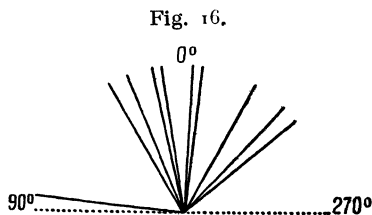
(2) On a toujours pris en considération le pôle dont la longitude est comprise dans l'intervalle $270^\circ - 0^\circ - 90^\circ$.

Premier cas. — Étoiles se trouvant dans le plan galactique ou pratiquement telles que $|\beta| < 10^\circ$. Il y en a onze satisfaisant à cette condition. La figure 15 montre la répartition des latitudes de



leurs pôles. Rappelons que nous avons montré que toutes les latitudes sont, dans ce cas, également probables. *Nous constatons qu'il y a une concentration marquée pour les latitudes faibles.* Dans un intervalle de 127° entre -67° et $+54^\circ$ il y a onze pôles. Dans les 56° situés au voisinage des pôles il n'y en a pas un seul.

Deuxième cas. — Étoiles se trouvant au voisinage des pôles galactiques, c'est-à-dire telles que $|\beta| > 60^\circ$. Nous avons dix couples satisfaisant à cette condition. La figure 16 montre leur



répartition. A priori toutes les longitudes sont également probables. *Nous constatons qu'en réalité il y a une concentration très importante vers une longitude de 350° environ.* En effet dans l'intervalle de 80° compris entre 311° et 31° il y a neuf couples. Dans les 100° restants il y en a un seul.

L'étude de ces deux cas particuliers suffit donc à montrer qu'il est très probable que les pôles ont tendance à se grouper autour d'un point de coordonnées

$$\lambda = 350^{\circ}, \quad \beta = 0^{\circ}.$$

C'est ce que nous allons vérifier avec l'ensemble des 74 couples dont nous disposons.

7. A l'aide de la formule (5) nous calculons, pour chaque couple, la probabilité pour que son pôle se trouve dans l'un des intervalles de latitude, définis par la suite :

$$-90^{\circ} \quad -41^{\circ},7 \quad -19^{\circ},5 \quad 0^{\circ} \quad +19^{\circ},5 \quad +41^{\circ},7 \quad +90^{\circ}.$$

Ces nombres ont été choisis de manière à délimiter, sur la sphère céleste, des aires égales.

Il suffit de former, pour chacun de ces intervalles, la somme des probabilités correspondant aux diverses étoiles pour obtenir le nombre probable de pôles qui doivent s'y trouver. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

β	-90°	$-41^{\circ},7$	$-19^{\circ},5$	0°	$+19^{\circ},5$	$+41^{\circ},7$	$+90^{\circ}$
N_c	12,71	12,77	11,52	11,52	12,77	12,71	
N_o	9	9	16	16	13	11	
$N_o - N_c$.	-3,71	-3,77	+4,48	+4,48	+0,23	-1,71	

N_c = Nombre de pôles calculé; N_o = Nombre de pôles observé.

Les résidus $N_o - N_c$ montrent que les pôles observés sont en excès aux faibles latitudes. Il convient de reconnaître maintenant si ces résidus, bien qu'ils soient importants par rapport aux nombres en jeu, ne pourraient être dus à un écart accidentel ayant une probabilité notable. Pour préciser, nous cherchons la probabilité pour avoir entre $-19^{\circ},5$ et $+19^{\circ},5$ un écart plus grand que 8,96. La probabilité a priori, pour un pôle, de se trouver dans cet intervalle est approximativement $\frac{1}{3}$. Par suite l'unité d'écart est :

$$\sqrt{2 \times 74 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = 5,73.$$

L'écart relatif est :

$$\lambda = \frac{8,96}{5,73} = 1,56.$$

La probabilité d'avoir, en valeur absolue, un écart supérieur à cette quantité est

$$\frac{2}{\pi} \int_{1,56}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = 0,03.$$

En réalité nous aurions pu avoir le même écart dans l'intervalle -90° , $-19^\circ,5$ ou dans l'intervalle $+19^\circ,5$ $+90^\circ$, ce qui aurait été tout aussi remarquable que l'écart que nous avons obtenu. Par suite on a une valeur par excès de la probabilité d'avoir un écart au moins aussi grand que l'écart trouvé dans l'un quelconque des trois intervalles en multipliant par 3 la probabilité trouvée plus haut. Cette probabilité est donc 0,09. *Nous pouvons donc affirmer qu'il y a au moins neuf chances sur dix pour que la concentration observée vers les faibles latitudes ne soit pas due à une répartition accidentelle des pôles mais qu'elle ait bien une signification physique.*

En opérant d'une manière tout à fait semblable pour les longitudes on trouve :

$\lambda \dots\dots$	-90°	-60°	-30°	0°	$+30^\circ$	$+60^\circ$	$+90^\circ$
$N_c \dots\dots$	11,76	11,00	12,24	14,86	12,27	11,87	
$N_o \dots\dots$	11	17	14	11	9	12	
$N_o - N_c \dots$	-0,76	+6,00	+1,76	-3,86	-3,27	+0,13	

N_c = Nombre de pôles calculé; N_o = Nombre de pôles observé.

Ce tableau montre que *les longitudes des pôles se groupent de préférence entre -60° et 0° et plus particulièrement entre -60° et -30°* . On trouve comme pour les latitudes que la probabilité a priori d'une telle concentration est inférieure à 0,1.

Il nous reste à étudier la répartition des pôles sur la sphère céleste. Dans chacune des douze cases du tableau suivant on trouve le nombre C de pôles calculé à l'aide des probabilités P définies par (7), le nombre O des pôles observé et le résidu O-C.

$\lambda = -90^\circ$	-60°	-30°	0°	$+30^\circ$	$+60^\circ$	$+90^\circ$
$\beta = +90^\circ$	$C = 12,711$ $O = 11$ $O - C = -1,711$					
$+41^\circ,7$	$C = 6,182$ $O = 5$ $O - C = -1,182$		$C = 6,536$ $O = 8$ $O - C = +1,464$			
$+19^\circ,5$	$C = 3,494$ $O = 6$ $O - C = +2,506$	$C = 4,120$ $O = 6$ $O - C = +1,880$			$C = 3,957$ $O = 4$ $O - C = +0,043$	
0°	$C = 3,494$ $O = 7$ $O - C = +3,506$	$C = 4,120$ $O = 6$ $O - C = +1,880$			$C = 3,957$ $O = 3$ $O - C = -0,957$	
$-19^\circ,5$	$C = 6,182$ $O = 3$ $O - C = -3,182$		$C = 6,536$ $O = 6$ $O - C = -0,536$			
$-41^\circ,7$	$C = 12,711$ $O = 9$ $O - C = -3,711$					
-90°						

On voit qu'il y a concentration dans les quatre cases entourées d'un double trait, c'est-à-dire vers le point

$$\lambda = 330^\circ, \quad \beta = 0^\circ.$$

Calculons encore la probabilité pour qu'une telle concentration soit un simple effet du hasard. La probabilité a priori, pour un pôle, de se trouver dans ce groupe de quatre cases est d'environ $\frac{2}{9}$. Par suite l'unité d'écart est

$$\sqrt{2 \times 74 \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{9}} = 5,1.$$

L'écart relatif est

$$\lambda = \frac{9,8}{5,1} = 1,9.$$

La probabilité d'avoir un écart au moins égal à cette quantité est

$$\frac{2}{\pi} \int_{1,9}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = 0,01.$$

Une limite supérieure de la probabilité d'avoir une telle concentration en une région quelconque de la sphère est obtenue en multipliant ce nombre par $\frac{9}{2}$. Par suite *la probabilité pour que la concentration observée n'ait pas de causes physiques est inférieure à 0,05.*

En examinant plus attentivement les résidus du tableau précédent on voit que les grandes valeurs négatives se rencontrent plus particulièrement dans l'hémisphère sud. Ceci nous laisse supposer que la latitude du point de concentration des pôles n'est pas exactement nulle mais est probablement de l'ordre de $+10^\circ$. Il semble de même que la longitude soit plus voisine de -60° que de 0° . *Nous adoptons donc pour coordonnées du point cherché.*

$$\lambda = 320^\circ,$$

$$\beta = +10^\circ$$

ou du point opposé sur la sphère céleste.

$$\lambda = 140^\circ.$$

$$\beta = -10^\circ.$$

Ce point est pratiquement le même que celui obtenu par Poor. Les deux méthodes étant entièrement indépendantes, nous considérons que la tendance au parallélisme des orbites des étoiles doubles de très longue période est définitivement établie.

On peut donner deux interprétations différentes à cette répartition anormale des pôles :

- a. Les pôles se concentrent dans la direction du vertex;
- b. Ils se concentrent dans la direction du centre de la galaxie.

Ces deux interprétations sont a priori également probables car la direction du vertex est sensiblement la même à 180° près que celle du centre de la galaxie

	λ .	β .
Vertex.....	160°	0°
Centre de la galaxie.....	325°	0°

Poor avait adopté la première interprétation. Depuis il a paru un travail de W. Gyllenberg ⁽¹⁾ qui a étudié, pour des couples dont le mouvement propre est connu avec précision, la répartition de l'angle que fait le mouvement propre avec la ligne des composantes du système. Cette distribution est complètement au hasard. Par suite il semble que la seconde interprétation soit préférable, c'est-à-dire que *les pôles des orbites des étoiles doubles à très longue période se concentrent dans la direction du centre de la Voie lactée.*

L'hypothèse la plus vraisemblable a priori pour expliquer cette concentration est de l'attribuer à l'action de l'ensemble des étoiles de la galaxie. H. Mineur a résolu ce problème ⁽²⁾. Sa conclusion relativement aux pôles est la suivante : les pôles des orbites ont tendance à être plus nombreux dans la direction du petit axe de la quadrique

$$\varphi_2 = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = 1.$$

La quantité φ_2 est l'ensemble des termes du second degré dans le potentiel de gravitation de la galaxie, l'origine des coordonnées et la direction des axes ayant été convenablement choisies.

Les coefficients A_1, A_2, A_3 dépendent de la variation des ellipsoïdes de vitesses résiduelles d'un point à un autre de l'espace. L'étude de cette variation a été entreprise par Mineur. Il ne pense pas que les valeurs de ces coefficients soient suffisantes pour donner un effet appréciable pour des couples dont la période serait inférieure à cent mille ans. Cette période semble notablement supérieure à celle des couples étudiés ici et par suite *l'effet observé resterait inexpliqué.*

CHAPITRE VI.

LES PARALLAXES DYNAMIQUES. LEURS CONDITIONS D'EMPLOI.

1. On sait que l'orsque l'on connaît l'orbite d'une étoile double il est aisé de déterminer la parallaxe de cette étoile à l'aide de la

⁽¹⁾ *Meddelande fran Lund*, 1^{re} série, n° 132, 1932.

⁽²⁾ *Le mouvement des étoiles doubles sous l'action du champ de gravitation de la galaxie* (C. R. Acad. Sc., t. 190, 1930, p. 367).

troisième loi de Kepler

$$\frac{a^3}{P^2} = M \varpi^3,$$

où M est la masse totale du système et ϖ sa parallaxe. On voit que ϖ ne dépend de la masse que par la racine cubique de cette quantité et par suite est peu influencé par les erreurs commises dans son évaluation, évaluation qui est faite en s'appuyant sur la relation entre la masse et la magnitude absolue trouvée par Eddington. Nous n'indiquerons pas ici comment se fait ce calcul, nous contentant de renvoyer au mémoire fondamental de Russell ⁽¹⁾, qui a donné une méthode particulièrement simple pour ce calcul. Nous nous proposons seulement, en suivant l'analyse de Russell, de montrer comment on peut obtenir une valeur hypothétique de la parallaxe, appelée *parallaxe dynamique*, dans le cas où l'orbite est inconnue et surtout de discuter la valeur pratique de ces parallaxes et de préciser les conditions de leur emploi.

2. Nous modifions sensiblement les notations de Russell pour les mettre en harmonie avec celles que nous avons utilisées jusqu'ici. De l'équation du mouvement de la projection du compagnon on tire :

$$\rho'' - \rho \theta'^2 = - \frac{4 \pi^2 M \varpi^3 \cos^3 j}{\rho^2},$$

ce qui donne

$$\varpi \cos j = \rho M^{-\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{\theta'}{2\pi} \right)^2 - \frac{\rho''}{4\pi^2 \rho} \right]^{\frac{1}{3}},$$

ou en appelant ϖ_0 la parallaxe déterminée dans l'hypothèse d'une masse unité

$$(1) \quad \varpi_0 = \frac{\rho}{\cos j} \left[\left(\frac{\theta'}{2\pi} \right)^2 - \frac{\rho''}{4\pi^2 \rho} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Dans cette formule $\cos j$ est inconnu et nous aurons à le remplacer par une constante pour obtenir la formule de Jackson. Nous indiquerons plus loin comment se détermine cette constante ainsi que celles relatives aux deux formules que nous allons établir.

⁽¹⁾ *Astronomical Journal*, t. 38, 1928, p. 89.

De l'équation des aires on tire

$$(\varphi^2 \theta')^2 = 4\pi^2 a M \varpi^3 (1 - e^2) \cos^2 i,$$

où i désigne comme d'habitude l'inclinaison de l'orbite et par suite on a

$$(2) \quad \varpi_0 = \left(\frac{1 - e^2}{1 - e \cos u} \frac{\cos^2 i}{\cos^2 j} \right)^{-\frac{4}{3}} \varphi \left(\frac{\theta'}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

La fonction des éléments inconnus étant remplacée par une constante convenablement déterminée on obtient la formule de Comstock.

La troisième formule ou formule de Russell-Hertzsprung s'obtient de la façon suivante : Soit V la vitesse du compagnon sur son orbite. On a

$$V^2 = 4\pi^2 M \varpi^3 \left(\frac{2}{i} - \frac{1}{a} \right)$$

Les quantités observables sont la projection $\rho = r \cos j$ du rayon vecteur et la projection $v = V \cos j_1$ de la vitesse, j_1 désignant l'angle entre la vitesse vraie et sa projection. Par suite on a

$$(3) \quad \varpi_0 = \left[\cos j \cos^2 j_1 \left(2 - \frac{r}{a} \right) \right]^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{\varphi v^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

3. Nous voyons que dans les trois cas on a

$$\varpi = \varpi_0 M^{-\frac{1}{3}},$$

avec

$$(4) \quad \varpi_0 = \frac{x}{k},$$

x étant une fonction des données de l'observation et k une fonction des éléments inconnus. On a

$$k^3 = \cos^3 j \quad (\text{formule de Jackson}),$$

$$k^3 = \frac{\cos^2 i}{\cos j} \frac{1 - e^2}{1 - e \cos u} \quad (\text{formule de Comstock}).$$

$$k^3 = \cos j \cos j_1 \left(2 - \frac{r}{a} \right) \quad (\text{formule de Russell-Hertzsprung}),$$

La parallaxe dynamique est donnée par :

$$(5) \quad d = d_0 M^{-\frac{1}{3}} \quad \text{avec} \quad d_0 = l \, c,$$

où l est une constante à déterminer pour chaque formule.

Jusqu'aux travaux de Russell on a pris usuellement pour l la valeur moyenne de $\frac{1}{k}$:

$$(6) \quad l = \overline{\left(\frac{1}{k}\right)},$$

on obtient ainsi pour un couple donné la valeur la plus probable de sa parallaxe, ce qui semble bien être, à priori, la façon la plus logique de procéder. Russell a montré qu'on pouvait prendre aussi

$$(7) \quad l = \frac{1}{\bar{k}}$$

et que, à son avis, cette constante convenait mieux pour un emploi statistique des parallaxes, mais il est alors bien évident que la parallaxe dynamique obtenue ainsi pour un couple n'est pas sa parallaxe la plus probable. Nous discuterons plus loin de la valeur des parallaxes calculées à l'aide des constantes définies par (6) et (7),

Notons encore que si l'on cherche des magnitudes absolues déterminées par la formule

$$M - m = 5 + 5 \log_{10} \varpi,$$

où M et m sont la magnitude absolue et la magnitude apparente d'une des composantes d'une étoile double, on est amené à déterminer la valeur moyenne de $\log_{10} k$.

4. Nous devons donc calculer $\bar{k}$, $\overline{\left(\frac{1}{k}\right)}$, $\overline{\log_{10} k}$. Nous calculerons aussi $\bar{k}^3$ car ce calcul est le plus facile. Dans le cas de la formule de Jackson les résultats sont immédiats : la probabilité pour que j soit compris entre j et $j + dj$ est $\cos j dj$ et l'on a

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 j \, dj = \frac{\pi}{4}, & \overline{\left(\frac{1}{k}\right)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dj = \frac{\pi}{2}, \\ \overline{\log_{10} k} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log_{10} (\cos j) \cos j \, dj = \log_{10} \frac{2}{e} = 0,133, \\ \bar{k}^3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 j \, dj = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

Pour les formules de Comstock et de Russell-Hertzsprung le calcul de k^3 s'effectue sans difficulté. Pour la première de ces formules on a

$$k^3 = \frac{\cos^2 i}{\cos j} \frac{1 - e^2}{1 - e \cos u},$$

mais on a

$$\cos i = \cos j \sin \varphi,$$

φ étant l'angle entre le plan de l'orbite et projetant normalement le rayon vecteur sur le plan de référence. On a alors

$$\overline{\left(\frac{\cos^2 i}{\cos j} \right)} = \overline{\cos j \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 j \, dj \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{8}.$$

La valeur moyenne du second facteur doit être prise par rapport au temps ou ce qui revient au même par rapport à l'anomalie moyenne

$$g = u - e \sin u$$

et l'on a par suite

$$\overline{\left(\frac{1 - e^2}{1 - e \cos u} \right)} = \int_0^{\pi} \frac{1 - e^2}{1 - e \cos u} \frac{1 - e \cos u}{\pi} du = 1 - e^2.$$

Dans le cas de la formule de Russell-Hertzsprung on a

$$k^3 = \cos j \cos^2 j_1 \left(2 - \frac{r}{a} \right),$$

Soit J l'angle entre le rayon vecteur et la direction du mouvement relatif. On a

$$\sin j_1 = \sin j \cos J + \cos j \sin J \cos \varphi.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \cos j \cos^2 j_1 &= \cos j (1 - \sin^2 j \cos^2 J \\ &\quad - \cos^2 j \sin^2 J \cos^2 \varphi - 2 \sin j \cos j \sin J \cos J \cos \varphi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\cos j \cos^2 j_1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \cos^2 j \cos^2 j_1 \, dj \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \cos^2 J - \frac{3\pi}{32} \sin^2 J = (5 + \cos^2 J) \frac{\pi}{32}, \end{aligned}$$

on a d'ailleurs

$$\cot J = \lambda = \frac{e \sin u}{\sqrt{1 - e^2}}$$

et par suite

$$\cos^2 J = \frac{e^2 \sin^2 u}{1 - e^2 \cos^2 u};$$

d'autre part, $\frac{r}{a} = 1 - e \cos u$ et l'on a enfin

$$\begin{aligned} \overline{k^3} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi}{32} \left(5 + \frac{e^2 \sin^2 u}{1 - e^2 \cos^2 u} \right) (1 - e \cos u) (1 + e \cos u) du \\ &= \frac{\pi}{32} (5 - 2e^2). \end{aligned}$$

5. Le calcul direct de $\overline{k}$, $\overline{\left(\frac{1}{k}\right)}$ et $\overline{\log_{10} k}$ serait extrêmement pénible pour les formules de Comstock et Russell-Hertzprung. Russell a imaginé la méthode suivante, très ingénieuse, qui conduit rapidement au résultat désiré.

Supposons connue la probabilité $P(k_0^3)$ pour que k^3 soit plus petit qu'une certaine valeur k_0^3 , alors la valeur moyenne d'une fonction quelconque de k^3 , $f(k^3)$ sera obtenue par une intégrale simple

$$\overline{f(k^3)} = \int f(k^3) \frac{dP}{d(k^3)} d(k^3),$$

l'intégrale étant étendue à toutes les valeurs possibles de k^3 . Nous allons montrer comment on peut obtenir la fonction $P(k^3)$.

D'une manière tout à fait générale soit $F(x, y)$ une fonction de deux variables. Soit en outre $P(x_0)$ la probabilité pour que $x < x_0$ et soit $Q(x_0, y_0)$ la probabilité pour que $y < y_0$ lorsque $x = x_0$. On demande la probabilité $P(z)$ pour que $F(x, y) < z$.

La transformation $\xi = P(x)$, $\eta = Q(x, y)$ transforme la partie du plan x, y correspondant aux valeurs possibles de ces variables du plan ξ, η limité par les axes et les droites $\xi = 1$ et $\eta = 1$. La courbe $F(x, y) = z$ se transforme en une courbe C du plan ξ, η . La probabilité $\varphi(z)$ est égale à l'aire de la fraction du carré limitée par la courbe D , située du côté de la courbe où l'on a $F(x, y) < z$.

Utilisant pour la répartition des excentricités une fonction empirique, qui ne peut différer beaucoup de la réalité, Russell obtient les valeurs des diverses constantes cherchées. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de ces calculs car notre but est seulement de discuter la valeur et les conditions d'emploi des parallaxes dynamiques ainsi calculées.

6. Rappelons que la parallaxe dynamique, dans l'hypothèse d'une masse unité est donnée par

$$d_0 = lx,$$

x étant une fonction des données et l une constante. On a d'ailleurs pour la parallaxe vraie

$$\varpi_0 = \frac{x}{k},$$

où k est une fonction des éléments inconnus j, φ, e, u . Nous allons d'abord montrer qu'on ne peut pas prendre pour l la valeur moyenne de $\frac{1}{k}$ ou en d'autres termes qu'il est impossible d'obtenir pour un couple donné la valeur la plus probable de sa parallaxe. Ceci résulte immédiatement de ce que nous avons dit au Chapitre I (1). Prenons le cas de la formule de Jackson qui est le plus caractéristique. On a

$$x = \varphi \left[\left(\frac{\theta'}{2\pi} \right)^2 - \frac{\rho''}{4\pi^2\rho} \right]^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Étant donné un couple pour lequel on a pu déterminer ρ, ρ'', θ' on peut obtenir les quantités que nous avons appelées ω et σ et la condition $e^2 < 1$ entraîne

$$(8) \quad \cot^2 \varphi + 2\omega \sin j \cot \varphi + 1 + \omega^2 - 2\sigma \sin^2 j < 0$$

et ainsi que nous l'avons dit φ ne peut prendre toutes les valeurs comprise entre 0 et π et si $\frac{2\sigma}{1+\omega^2} < 1$, j ne peut pas varier dans tout l'intervalle 0 à $\frac{\pi}{2}$. En outre toutes les valeurs possibles d'après l'inégalité (8) de $\sin j$ et φ ne sont pas également probables. Ceci, ainsi que nous l'avons dit, résulte de ce que les données seraient suffisantes pour déterminer l'orbite et la probabilité pour que j soit comprise entre j et $j + dj$ et φ entre φ et $\varphi + d\varphi$ ne dépend en réalité que des erreurs d'observations sur les données.

Dans le cas des formules de Russell-Hertzprung et Comstock on ne connaît pas ρ'' et par suite la fonction de répartition de j et φ ne dépend pas uniquement des erreurs d'observations comme dans le cas précédent, mais il reste impossible de la déterminer. En outre il n'est pas légitime de considérer j et φ comme indépendants de

(1) Voir aussi BARBIER, C. R. Acad. Sc., t. 193, 1931, p. 709.

e et u . On a en effet entre ces quantités la relation

$$\frac{e \sin u}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\omega \sin \varphi + \sin j \cos \varphi}{\cos j}.$$

Par suite en aucun cas on ne peut prendre $l = \overline{\left(\frac{1}{k}\right)}$ en calculant cette quantité comme il a été dit plus haut et il est d'ailleurs impossible de la calculer correctement.

Dans le cas où l'on prend $l = \frac{1}{k}$ on n'obtient pas la valeur la plus probable de la parallaxe d'un couple, mais le calcul de la moyenne de k est correct. En effet on a

$$x = \varpi_0 k.$$

Prenons un certain nombre de couples ayant une même parallaxe donnée, alors les angles j et φ sont bien distribués au hasard et leurs valeurs sont indépendantes de celles de e et u . En prenant la moyenne on a

$$\bar{x} = \varpi_0 \bar{k}.$$

Par suite on obtient en toute rigueur la valeur moyenne $\bar{x}$ de la fonction des éléments connus correspondant à un ensemble de couples de parallaxe donnée. Réciproquement si l'on connaît la valeur vraie de x on peut définir la parallaxe dynamique d'un couple comme étant la parallaxe qui donne pour la valeur la plus probable de x sa valeur réelle.

7. Russell a montré que les parallaxes calculées avec $l = \overline{\left(\frac{1}{k}\right)}$, la moyenne étant supposée correcte, satisfont à la condition suivante :

Condition I. — Si des couples sont sélectionnés d'après leurs parallaxes dynamiques, la moyenne de leurs parallaxes vraies est égale à leur parallaxe dynamique.

Les parallaxes calculées avec $l = \frac{1}{k}$ satisfont à la condition suivante :

Condition II. — Si des couples sont sélectionnés d'après leurs parallaxes vraies, la moyenne de leurs parallaxes dynamiques est égale à leur parallaxe vraie.

Nous venons de montrer que les parallaxes déterminées pour satisfaire à la condition *I* sont incorrectes théoriquement. Nous devons donc nous demander si des parallaxes satisfaisant à la condition *II* peuvent être d'un usage étendu. Cette question présente un grand intérêt pratique car la plus importante liste de parallaxes dynamiques ⁽¹⁾ que nous possédions a été établie en vue de satisfaire à cette condition. Il semble d'ailleurs, comme le montre la discussion qui s'est élevée à ce sujet entre M. Finsen et moi-même ⁽²⁾, que ce soit une simple question d'appréciation personnelle. Utilisant également des opinions que le professeur Russell et M. Finsen ont bien voulu me faire connaître personnellement, je vais essayer de dégager les conditions dans lesquelles l'emploi des parallaxes dynamiques satisfaisant à la condition *II* est légitime.

Le cas strictement prévu par cette condition doit se présenter assez rarement. Un bon exemple qui m'a été proposé par Finsen est celui d'un amas d'étoiles : la moyenne des parallaxes dynamiques des étoiles doubles d'un amas est égale à la parallaxe de l'amas. Ce cas ne se présente que pour les Pléiades où l'on connaît deux parallaxes dynamiques, nombre insuffisant, puisque l'emploi des parallaxes satisfaisant à la condition *II* n'est justifié que statistiquement.

Si l'on cherche la parallaxe moyenne d'un groupe d'étoiles sélectionnées d'après une donnée qui n'ait aucune corrélation avec la parallaxe vraie le résultat sera encore correct. Ce cas ne doit pas se présenter fréquemment car si la donnée n'a théoriquement aucune corrélation avec la parallaxe, comme le type spectral par exemple, il n'en est pas de même pratiquement car il intervient un principe de sélection (magnitude limite des étoiles doubles observables) et les étoiles du type B seraient en moyenne plus éloignées que les naines du type G par exemple.

Lorsque la sélection aura lieu d'après un élément qui présentera une faible corrélation avec la parallaxe, le résultat sera acceptable et d'autant plus correct que cette corrélation sera plus faible.

Il faut surtout insister sur le point que l'on ne doit jamais effectuer la sélection d'après les parallaxes dynamiques, ni considérer la parallaxe dynamique d'une étoile double comme sa parallaxe pro-

⁽¹⁾ RUSSELL and C. E. MOORE, *Astronomical Journal*, t. 39, 1929, p. 165.

⁽²⁾ FINSEN, *M. N.*, 93, 1932, p. 25, et BARBIER, *C. R. Acad. Sc.*, 1933, p. 253.

bable. Ceci ne serait vrai que pour des parallaxes satisfaisant à la condition I. Celles-ci donneraient ainsi des résultats acceptables lorsque la sélection se ferait d'après un élément ayant une faible corrélation avec la parallaxe. A notre avis elles seraient donc bien préférables aux parallaxes satisfaisant à la condition II.

8. Remarquons encore que les parallaxes trigonométriques faibles satisfont à la condition II. Il est bien clair en effet que la valeur probable de la parallaxe d'un ensemble d'étoiles ayant chacune une parallaxe trigonométrique de $-0'',010$ n'est pas de $-0'',010$. Ces parallaxes sont d'ailleurs d'un usage assez restreint, aussi a-t-on cherché à les corriger (Eddington, Sir Frank Dyson, Nassau) pour leur faire satisfaire la condition suivante :

Condition III. — La fonction de répartition des parallaxes corrigées est identique à la fonction de répartition des parallaxes vraies.

Il est facile, ainsi que nous l'avons montré ⁽¹⁾, de corriger les parallaxes dynamiques obtenues par la formule de Jackson de manière à leur faire satisfaire cette condition. On est conduit à résoudre une équation d'Abel. Dans le cas des parallaxes de Comstock et de Russell-Hertzsprung l'équation intégrale serait très compliquée.

Il ne semble pas possible de corriger, même empiriquement, les parallaxes satisfaisant à la condition II pour les faire satisfaire à la condition I, car on ne connaît pas assez de parallaxes qui puissent être considérées comme des parallaxes vraies (grandes parallaxes trigonométriques et parallaxes dynamiques déterminées dans le cas où l'orbite est connue).

Cecchini a comparé les parallaxes dynamiques de Russell et C. E. Moore aux parallaxes trigonométriques ⁽²⁾. Le tableau suivant donne la correction à apporter à une parallaxe dynamique d pour que la moyenne des parallaxes trigonométriques correspondant aux couples de parallaxes dynamiques d ait précisément la valeur d :

Paral. dyn. d .	$0'',000$	$0,010$	$0,030$	$0,050$	$0,070$	$0,090$	$0,100$
Correction ..	$+0'',004$	$+0,006$	$-0,001$	$-0,011$	$-0,018$	$-0,021$	$-0,022$

⁽¹⁾ *Journal des Observateurs* t. 15, 1932, p. 3.

⁽²⁾ *Pubblicazioni del R. Osservatorio Astronomico di Merate*, n° 4, 1932, p. 21.

On voit que ces corrections sont très notables et qu'en particulier pour les parallaxes faibles elles sont grandes par rapport à la parallaxes. On doit surtout retenir de ce tableau que dans une recherche statistique on ne doit pas utiliser conjointement des parallaxes trigonométriques et des parallaxes dynamiques. Une moyenne basée à la fois sur des parallaxes trigonométriques et sur des parallaxes dynamiques étant dépourvue de sens.

9. Pour nous résumer :

Les parallaxes dynamiques ne peuvent en aucun cas être considérées comme les parallaxes les plus probables des couples. Elles ne peuvent être utilisées que statistiquement et dans des cas bien définis. Leurs conditions d'emploi sont les mêmes que celles des parallaxes trigonométriques faibles positives et négatives mais elles ne peuvent toutefois être utilisées concurremment avec celles-ci.

Une étude complète sur les parallaxes dynamiques paraîtra ultérieurement (¹).

CONCLUSIONS.

1. Nous avons établi une méthode pour déterminer la fonction de répartition des excentricités et des anomalies moyennes des étoiles doubles pour lesquelles on connaît $\rho\rho'\rho''$, θ' . Elle a été appliquée à 183 couples. On en déduit, en particulier, que leur excentricité moyenne est 0,66 et que les anomalies moyennes voisines de 0° sont plus nombreuses que celles voisines de 180° .

2. Nous avons proposé une méthode donnant les excentricités hypothétiques des 183 couples étudiés. Il n'est pas certain qu'il y ait corrélation entre leurs excentricités et leurs types spectraux.

3. Une formule fournissant des périodes hypothétiques a été établie. Elle a été appliquée aux couples étudiés. La moyenne géométrique de leurs périodes est de l'ordre de 500 ans. Il paraît possible qu'il y ait corrélation pour ces couples entre les périodes et

(¹) BARBIER, *Les parallaxes dynamiques des étoiles doubles. Collection des actualités scientifiques.* — (*Astronomie stellaire* dirigée par M. H. Mineur, Hermann, éditeur). •

les types spectraux. Il y a corrélation entre les périodes et les excentricités. Ces dernières sont sensiblement plus grandes que celles qu'on aurait pu obtenir par extrapolation des résultats obtenus d'après les orbites connues (Effet de la sélection?).

4. Une méthode nouvelle nous a permis de confirmer un résultat important de J. M. Poor, savoir que les plans des orbites des étoiles doubles de longues périodes ont une tendance assez marquée à être parallèles à un grand cercle de la sphère céleste dont le pôle aurait les coordonnées galactiques :

$$\lambda = 320^{\circ}, \quad \beta = +10^{\circ}.$$

Point très voisin de celui défini par la direction du centre de la Voie lactée.

5. Le nombre des couples étudiés est assez faible. Ils proviennent tous du catalogue général de Burnham. Il ne semble guère possible d'en trouver actuellement beaucoup d'autres tels que ρ'' puisse être déterminé. Ceci demanderait d'ailleurs un travail assez considérable. Notons à ce propos qu'il serait souhaitable qu'un catalogue donnant des lieux normaux, déduits de la discussion des mesures, puisse être établi ⁽¹⁾. Il semble certain que les matériaux s'accroîtront rapidement grâce aux mesures photographiques précises (Hertzsprung).

6. La connaissance d'une parallaxe précise est pratiquement équivalente à celle de ρ'' . Moyennant quelques modifications les méthodes précédentes relatives aux excentricités et aux périodes pourraient alors s'appliquer à des couples de périodes plus considérables.

7. Enfin on a montré que la parallaxe dynamique d'une étoile double ne peut jamais être considérée comme sa parallaxe la plus probable. L'emploi des parallaxes dynamiques est soumis à certaines restrictions qu'on a essayé de préciser.

⁽¹⁾ Ceci a été effectué pour certains couples dans le *Catalogue of double stars* de Greenwich (1921). Suivant la rapidité du mouvement un plus ou moins grand nombre de lieux normaux est donné.

APPENDICE I.

Données relatives à 183 couples dont l'orbite est inconnue.

β G. C.	ω.	σ.	10° θ'.	β G. C.	ω.	σ.	10° θ'.
2740...	0,155	0,242	1,29	2977...	0,577	0,662	3,05
151...	5,05	29,9	0,266	3474...	0,282	0,998	4,13
260...	0,613	0,526	0,872	3625...	1,29	6,17	0,548
479...	0,251	1,07	5,39	3678...	0,523	1,17	1,55
489...	0,406	0,275	5,81	3692...	0,474	1,00	0,341
541...	0,567	9,35	1,59	3876...	0,246	6,07	0,705
600...	0,492	0,261	2,41	3949...	1,20	3,80	0,747
614...	1,39	10,2	0,973	3970...	0,385	6,66	0,264
711...	0,0638	9,59	0,782	4098...	0,145	2,46	0,929
1061...	1,01	2,80	0,467	4193...	1,79	11,8	0,424
1074...	1,12	2,71	0,866	4211...	5,45	58,4	0,145
1149...	0,341	11,8	0,0917	4402...	0,863	5,48	0,429
1164...	0,904	8,55	0,626	4406...	0,00370	1,07	1,92
1212...	0,741	7,76	0,705	4452...	0,637	0,152	0,690
1235...	0,354	7,13	1,01	4531...	3,51	55,3	0,262
1365...	0,716	0,696	1,66	4570...	0,0908	1,07	1,92
1386...	0,673	2,18	0,346	4714...	1,00	1,85	5,51
1427...	4,80	46,3	0,215	4771 AB,C	0,040	2,45	0,968
1490...	8,39	333	0,0344	4815...	1,96	3,02	0,317
1512...	4,34	33,1	0,324	4828...	1,90	6,51	1,05
1568...	0,744	1,70	0,831	4866...	2,45	20,1	0,192
1594...	1,62	24,3	0,285	4890...	0,882	2,60	0,336
1623...	0,297	1,27	1,73	4972...	0,685	1,02	0,438
1639...	0,977	2,51	1,91	5030...	0,212	2,19	0,543
1747...	0,772	0,729	2,33	5071...	1,84	12,7	0,317
1774...	2,06	1,89	1,00	5094...	1,63	1,00	0,144
1799...	0,829	0,212	0,348	5233...	0,799	1,00	0,465
1900...	11,0	433	0,263	5331 BC	3,30	4,82	0,385
1952...	0,093	0,957	1,43	5365...	0,837	0,722	1,21
2007...	1,75	2,65	1,08	5385...	0,401	1,68	0,983
2027...	1,44	1,48	0,971	5388...	1,50	1,07	0,373
2041...	0,455	4,72	0,434	5409...	0,465	1,85	2,00
2161...	0,536	1,41	0,640	5421...	1,64	4,83	0,574
2270...	0,711	2,53	0,537	5448...	0,495	1,00	0,444
2272...	1,10	0,621	0,439	5508...	1,69	4,46	0,779
2445...	0,376	1,00	0,779	5515...	0,126	1,46	2,29
2446...	0,498	1,00	0,445	5527...	0,463	0,426	0,544
2464...	1,24	3,89	0,687	5633...	1,37	9,27	0,348
2535...	0,185	0,851	2,75	5652...	0,701	0,156	6,95
2609...	1,13	1,15	0,586	5659...	0,486	1,49	0,320
2657...	0,466	2,22	0,955	5707...	0,733	12,5	0,354
2780...	1,42	0,448	6,30	5765...	0,602	3,32	1,18
2845...	0,280	1,03	1,59	5841...	2,87	3,47	0,709

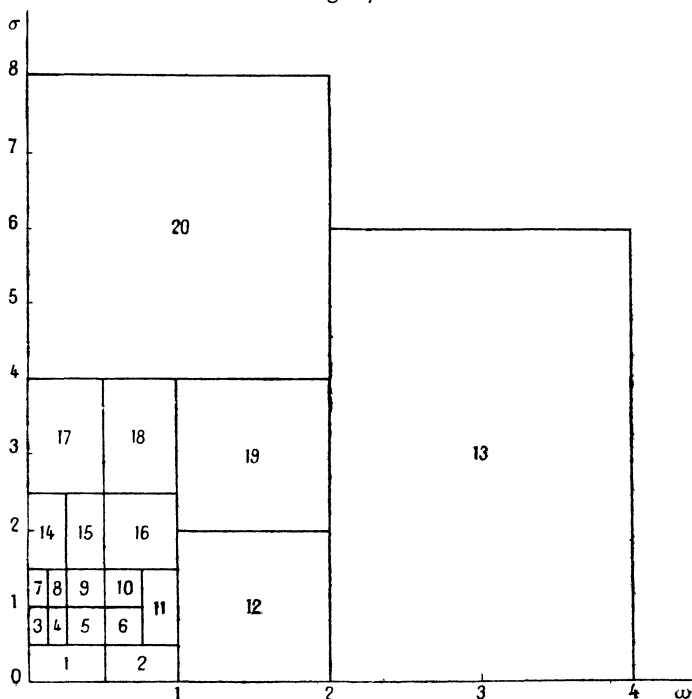
β G. C.	ω .	σ .	$10^2 \theta'$.	β G. C.	ω .	σ .	$10^2 \theta'$.
5848...	0,914	1,99	4,11	8548...	0,368	1,06	2,08
5859...	1,34	3,14	0,886	8659...	0,579	2,37	1,22
5926...	0,777	2,54	1,87	8662...	1,76	3,72	0,714
6046...	2,44	57,9	0,0788	8663...	1,01	5,06	0,947
6053...	0,701	2,96	0,476	8751...	4,76	28,1	0,131
6090...	0,607	2,91	0,187	8759...	1,80	2,86	1,77
6094...	0,246	5,55	0,971	8785...	0,177	0,634	0,723
6097...	1,59	8,01	0,353	8798...	1,15	4,19	0,423
6185...	0,659	1,26	1,41	8986...	0,771	3,56	0,556
6296...	0,144	1,16	1,37	8993...	0,828	0,709	3,64
6415...	4,08	14,9	0,318	9043...	0,281	0,367	1,53
6442...	5,21	19,3	0,473	9114...	0,307	2,53	0,382
6494...	1,26	2,67	0,436	9137...	1,01	9,23	0,157
6530...	0,574	1,51	1,33	9313...	0,477	0,293	1,34
6619...	0,466	0,727	1,04	9381...	0,451	1,63	0,960
6668...	0,617	0,452	0,532	9500...	0,469	2,24	1,04
6764...	0,241	1,16	1,65	9602...	0,898	4,11	0,737
6776...	0,262	1,63	0,782	9833...	1,05	2,47	0,660
6780...	0,000	2,20	1,60	10504...	1,57	6,68	0,166
6972...	0,378	4,48	9,33	10533...	0,254	1,65	1,64
6993...	0,482	3,87	0,210	10607...	0,734	4,05	1,80
6997...	0,569	0,334	0,842	10643...	1,70	236	0,245
7013...	1,55	3,57	0,801	10709...	0,710	34,6	0,634
7044...	0,624	0,627	1,62	10732...	0,544	0,789	0,877
7049...	1,94	5,01	1,14	10749...	0,605	1,36	1,24
7060...	1,18	1,17	0,481	10880...	7,74	70,0	0,359
7214...	0,597	0,953	2,38	10881...	2,99	19,9	0,647
7317...	6,77	65,0	0,0942	10922...	0,588	0,069	0,560
7318...	1,55	14,1	0,273	11214...	6,55	14,2	0,210
7375...	4,03	0,124	0,270	11267...	0,538	0,848	0,569
7477...	0,540	1,50	0,917	11346...	1,24	2,46	0,859
7551...	0,538	3,88	0,439	11483...	1,67	6,13	0,161
7634...	1,38	17,6	0,163	11690...	28,1	1840	0,0306
7726...	0,101	0,462	8,75	11715...	3,40	1,00	0,156
7778...	1,16	0,781	0,945	11743...	0,261	1,77	0,919
7779...	0,591	3,19	1,01	11763...	1,82	1,34	1,54
7834...	3,48	15,4	0,525	11908...	0,0570	3,41	1,02
7837...	0,0208	2,11	0,627	11943...	0,966	0,112	1,93
7878...	0,222	0,687	1,63	11968...	1,05	0,653	0,350
7885...	0,962	1,79	2,43	12036...	0,296	2,48	1,66
7905...	0,231	0,666	0,837	12094...	0,411	0,0390	1,42
7936...	1,53	5,42	2,48	12125...	1,02	1,34	2,36
8118...	0,247	1,00	0,740	12196...	0,0204	16,9	1,87
8153...	0,671	3,40	0,392	12257...	5,54	26,0	0,590
8163...	0,500	3,69	0,572	12317...	0,701	1,46	0,382
8186...	0,642	0,762	0,957	12639...	0,837	2,49	0,445
8210...	0,665	1,00	0,688	12675...	1,02	1,96	0,607
8320...	4,40	57,7	0,138	12709...	0,818	3,91	1,04
8433...	5,62	73,7	0,242				

APPENDICE II.

Décomposition du plan (ω , σ) en 25 aires élémentaires.

Les figures 17 et 18 font connaître les limites des aires n^{os} 1 à 24. Les dimensions de l'aire 25 sont trop considérables pour qu'on ait

Fig. 17.

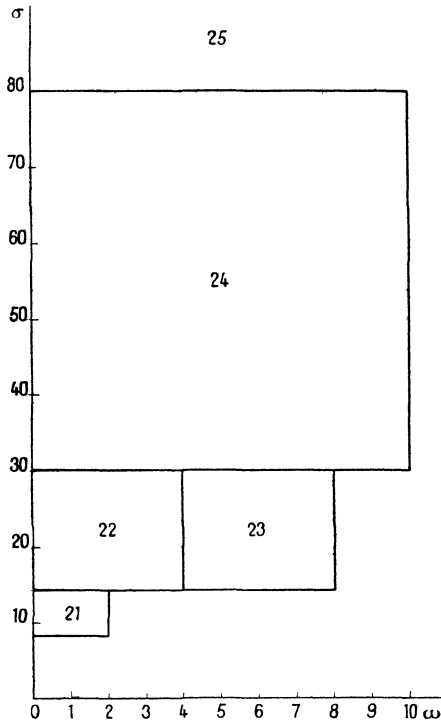


pu la représenter entièrement. Elle s'étend de $\omega = 0$ à $\omega = 20$ et de $\sigma = 80$ à $\sigma = 580$.

Les échelles n'ont pas été prises égales pour les abscisses et les ordonnées.

On trouve dans le tableau les coordonnées des centres de chaque

Fig. 18.



aire, leur surface et le nombre de couples qui s'y rencontrent.

Aire n°.	ω.	σ.	S.	N.	Aire n°.	ω.	σ.	S.	N.
1.....	0,25	0,25	0,25	7	14.....	0,125	2,00	0,25	3
2.....	0,75	0,25	0,25	7	15.....	0,375	2,00	0,25	9
3.....	0,0625	0,75	0,0625	1,5	16.....	0,750	2,00	0,50	8
4.....	0,1875	0,75	0,0625	7	17.....	0,25	3,25	0,75	3,5
5.....	0,375	0,75	0,125	4	18.....	0,75	3,25	0,75	12,5
6.....	0,625	0,75	0,125	8,5	19.....	1,50	3,00	1,50	13
7.....	0,0625	1,25	0,0625	2,5	20.....	1,00	6,00	8,00	20
8.....	0,1875	1,25	0,0625	3	21.....	1,00	11,0	12,0	11
9.....	0,375	1,25	0,125	7	22.....	2,00	22,0	64,0	7
10.....	0,625	1,25	0,125	7	23.....	6,00	22,0	64,0	6
11.....	0,875	1,00	0,25	4	24.....	5,00	55	500	10
12.....	1,50	1,00	2,00	12,5	25.....	10,00	350	10000	4
13.....	3,00	3,00	12,00	5					

APPENDICE III.

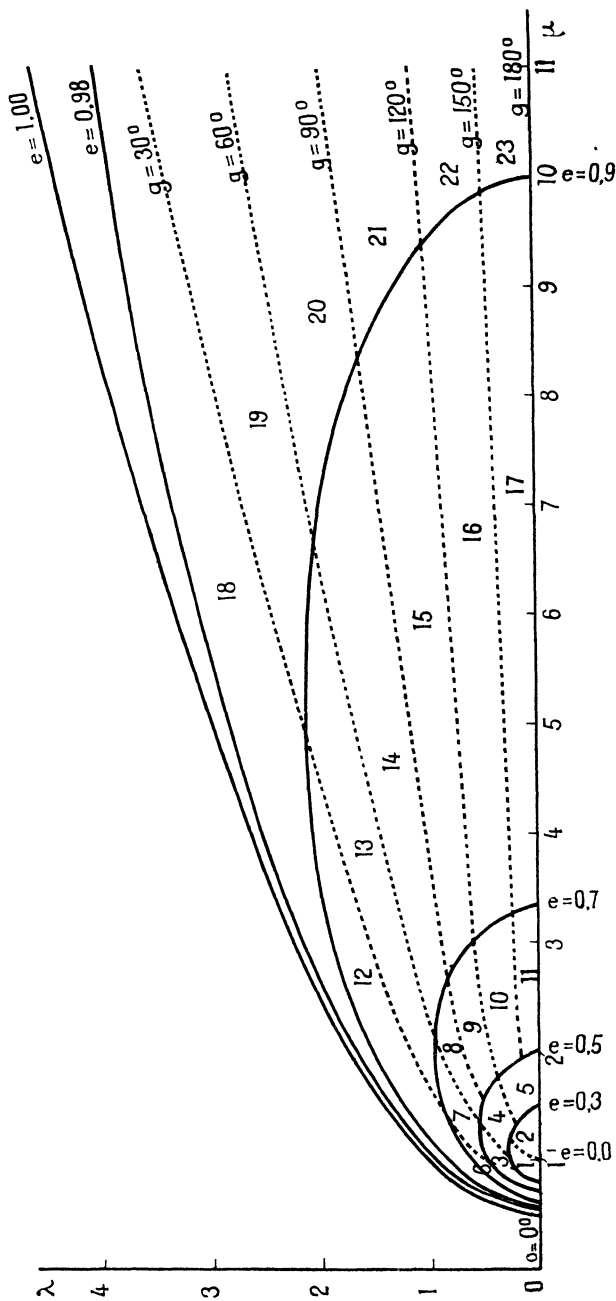
Décomposition du Domaine D ($\lambda > 0$, $\lambda^2 - 2\mu + 1 < 0$) en 23 aires élémentaires.

La figure 19 montre comment cette décomposition est effectuée. On n'a pas tracé entièrement l'ellipse correspondant à $e = 0,98$. Elle rencontre l'axe des μ au point $\mu = 55,5$.

Le tableau suivant donne les coordonnées des centres des différentes aires ainsi que leurs surfaces.

Aire n°	e .	g .	λ .	μ .	s .
1.....	0,15	45 ⁰	0,1191	0,9280	0,0679
2.....	0,15	135	0,0965	1,141	0,0835
3.....	0,40	30	0,3173	0,8633	0,0939
4.....	0,40	90	0,4063	1,363	0,148
5.....	0,40	150	0,1604	1,633	0,178
6.....	0,60	15	0,4241	0,7891	0,0969
7.....	0,60	45	0,7352	1,379	0,169
8.....	0,60	75	0,7141	1,847	0,227
9.....	0,60	105	0,5662	2,176	0,267
10.....	0,60	135	0,3585	2,385	0,293
11.....	0,60	165	0,1223	2,487	0,305
12.....	0,80	15	1,025	1,356	0,526
13.....	0,80	45	1,333	2,810	1,09
14.....	0,80	75	1,197	3,757	1,46
15.....	0,80	105	0,9174	4,391	1,70
16.....	0,80	135	0,5712	4,786	1,85
17.....	0,80	165	0,1936	4,977	1,93
18.....	0,94	15	2,454	4,923	4,88
19.....	0,04	45	2,726	9,756	9,68
20.....	0,94	75	2,359	12,76	12,7
21.....	0,94	105	1,779	14,76	14,6
22.....	0,94	135	1,099	16,00	15,9
23.....	0,94	165	0,3715	16,59	16,5

Fig. 19.



APPENDICE IV.

Table de la fonction $g(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$.

Aires (ω, σ).	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Aires (λ, μ).									
1.....	1, 19	0, 431	3, 59	2, 86	1, 18	0, 518	2, 04	1, 84	0, 842
2.....	0, 989	0, 352	2, 25	1, 70	0, 951	0, 436	4, 68	2, 93	0, 819
3.....	1, 26	0, 510	8, 34	7, 36	2, 67	0, 796	0, 707	0, 813	1, 02
4.....	0, 727	0, 314	0, 906	0, 987	0, 934	0, 509	0, 685	0, 950	3, 19
5.....	0, 611	0, 250	1, 03	0, 902	0, 608	0, 325	1, 69	1, 58	0, 719
6.....	1, 38	0, 574	1, 10	1, 52	3, 41	1, 34	0, 440	0, 489	0, 657
7.....	0, 653	0, 351	0, 371	0, 518	0, 721	0, 800	0, 263	0, 300	0, 475
8.....	0, 488	0, 248	0, 425	0, 459	0, 527	0, 440	0, 293	0, 339	0, 537
9.....	0, 426	0, 199	0, 434	0, 468	0, 447	0, 310	0, 395	0, 449	0, 627
10.....	0, 397	0, 174	0, 419	0, 490	0, 393	0, 230	0, 569	0, 590	0, 498
11.....	0, 384	0, 164	0, 557	0, 498	0, 364	0, 212	0, 746	0, 630	0, 402
12.....	0, 576	0, 408	0, 266	0, 296	0, 411	0, 731	0, 147	0, 226	0, 198
13.....	0, 275	0, 180	0, 175	0, 175	0, 213	0, 261	0, 0913	0, 109	0, 143
14.....	0, 220	0, 125	0, 168	0, 176	0, 192	0, 185	0, 120	0, 131	0, 164
15.....	0, 199	0, 100	0, 191	0, 191	0, 183	0, 143	0, 161	0, 170	0, 208
16.....	0, 189	0, 0875	0, 215	0, 206	0, 174	0, 118	0, 214	0, 211	0, 187
17.....	0, 184	0, 0821	0, 230	0, 213	0, 175	0, 106	0, 257	0, 234	0, 178
18.....	0, 125	0, 109	0, 0537	0, 0595	0, 0702	1, 41	0, 0294	0, 0314	0, 0397
19.....	0, 0724	0, 0521	0, 0355	0, 0453	0, 0495	0, 0593	0, 0262	0, 0281	0, 0342
20.....	0, 0646	0, 0368	0, 0451	0, 0465	0, 0491	0, 0478	0, 0328	0, 0347	0, 0400
21.....	0, 0568	0, 0299	0, 0515	0, 0512	0, 0486	0, 0399	0, 0433	0, 0441	0, 0456
22.....	0, 0544	0, 0262	0, 0579	0, 0555	0, 0482	0, 0344	0, 0550	0, 0535	0, 0479
23.....	0, 0543	0, 0249	0, 0599	0, 0580	0, 0478	0, 0321	0, 0631	0, 0593	0, 0490

APPENDICE IV (*suite*).

Table de la fonction $g(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$ (*suite*).

Aires (ω, σ).	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
Aires (λ, μ).				$\times 10^{-2}$				
1.....	0,381	0,243	0,0623	0,666	0,382	0,303	0,165	0,0959
2.....	0,359	0,214	0,107	0,575	0,574	0,384	0,172	0,147
3.....	0,592	0,430	0,0882	0,808	0,238	0,249	0,196	0,0704
4.....	0,698	0,272	0,0667	0,644	0,330	0,522	0,336	0,120
5.....	0,312	0,141	0,0486	0,470	1,28	0,436	0,180	0,239
6.....	0,697	0,472	0,109	0,972	0,167	0,184	0,189	0,0603
7.....	3,18	2,56	0,104	0,994	0,130	0,187	0,463	0,0561
8.....	0,852	0,312	0,0687	1,89	0,167	0,270	1,98	0,0677
9.....	0,428	0,193	0,0486	0,495	0,275	0,646	0,488	0,142
10.....	0,268	0,140	0,0381	0,386	0,585	2,61	0,208	0,340
11.....	0,209	0,118	0,0331	0,334	2,26	0,440	0,140	1,14
12.....	0,391	1,37	0,184	1,72	0,0654	0,0817	0,163	0,0286
13.....	0,236	0,279	0,0810	0,989	0,0556	0,0746	0,185	0,0280
14.....	0,212	0,167	0,0437	0,491	0,0774	0,110	0,259	0,0449
15.....	0,169	0,102	0,0281	0,312	0,124	0,175	0,200	0,0881
16.....	0,129	0,0745	0,0204	0,222	0,207	0,183	0,115	0,219
17.....	0,107	0,0629	0,0180	0,189	0,293	0,194	0,0808	0,345
18.....	0,0593	0,113	0,0126	1,74	0,0153	0,0192	0,0360	0,00742
19.....	0,0477	0,0610	0,0278	0,452	0,0155	0,0200	0,0378	0,00852
20.....	0,0467	0,0417	0,0145	0,197	0,0223	0,0285	0,0449	0,0142
21.....	0,0423	0,0298	0,00913	0,110	0,0342	0,0409	0,0419	0,0260
22.....	0,0360	0,0226	0,00687	0,0731	0,0504	0,0480	0,0320	0,0456
23.....	0,0312	0,0195	0,00569	0,0605	0,0635	0,0494	0,0253	0,0607

APPENDICE IV' (*fin*).

Table de la fonction $g(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$ (*fin*).

Aires (ω, σ).	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.
Aires (λ, μ).				$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-4}$
1.....	0,0757	0,0349	0,0209	0,0687	0,142	0,304	0,156	0,0479
2.....	0,0869	0,0339	0,0247	0,0824	0,165	0,292	0,170	0,0684
3.....	0,0727	0,0426	0,0183	0,0586	0,132	0,364	0,160	0,0437
4.....	0,125	0,0478	0,0298	0,0863	0,189	0,356	0,197	0,0649
5.....	0,119	0,0323	0,0310	0,111	0,208	0,253	0,188	0,0631
6.....	0,0624	0,0478	0,0166	0,0480	0,114	0,429	0,155	0,0423
7.....	0,0966	0,0971	0,0232	0,0579	0,158	0,602	0,255	0,0624
8.....	0,174	0,0829	0,0369	0,0861	0,235	0,484	0,313	0,0840
9.....	0,316	0,0508	0,0518	0,128	0,280	0,341	0,291	0,0914
10.....	0,179	0,0328	0,0619	0,155	0,282	0,240	0,232	0,0828
11.....	0,108	0,0257	0,0356	0,161	0,210	0,200	0,187	0,0718
12.....	0,0457	0,139	0,0132	0,0330	0,101	1,01	0,218	0,0454
13.....	0,0615	0,362	0,0201	0,0446	0,164	1,05	0,458	0,0852
14.....	0,140	0,112	0,0492	0,0912	0,344	0,542	0,664	0,150
15.....	0,545	0,0432	0,305	0,223	0,590	0,277	0,492	0,177
16.....	0,158	0,0229	0,0847	0,360	0,480	0,162	0,266	0,117
17.....	0,0549	0,0162	0,0349	0,212	0,291	0,123	0,165	0,0746
18.....	0,0135	0,0900	0,00487	0,0118	0,0471	4,42	0,220	0,0303
19.....	0,0182	0,0744	0,00820	0,0191	0,103	11,6	0,854	0,0895
20.....	0,0320	0,0363	0,0210	0,0513	0,396	0,376	2,73	0,369
21.....	0,0450	0,0160	0,0529	0,198	4,90	0,123	0,852	0,544
22.....	0,0369	0,00830	0,0343	1,22	0,841	0,0622	0,200	0,159
3.....	0,0256	0,00563	0,0153	0,153	0,208	0,0440	0,0807	0,0474

APPENDICE V.

Tables des intégrales J_1 et J_2 .

1° Table de J_1 .

k^2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
J_1	0,667	0,589	0,514	0,443	0,375	0,314	0,255	0,201	0,154
k^2	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	
J_1	0,113	0,080	0,023	0,0128	0,0083	0,0055	0,0031	0,0021	

2° Table de J_2 .

ω .	σ .	J_2 .	ω .	σ .	J_2 .
0	0,125	0,97	1,73	2,00	1,29
0	0,50	1,40	2,0	1,00	0,129
0	1,0	1,72	2,0	2,50	1,32
0	2,0	2,14	2,0	3,00	1,68
0	4,0	2,43	2,0	5,00	2,26
0	6,0	2,56	2,0	12,0	2,58
0	10,0	2,69	2,24	3,0	1,34
0	50,0	2,94	2,65	4,0	1,37
0	100,0	3,05	3,0	1,0	0,027
0	500,0	3,08	3,0	2,0	0,099
0,25	0,25	0,238	3,0	3,0	0,237
0,25	0,75	1,35	3,0	5,0	1,39
0,50	1,50	1,89	3,0	6,0	1,84
0,50	2,00	2,07	4,0	2,83	0,055
0,50	10,0	2,69	4,0	24,0	2,57
0,75	0,25	0,114	4,36	10,0	1,44
0,75	0,75	0,871	5,0	14,0	1,76
1,0	0,50	0,251	6,0	2,0	0,00438
1,0	1,0	1,18	6,0	6,0	0,0340
1,0	1,50	1,70	6,0	12,0	0,179
1,0	2,0	1,96	7,0	25,0	1,52
1,0	3,0	2,14	8,0	50,0	2,49
1,0	6,0	2,49	12,0	4,0	0,00067
1,41	1,50	1,25	12,0	24,0	0,0176
1,50	0,50	0,100	14,10	100,0	1,53
1,50	1,50	0,844	31,61	500	1,55

APPENDICE VI.

**Excentricités et périodes hypothétiques de 183 couples
dont l'orbite est inconnue.**

β G. C.	ε^2 .	$\overline{e^2}$.	$\overline{\log P}$.	β G. C.	ε^2 .	$\overline{e^2}$.	$\overline{\log P}$.
12740.....	0,82	0,77	3,01	2977.....	0,75	0,67	2,42
151.....	0,97	0,96	2,65	3474.....	0,43	0,09	2,19
260.....	0,79	0,73	3,01	3625.....	0,70	0,58	2,67
479.....	0,41	0,06	2,07	2678.....	0,50	0,20	2,59
489.....	0,85	0,82	2,33	3692.....	0,56	0,30	3,28
541.....	0,71	0,60	2,12	3876.....	0,60	0,38	2,57
600.....	0,81	0,76	2,72	3949.....	0,61	0,40	2,65
614.....	0,77	0,70	2,32	3970.....	0,65	0,48	2,98
711.....	0,71	0,60	2,43	4098.....	0,44	0,11	2,64
1061.....	0,58	0,34	2,92	4193.....	0,77	0,70	2,64
1074.....	0,60	0,38	2,65	4211.....	0,94	0,93	2,77
1149.....	0,72	0,62	3,31	4402.....	0,62	0,42	2,81
1164.....	0,70	0,58	2,54	4406.....	0,36	0,01	2,52
1212.....	0,67	0,52	2,52	4452.....	0,90	0,88	3,38
1235.....	0,66	0,50	2,38	4531.....	0,85	0,82	2,52
1365.....	0,73	0,63	2,67	4570.....	0,36	0,01	2,52
1386.....	0,50	0,20	3,10	4714.....	0,60	0,38	1,94
1427.....	0,94	0,93	2,65	4771 AB,C	0,44	0,11	2,63
1490.....	0,96	0,95	3,01	4815.....	0,82	0,78	3,07
1512.....	0,92	0,90	2,54	4828.....	0,75	0,67	2,38
1568.....	0,51	0,22	2,77	4866.....	0,85	0,82	2,88
1594.....	0,78	0,72	2,67	4890.....	0,57	0,32	3,07
1623.....	0,40	0,05	2,52	4972.....	0,60	0,38	3,17
1639.....	0,58	0,34	2,33	5030.....	0,41	0,06	2,91
1747.....	0,73	0,63	2,51	5071.....	0,77	0,70	2,76
1774.....	0,81	0,76	2,67	5094.....	0,78	0,72	3,65
1799.....	0,81	0,76	3,61	5233.....	0,70	0,58	3,14
1900.....	0,97	0,96	2,07	5331 BC..	0,88	0,86	2,88
1952.....	0,39	0,04	2,66	5365.....	0,79	0,73	2,80
2007.....	0,80	0,75	2,57	5385.....	0,45	0,12	2,71
2027.....	0,80	0,75	2,73	5388.....	0,78	0,73	2,23
2041.....	0,56	0,30	2,83	5409.....	0,47	0,15	2,38
2161.....	0,49	0,18	2,93	5421.....	0,72	0,62	2,71
2270.....	0,52	0,23	2,88	5448.....	0,59	0,36	3,16
2272.....	0,77	0,70	3,27	5508.....	0,72	0,62	2,60
2445.....	0,58	0,34	2,92	5515.....	0,38	0,03	2,37
2446.....	0,60	0,38	3,16	5527.....	0,79	0,73	3,26
2464.....	0,62	0,42	2,68	5633.....	0,74	0,65	2,79
2535.....	0,50	0,20	2,41	5652.....	0,90	0,88	2,37
2609.....	0,77	0,70	3,01	5659.....	0,48	0,17	3,21
2657.....	0,47	0,15	2,66	5707.....	0,75	0,67	2,71
2780.....	0,78	0,72	2,18	5765.....	0,51	0,22	2,48
2845.....	0,43	0,09	2,60	5841.....	0,84	0,81	2,69

β G. C.	ε^2	$\overline{\varepsilon^2}$	$\overline{\log P}$	β G. C.	ε^2	$\overline{\varepsilon^2}$	$\overline{\log P}$
5848.....	0,59	0,36	2,05	8548.....	0,50	0,20	2,48
5859.....	0,67	0,52	2,61	8659.....	0,49	0,18	2,53
5926.....	0,56	0,30	2,34	8662.....	0,77	0,70	2,67
6046.....	0,87	0,84	3,03	8663.....	0,62	0,42	2,48
6053.....	0,50	0,20	2,89	8751.....	0,96	0,95	2,97
6090.....	0,50	0,20	3,31	8759.....	0,80	0,75	2,33
6094.....	0,59	0,36	2,45	8785.....	0,69	0,56	3,05
6097.....	0,73	0,63	2,81	8798.....	0,61	0,40	2,87
6185.....	0,57	0,32	2,61	8986.....	0,56	0,30	2,78
6296.....	0,38	0,03	2,64	8993.....	0,76	0,69	2,32
6415.....	0,88	0,86	2,72	9043.....	0,85	0,82	2,85
6442.....	0,91	0,89	2,50	9114.....	0,47	0,15	3,03
6494.....	0,65	0,48	2,96	9137.....	0,71	0,60	3,13
6530.....	0,49	0,18	2,60	9313.....	0,81	0,76	2,95
6619.....	0,80	0,75	2,86	9381.....	0,46	0,14	2,71
6668.....	0,80	0,75	3,25	9500.....	0,48	0,17	2,61
6764.....	0,41	0,06	2,56	9602.....	0,60	0,38	2,63
6776.....	0,40	0,05	2,81	9833.....	0,60	0,38	2,79
6780.....	0,42	0,08	2,44	10504.....	0,71	0,60	3,18
6972.....	0,56	0,30	1,51	10533.....	0,40	0,05	2,49
6993.....	0,53	0,25	3,19	10607.....	0,56	0,28	2,25
6997.....	0,80	0,75	3,12	10643.....	0,90	0,88	2,24
7013.....	0,70	0,58	2,63	10709.....	0,80	0,75	2,24
7044.....	0,76	0,69	2,70	10732.....	0,70	0,58	2,92
7049.....	0,75	0,67	2,40	10749.....	0,52	0,23	2,65
7060.....	0,78	0,72	3,10	10880.....	0,97	0,96	2,33
7214.....	0,62	0,42	2,44	10881.....	0,92	0,90	2,35
7317.....	0,95	0,94	2,93	10922.....	0,98	0,98	3,64
7318.....	0,77	0,70	2,80	11214.....	0,96	0,95	2,91
7375.....	0,95	0,94	3,83	11267.....	0,65	0,48	3,09
7477.....	0,49	0,18	2,76	11346.....	0,63	0,44	2,68
7551.....	0,54	0,26	2,88	11483.....	0,72	0,62	3,21
7634.....	0,77	0,70	2,98	11690.....	0,99	0,99	2,69
7726.....	0,73	0,63	2,04	11715.....	0,77	0,70	3,62
7778.....	0,75	0,67	2,88	11743.....	0,41	0,06	2,73
7779.....	0,50	0,20	2,56	11763.....	0,78	0,72	2,56
7834.....	0,83	0,79	2,50	11908.....	0,49	0,18	2,53
7837.....	0,41	0,06	2,69	11943.....	0,95	0,94	3,00
7878.....	0,65	0,48	2,68	11968.....	0,78	0,72	3,36
7885.....	0,59	0,36	2,29	12036.....	0,45	0,12	2,39
7905.....	0,63	0,44	2,98	12094.....	0,95	0,94	3,36
7936.....	0,70	0,58	2,05	12125.....	0,67	0,52	2,38
8118.....	0,43	0,09	2,94	12196.....	0,76	0,69	1,93
8153.....	0,54	0,26	2,95	12257.....	0,96	0,95	2,33
8163.....	0,52	0,23	2,77	12317.....	0,53	0,25	3,15
8186.....	0,75	0,67	2,91	12639.....	0,55	0,28	2,96
8210.....	0,62	0,42	2,97	12675.....	0,59	0,36	2,88
8320.....	0,92	0,90	2,79	12709.....	0,57	0,32	2,49
8433.....	0,94	0,93	3,12				

APPENDICE VII.

Coordonnées des étoiles doubles ayant une inclinaison voisine de 90° et coordonnées des pôles de leurs orbites.

λ , β longitude et latitude galactique de l'étoile.

λ_0 , β_0 longitude et latitude du pôle de son orbite.

β G.C.	λ .	β .	λ_0 .	β_0 .	β G.C.	λ .	β .	λ_0 .	β_0 .
102.....	85 ⁰	— 9 ⁰	30 ⁰	— 10 ⁰	5187.....	201 ⁰	+40 ⁰	31 ⁰	+53 ⁰
110.....	88	+ 4	80	—40	5304.....	143	+49	321	— 9
191.....	84	—31	345	+ 7	5322.....	104	+38	344	+24
420.....	88	—65	351	— 4	5714.....	145	+67	327	—31
422.....	90	—12	328	+14	5735.....	155	+68	12	+49
425.....	89	—38	346	0	5772.....	234	+53	82	+25
447.....	91	—22	273	+14	5815.....	236	+55	48	+31
518.....	93	—58	64	+19	5988.....	107	+61	353	0
520.....	91	—19	10	+ 1	6134.....	166	+84	313	—43
612.....	95	—40	287	— 5	6261.....	268	+60	11	+ 6
797.....	94	+ 6	11	—16	6573.....	74	+64	24	+33
877.....	131	—69	85	+38	6852.....	332	+63	31	— 4
956.....	104	—32	339	— 9	7014.....	3	+64	311	—60
986.....	102	—17	282	+17	7031.....	51	+57	354	—69
993.....	111	—41	8	—15	7322.....	24	+54	273	—71
998.....	98	— 1	320	+18	7491.....	40	+47	287	— 1
1056.....	112	—36	311	—12	7534.....	40	+45	312	+24
1159.....	112	—30	78	— 8	7631.....	319	+16	290	— 9
1374.....	126	—37	307	—21	7676.....	353	+34	70	+11
1530.....	121	—23	26	—28	7712.....	17	+39	310	—79
1605.....	119	—16	327	—15	7814.....	2	+32	76	+55
1664.....	132	—32	87	0	8134.....	356	+16	79	— 3
1788.....	104	+10	300	+37	8150.....	348	+12	274	—20
2108.....	161	—34	42	—35	8263.....	35	+27	57	—44
2210.....	136	—13	74	—31	8759.....	65	+25	37	—23
2220.....	119	+ 3	25	+13	9411.....	53	+15	31	+22
2396.....	109	+16	284	+49	9586.....	25	— 2	66	+27
3028.....	157	— 3	346	—67	9808.....	50	+ 8	352	+54
3090.....	142	+ 6	352	—60	9818.....	18	—12	296	+50
3253.....	177	— 8	314	+41	10994.....	82	+20	32	—30
3670.....	135	+21	343	—52	11462.....	40	—34	75	+20
3849.....	167	+11	280	+67	11464.....	42	—32	332	+35
4399.....	162	+27	301	—15	11475.....	32	—40	3	+45
4724.....	205	+19	56	+45	11699.....	35	—44	313	+13
4723.....	138	+38	306	+80	12090.....	49	—45	331	+19
4798.....	155	+38	322	+52	12378.....	59	—41	1	+21
4867.....	211	+18	322	+48	12517.....	70	—41	304	+ 4

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I. — Fonction de répartition des excentricités et des anomalies moyennes. L'équation du problème.....	6
CHAPITRE II. — Fonction de répartition des excentricités et des anomalies moyennes (<i>suite</i>). Résolution de l'équation.....	15
CHAPITRE III. — Les excentricités hypothétiques.....	26
CHAPITRE IV. — Les périodes hypothétiques.....	39
CHAPITRE V. — Répartition sur la sphère céleste des pôles des orbites des étoiles doubles.....	48
CHAPITRE VI. — Les parallaxes dynamiques. Leurs conditions d'emploi....	58
CONCLUSION.....	68
APPENDICE I. — Données relatives à 183 couples dont l'orbite est inconnue..	70
APPENDICE II. — Décomposition du plan (ω , σ) en 25 aires élémentaires....	72
APPENDICE III. — Décomposition du domaine $D(\lambda > 0, \lambda^2 - 2\mu + 1 < 0)$ en 23 aires élémentaires.....	74
APPENDICE IV. — Table de la fonction $g(\lambda, \mu, \omega, \sigma)$	76
APPENDICE V. — Tables des intégrales J_1 et J_2	79
APPENDICE VI. — Excentricités et périodes hypothétiques de 183 couples dont l'orbite est inconnue.....	80
APPENDICE VII. — Coordonnées des étoiles doubles ayant une inclinaison voisine de 90° et coordonnées des pôles de leurs orbites.....	82

Vu et approuvé :

Paris, le 7 septembre 1933.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 9 septembre 1933.

POUR LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L'INSPECTEUR D'ACADÉMIE,

BENAERST.