THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

D. V. JONESCO

Sur une classe d'équations fonctionnelles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1927

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1927__71__3_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

A mon cher cacique Dubreil
souvenir de notre séjour à
l'école et témoignage d'une
grande amitié
Shmuel Pollard

N° D'ORDRE :
1938

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. D. V. JONESCO

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

BIBLIOTHÈQUE
Mathématiques
Recherche
CENTRE INTERUNIVERSITAIRE JUSSIEU - St-CHARLES

1re THÈSE. — SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **1927, devant la Commission d'examen.**

MM. E. GOURSAT, *Président.*
E. CARTAN, E. VESSIOT, *Examinateurs.*

TOULOUSE
IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT
Librairie de l'Université.
14, RUE DES ARTS, 14 (SQUARE DU MUSÉE, TOULOUSE)

1927

A MONSIEUR E. GOURSAT

MEMBRE DE L'INSTITUT

Hommage de respectueuse gratitude.

A MONSIEUR E. VESSIOT

SOUS-DIRECTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

A MONSIEUR E. CARTAN

PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE A LA SORBONNE

Respectueux hommage.

A LA MÉMOIRE DE G. NICOLAEVICI

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE THÈSE

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR

M. D. V. JONESCO

Élève de l'École Normale Supérieure.

INTRODUCTION

Considérons l'équation aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = az + b\frac{\partial z}{\partial x} + c\frac{\partial z}{\partial y} + f, \tag{1}$$

où a, b, c, f sont des fonctions continues dans le rectangle R construit sur les segments OA et OB portés sur les axes Ox et Oy.

Une intégrale de l'équation (1) est dite régulière dans le rectangle R, lorsqu'elle est continue dans R ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre.

Darboux(1) et ensuite M. Picard(2) ont démontré l'existence d'une intégrale régulière de l'équation (1) se réduisant à une fonction connue $\varphi(x)$ le long du segment OA et à une autre fonction $\psi(y)$ le long du segment OB (On suppose $\varphi(0) = \psi(0)$).

M. Picard(3) a démontré l'existence d'une intégrale régulière de l'équation (1) satisfaisant aux conditions de Cauchy, relativement à un arc de courbe IJ situé entièrement dans le rectangle R et qui n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à l'axe Ox ou à l'axe Oy.

---

(1) G. Darboux. *Théorie des surfaces*, tome II, chapitre IV, 1889. Darboux supposait les données analytiques.

(2) E. Picard. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1890 et Note I du tome IV des leçons sur la théorie des surfaces de G. Darboux, 1896.

(3) E. Picard. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1890.

M. Picard(1) a démontré encore l'existence d'une intégrale régulière de l'équation (1) qui prend des valeurs données le long d'un segment OA de caractéristique et le long d'un arc de courbe OI issue du point O.

Dans plusieurs Mémoires des *Annales de la Faculté de Toulouse*, M. Goursat(2) s'est occupé de l'équation (1) et a démontré l'existence d'une intégrale régulière prenant des valeurs données le long des deux arcs de courbes issues d'un point O et qui se trouvent dans l'angle formé par les caractéristiques du point O.

On désigne ces problèmes par : le problème de Darboux-Picard, de Cauchy, de M. Picard et de M. Goursat.

Dans ce travail je m'occupe de l'équation fonctionnelle

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \varphi\left\{ a_1(x,y)\, z_{M_1} + b_1(x,y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_1} + c_1(x,y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_1} + a_2(x,y)\, z_{M_2} + b_2(x,y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_2} + c_2(x,y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_2}\right\} + f(x,y)$$

où

$$z_{M_h} = z(\omega_h, \pi_h), \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_h} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=\omega_h \\ y=\pi_h}}, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_h} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=\omega_h \\ y=\pi_h}} \quad (h = 1.2),$$

$\omega_1(x,y), \ldots, \pi_2(x,y)$ étant des fonctions continues de x et de y.

En faisant des hypothèses convenables — qu'on verra dans la suite de ce travail — sur la position des points M_1 et M_2 par rapport au point $M(x,y)$, j'ai pu démontrer l'existence d'une solution régulière de l'équation (2) satisfaisant aux conditions de Darboux-Picard, de Cauchy, de M. Picard et de M. Goursat.

Enfin j'ai remarqué que les mêmes problèmes s'étendent à des équations intégro-différentielles de la forme

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \int\int_{D_{xy}} \left[A(x,y;s,t)\, z(s,t) + B(x,y;s,t)\frac{\partial z}{\partial s} + C(x,y;s,t)\frac{\partial z}{\partial t}\right] ds\,dt + f(x,y),$$

qu'on peut regarder comme généralisant l'équation (2). D_{xy} est un domaine que nous faisons correspondre à tout point (x,y), d'une façon convenable.

Ce travail est divisé en cinq chapitres. Dans les quatre premiers j'étudie les pro-

---

(1) E. Picard. Note I du tome IV des leçons sur la théorie des surfaces de G. Darboux, 1896.

(2) E. Goursat. 2e série, tome V, p. 405-436; tome VI, p. 117-144; 3e série, tome I, p. 129-143.

blèmes de Darboux-Picard, de Cauchy, de M. Picard et de M. Goursat relativement à l'équation (2) et dans le dernier je démontre le problème de M. Goursat pour l'équation (3).

J'emploie pour la démonstration des théorèmes d'existence de la solution de l'équation (2) et (3), la méthode des approximations successives que M. E. Picard a magistralement exposé dans divers Mémoires déjà cités et dans ses cours à la Sorbonne.

J'ai été soutenu au cours de ce travail par les bons conseils de mon Maître M. E. Goursat. En terminant, qu'il me soit permis de lui témoigner ma profonde gratitude et lui présenter mes plus vifs remercîments.

Je tiens aussi à remercier M. E. Vessiot, pour le bienveillant accueil qu'il m'a réservé à l'École Normale Supérieure, et pour l'intérêt avec lequel il a suivi et guidé mes études dans cette École.

Enfin j'adresse mes remercîments les plus sincères à MM. Goursat et Hadamard qui ont bien voulu me présenter deux notes à l'Académie des Sciences(1) concernant ce travail.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 184, 1927, pp. 505, 665.

CHAPITRE PREMIER

Le problème de Darboux-Picard.

[1] Considérons la surface $z = z(x, y)$, et au point $M'(x, y, z)$ de cette surface, faisons correspondre les points M'_1 et M'_2 de coordonnées

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = \omega_1(x, y), & y_1 = \pi_1(x, y), & z_1 = z(x_1, y_1) \\ x_2 = \omega_2(x, y), & y_2 = \pi_2(x, y), & z_2 = z(x_2, y_2), \end{cases}$$

un de ces points pouvant être le point M' lui-même.

Nous désignons par M, M_1, M_2 les points du plan (xoy) de coordonnées (x, y), $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Nous supposons qu'il existe deux nombres positifs λ et μ, tels que lorsque le point M se trouve dans le rectangle R formé par les parallèles aux axes menées par les points (λ, μ) et $(-\lambda, -\mu)$, les points M_1 et M_2 s'y trouvent aussi. Donc lorsque

$$|x| < \lambda \qquad \text{et} \qquad |y| < \mu$$

on a aussi

$$(2) \qquad \begin{aligned} &|\omega_1(x, y)| \quad \text{et} \quad |\omega_2(x, y| < \lambda \\ &|\pi_1(x, y)| \quad \text{et} \quad |\pi_2(x, y| < \mu. \end{aligned}$$

En plus nous supposons que dans le rectangle R, les fonctions $\omega_1(x, y), \ldots, \pi_2(x, y)$ sont toutes continues.

[2] Cela étant, considérons l'équation fonctionnelle

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi \left\{ a_1(x, y)\, z_{M_1} + b_1(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_1} + c_1(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_1} \right.$$
$$\left. + a_2(x, y)\, z_{M_2} + b_2(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_2} + c_2(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_2} \right\} + f(x, y)$$

où l'on a posé

$$z_{M_h} = z(x_h, y_h), \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_h} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_h \\ y=y_h}}, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_h} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_h \\ y=y_h}} \qquad (h = 1, 2)$$

et où ρ est un paramètre. Nous supposons que les fonctions $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y)$, $f(x, y)$ sont toutes continues dans le rectangle R.

Dans ces conditions nous allons montrer que l'équation fonctionnelle (3) admet, lorsque ρ est suffisamment petit, une solution régulière, unique, prenant des valeurs données sur les segments II' et JJ', les points I, I', J et J' ayant respectivement pour coordonnées $(-\lambda, 0)$, $(\lambda, 0)$, $(0, -\mu)$, $(0, \mu)$. Cette solution, lorsqu'elle existe, est valable dans tout le rectangle R.

Sans diminuer la généralité du problème, nous pouvons supposer que les valeurs que la fonction $z(x, y)$ est assujettie à prendre sur les segments II' et JJ' sont nulles.

[3] Nous allons démontrer cette proposition par la méthode des approximations successives. Cherchons à satisfaire formellement à l'équation fonctionnelle (3) et aux conditions initiales par la série

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \rho z_1(x, y) + \ldots + \rho^n z_n(x, y) + \ldots$$

Les fonctions $z_n(x, y)$ sont déterminées de proche en proche par les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} = f(x, y). \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} = a_1(x, y)(z_{i-1})_{u_1} + b_1(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial x}\right)_{u_1} + c_1(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial y}\right)_{u_1} + a_2(x, y)(z_{i-1})_{u_2} + b_2(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial x}\right)_{u_2} + c_2(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial y}\right)_{u_2} = g_i(x, y) \tag{5}$$

$i = 1, 2 \ldots$

et par les conditions initiales

$$z_i(0, y) = z_i(x, 0) = 0 \tag{6}$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$.

Il s'agit maintenant de démontrer la convergence des séries

$$\sum \rho^n z_n, \qquad \sum \rho^n \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \sum \rho^n \frac{\partial z_n}{\partial y}. \tag{7}$$

L'intégrale de l'équation (4) qui correspond aux équations initiales (6) est

$$z_0(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(s, t)\, ds\, dt,$$

et ses dérivées partielles du premier ordre sont

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} = \int_0^y f(x, t)\, dt, \qquad \frac{\partial z_0}{\partial y} = \int_0^x f(s, y)\, ds.$$

Soit F un nombre supérieur à la valeur absolue de $f(x, y)$ dans le rectangle R. On aura

$$|z_0(x, y)| < F\,|x|\;|y|, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < F\,|y|, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < F\,|x|.$$

En tenant compte des inégalités (2) on a :

$$|(z_0)_{M_h}| < F\,|\omega_h|\,.\,|\pi_h| < F\lambda\mu$$
$$\left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < F\mu \qquad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < F\lambda. \qquad (h = 1, 2)$$

Évaluons maintenant la valeur absolue de $g_1(x, y)$. Pour cela désignons par $A_1, \ldots, C_2$ des nombres supérieurs aux valeurs absolues de $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y)$ dans le rectangle R. On aura

$$|g_1(x, y)| < F[(A_1 + A_2)\lambda\mu + (B_1 + B_2)\mu + (C_1 + C_2)\lambda]$$

ou bien

$$|g_1(x, y)| < FJ,$$

en posant

$$J = (A_1 + A_2)\lambda\mu + (B_1 + B_2)\mu + (C_1 + C_2)\lambda.$$

Alors l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = g_1(x, y)$$

et les conditions initiales (6) donneront la fonction $z_1(x, y)$ et on aura

$$|z_1(x, y)| < FJ\,|x|\;|y|, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < FJ\,|y|, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < FJ\,|x|$$

et ainsi de suite. En général on démontre que la fonction $z_n(x, y)$ et ses dérivées partielles du premier ordre satisfont aux inégalités

$$|z_n(x, y)| < FJ^n\,|x|\,.\,|y|$$
$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < FJ^n\,|y|$$
$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < FJ^n\,|x|.$$

D'après les hypothèses faites, les fonctions

$$z_n, \qquad \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z_n}{\partial y}$$

sont toutes continues dans le rectangle R. Il résultera que les séries (7) sont uniformément convergentes dans le rectangle R lorsque le paramètre ϱ satisfait à la condition

$$|\varrho|\,\mathrm{J} < 1. \tag{8}$$

Nous avons ainsi démontré que lorsque ϱ satisfait à l'inégalité (8), l'équation (3) admet une solution régulière s'annulant sur les axes, valable dans tout le rectangle R. On demontre aisément que la solution ainsi trouvée est unique.

[4] Voici un cas très étendu, où la solution de l'équation (3) existe dans un domaine assez grand et qui dans ce domaine est une fonction entière de ϱ.

Supposons que lorsque

$$-d \leqslant x \leqslant d \qquad -d' \leqslant y \leqslant d' \tag{9}$$

les points M_1 et M_2, que nous faisons correspondre au point M par les formules (1), se trouvent dans le rectangle formé par les parallèles aux axes menées par les points (x, y) et $(-x, -y)$. Donc dans le rectangle R' défini par les inégalités (9), les fonctions $\omega_1(x, y), \ldots, \pi_2(x, y)$ sont continues et satisfont aux inégalités

$$\begin{aligned} &|\omega_1(x, y)| \quad \text{et} \quad |\omega_2(x, y)| < |x| \\ &|\pi_1(x, y)| \quad \text{et} \quad |\pi_2(x, y)| < |y|. \end{aligned} \tag{10}$$

Avec ces nouvelles hypothèses reprenons l'étude de la convergence des séries (7), où $z_0(x, y), \ldots, z_n(x, y), \ldots$ sont données par les équations aux dérivées partielles (4) et (5) et par les conditions initiales (6).

Comme plus haut, nous avons

$$|z_0(x, y)| < \mathrm{F}\,|x|\,.\,|y|, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < \mathrm{F}\,|y|, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < \mathrm{F}\,|x|,$$

et d'après les inégalités (10) on aura

$$\begin{aligned} &|(z_0)_{M_h}| < \mathrm{F}\,|\omega_h|\,.\,|\pi_h| < \mathrm{F}\,|x|\,.\,|y| \\ &\left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \mathrm{F}\,|y|, \qquad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \mathrm{F}\,|x|. \end{aligned} \qquad (h = 1, 2)$$

Il résultera alors que

$$|g_1(x,y)| < F[(A_1 + A_2)|x||y| + (B_1 + B_2)|y| + (C_1 + C_2)|x|].$$

Posons

$$A_1 + A_2 = A, \qquad B_1 + B_2 = B, \qquad C_1 + C_2 = C$$
$$X = |x|, \qquad Y = |y|$$

et remarquons que

$$AXY + BY + CX < \frac{A}{2}(X+Y)^2 + (B+C)(X+Y)$$

ou encore

$$AXY + BY + CX < \frac{1}{2A}[A(X+Y) + B + C]^2,$$

de sorte que

$$|g_1(x,y)| < \frac{F}{2A}[A(X+Y) + B + C]^2.$$

Alors l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = g_1(x,y),$$

et les conditions (6), nous donneront

$$z_1 = \int_0^x \int_0^y g_1(s,t)\,ds\,dt,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \int_0^y g_1(x,t)\,dt, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y} = \int_0^x g_1(s,y)\,ds,$$

et on aura

$$|z_1| < \frac{F}{2A}\int_0^X \int_0^Y [A(s+t) + B + C]^2\,ds\,dt$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < \frac{F}{2A}\int_0^Y [A(X+t) + B + C]^2\,dt$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < \frac{F}{2A}\int_0^X [A(s+Y) + B + C]^2\,ds.$$

On voit que d'une façon générale

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^X \int_0^Y [A(s+t) + B + C]^n\,ds\,dt < \dfrac{1}{(n+2)!\,A^2}[A(X+Y) + B + C]^{n+2} \\ \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^Y [A(X+t) + B + C]^n\,dt < \dfrac{1}{(n+1)!\,A}[A(X+Y) + B + C]^{n+1} \\ \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^X [A(s+Y) + B + C]^n\,ds < \dfrac{1}{(n+1)!\,A}[A(X+Y) + B + C]^{n+1} \end{cases}$$

de sorte que l'on a

$$|z_1(x,y)| < \frac{F}{4!\,A^3}[A(X+Y)+B+C]^4$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < \frac{F}{3!\,A^2}[A(X+Y)+B+C]^3$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < \frac{F}{3!\,A^2}[A(X+Y)+B+C]^3.$$

Comme plus haut, à cause des inégalités (10) on aura aussi

$$|(z_1)_{u_h}| < \frac{F}{4!\,A^4}[A(X+Y)+B+C]^4$$

$$\left|\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_{u_h}\right| < \frac{F}{3!\,A^2}[A(X+Y]+A+C]^4 \qquad (h=1,2)$$

$$\left|\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)_{u_h}\right| < \frac{F}{3!\,A^2}[A(X+Y)+B+C]^4.$$

Évaluons maintenant la valeur absolue de $g_2(x,y)$. On aura

$$|g_2(x,y)| < \frac{F}{3!\,A^2}[A(X+Y)+B+C]^3\left\{B+C+\frac{1}{4}[A(X+Y)+B+C]\right\}.$$

Si l'on pose

$$K = B+C+\frac{1}{4}[A(d+d')+B+C],$$

on aura pour $X \leqslant d$ et $Y \leqslant d'$,

$$B+C+\frac{1}{4}[A(X+Y)+B+C] < K,$$

de sorte que

$$|g_2(x,y)| < \frac{KF}{A^2}\frac{[A(X+Y)+B+C]^3}{3!}.$$

Nous déduisons comme plus haut que l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y} = g_2(x,y)$$

qui s'annule sur les axes, satisfait à l'inégalité

$$|z_2(x,y)| < \frac{KF}{A^4}\frac{[A(X+Y)+B+C]^5}{5!}$$

et l'on a aussi :

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right| < \frac{KF}{A^3}\frac{[A(X+Y)+B+C]^4}{4!}$$
$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right| < \frac{KF}{A^3}\frac{[A(X+Y)+B+C]^4}{4!}.$$

Supposons que de proche en proche nous ayons démontré que

$$(12)\quad \begin{cases} |z_{n-1}(x,y)| < \dfrac{FK^{n-2}}{A^{n-1}}\dfrac{[A(X+Y)+B+C]^{n-2}}{(n+2)!} \\ \left|\dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right| < \dfrac{FK^{n-2}}{A^n}\dfrac{[A(X+Y)+B+C]^{n-1}}{(n+1)!} \\ \left|\dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right| < \dfrac{FK^{n-2}}{A^n}\dfrac{[A(X+Y)+B+C]^{n-1}}{(n+1)!}. \end{cases}$$

Ces inégalités sont vraies lorsqu'on remplace l'indice $n-1$ par 2, démontrons qu'elles sont encore vraies si l'on remplace l'indice $n-1$ par n.

En tenant compte des inégalités (10) les inégalités (12) sont encore vraies lorsque dans le premier membre on remplace x par $\omega_h(x,y)$ et y par $\pi_h(x,y)$ $(h=1,2)$. Évaluons maintenant la valeur absolue de $g_n(x,y)$. On a :

$$|g_n(x,y)| < \frac{FK^{n-2}}{A^n}\frac{[A(X+Y)+B+C]^{n-1}}{(n+1)!}\left\{B+C+\frac{1}{n+2}[A(X+Y)+B+C]\right\}$$

mais

$$B+C+\frac{1}{n+2}[A(X+Y)+B+C] < B+C+\frac{1}{4}[A(d+d')+B+C] = K$$

de sorte que

$$|g_n(x,y)| < \frac{FK^{n-1}}{A^n}\frac{[A(X+Y)+B+C]^{n-1}}{(n+1)!}.$$

Maintenant, il résulte facilement, d'après les formules (11) que l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y} = g_n(x,y)$$

qui s'annule sur les axes, satisfait bien aux inégalités (12) où l'on remplace l'indice $n-1$ par n.

Les séries

$$\sum \varrho^n z_n, \qquad \sum \varrho^n \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \sum \varrho^n \frac{\partial z_n}{\partial y}, \tag{7}$$

sont donc uniformément convergentes dans le rectangle R' défini par les inégalités (9), parce que dans ce rectangle la série

$$\sum \varrho^n \frac{K^{n-1}}{A''^{-1}} \cdot \frac{[A(X+Y)+B+C]^{n+2}}{(n+2)!}$$

est convergente. En plus nous voyons que les séries (7) considérées comme fonctions de ϱ, sont des fonctions entières de ρ. On démontre par des raisonnements classiques que la solution ainsi trouvée de l'équation (3) est unique.

[5] Nous allons traiter un exemple simple qui a été le point de départ de ce travail. Soit H le point de coordonnées (d, d'); K, L les projections de H sur Ox et Oy respectivement. Les parallèles aux axes menées par le point $P(u, v)$ rencontrent OL et HK en J, J' et OK et LH en I, I'.

Par le point $M(x, y)$ du rectangle OKHL, menons des parallèles aux axes Ox et Oy qui rencontrent II' et JJ' en M_1 et M_2 respectivement et considérons l'équation fonctionnelle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varrho[a(x, y)\, z_{M_1} + b(x, y)\, z_{M_2}] + f(x, y) \tag{13}$$

où $a(x, y)$, $b(x, y)$, $f(x, y)$ sont des fonctions continues dans le rectangle OKHL. Nous allons montrer que si l'équation (13) admet une solution régulière, s'annulant sur les axes, valable dans le rectangle OIPJ, cette solution se prolonge dans tout le rectangle OKHL.

Supposons d'abord que le point $M(x, y)$, est dans le rectangle OIPJ. Alors en procédant comme au n° 3, la solution de l'équation (13) existe si

$$|\varrho|\, Cuv < 1 \tag{14}$$

où $C = A + B$, A et B étant des nombres supérieurs aux valeurs absolues de $a(x, y)$ $b(x, y)$ dans le rectangle OKHL.

Supposons la condition (14) vérifiée. Alors l'équation (13) et les conditions initiales, donneront les valeurs de z le long des segments PI et PJ. Soient $\varphi(x)$ les valeurs de z le long de PJ et $\psi(y)$ les valeurs de z le long de PI. Étudions maintenant l'équation (13), lorsque le point M se trouve dans le rectangle IKJ'P. En posant

$$\varrho a(x, y)\, z_{M_1} + f(x, y) = \varrho\psi(y)\, a(x, y) + f(x, y) = f_1(x, y),$$

cette équation devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \rho\, b(x, y)\, z_{M_2} + f_1(x, y),$$

et il faut chercher la solution de cette équation qui s'annule le long du segment IK et qui se réduit à $\psi(y)$ le long du segment IP. Il est facile de montrer qu'il existe une solution correspondant à ces conditions et qu'elle est valable dans tout le rectangle IKJ'P. Remarquons aussi que cette solution nous donne les valeurs $\varphi_1(x)$ de $z(x, y)$ le long du segment PJ'.

Dans le rectangle JPI'L il faut chercher la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \rho\, a(x, y)\, z_{M_1} + f_2(x, y)$$

où

$$f_2(x, y) = f(x, y) + \rho\, b(x, y)\, \varphi(x),$$

qui s'annule le long de JL et qui se réduit à $\varphi(x)$ le long du segment JP. On démontre que cette solution existe dans tout le rectangle JPI'L et nous voyons qu'elle nous donne les valeurs $\psi_1(y)$ de z le long de PI'.

Enfin lorsque (x, y) se trouve dans le rectangle PJ'HI' le second membre de l'équation (13) est connu. On a l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_3(x, y) = \rho\,[a(x, y)\, \psi_1(y) + b(x, y)\, \varphi_1(x)] + f(x, y),$$

et il faut trouver la solution de cette équation qui prend les valeurs $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(y)$ le long de PJ' et de PI'. On sait que cette solution est valable dans tout le rectangle PJ'HI'.

Ainsi la proposition énoncée plus haut est démontrée.

Si l'on reprend les approximations successives du n° 3, on démontre que dans le rectangle OIPJ, la solution de l'équation (13), qui s'annule sur les axes, peut être mise sous la forme

$$z(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(s, t)\, ds\, dt + \rho \int_0^x \int_0^y \mathfrak{A}(x, y; t) f(s, t)\, ds\, dt)$$
$$+ \rho \int_0^x \int_0^y \mathfrak{B}(x, y; s) f(s, t)\, ds\, dt + \rho^2 \int_0^x \int_0^y \mathfrak{C}(x, y; s, t) f(s, t)\, ds\, dt,$$

où $\mathfrak{A}(x, y; t)$, $\mathfrak{B}(x, y; s)$, $\mathfrak{C}(x, y; s, t)$ sont des séries entières en ρ définies par les formules

$$\mathfrak{A}(x, y; t) = \Sigma \rho^i A_i(x, y; t)$$
$$\mathfrak{B}(x, y; s) = \Sigma \rho^i B_i(x, y; s)$$
$$\mathfrak{C}(x, y; s, t) = \Sigma \rho^i C_i(x, y; s, t),$$

les fonctions $A_i(x, y; t)$, $B_i(x, y; s)$, $C_i(x, y; s, t)$ étant données par les formules de récurrence

$$A_i(x, y; t) = \int_0^x \int_t^y a(\sigma, \tau)\, A_{i-1}(u, \tau; t)\, d\sigma\, d\tau$$

$$B_i(x, y; s) = \int_s^x \int_0^y b(\sigma, \tau)\, B_{i-1}(\sigma, v; s)\, d\sigma\, d\tau$$

$$C_i(x, y; s, t) = \int_0^x \int_0^y \{ a(\sigma, \tau)\,[B_i(u, \tau; s) + C_{i-1}(u, \tau; s, t)] + b(\sigma, \tau)\,[A_i(\sigma, v; t) + C_{i-1}(\sigma, v; s, t)] \}\, d\sigma\, d\tau .$$

$(i = 1, 2 \ldots)$,

avec :

$$A_0(x, y; t) = \int_0^x \int_t^y a(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau ,$$

$$B_0(x, y; s) = \int_s^x \int_0^y b(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau ,$$

$$C_0(x, y; s, t) = \int_0^x \int_0^y [a(\sigma, \tau)\, B_0(u, \tau; s) + b(\sigma, \tau)\, A_0(\sigma, v; t)]\, d\sigma\, d\tau .$$

Pour préciser, $\mathfrak{A}(x, y; t)$ et $\mathfrak{B}(x, y; s)$ sont des fonctions entières de ρ, tandis que $\mathfrak{C}(x, y; s, t)$ est une série de ρ convergente lorsque la condition (14) est vérifiée.

Il est intéressant de remarquer que la fonction $\mathfrak{A}(x, y; t)$ est la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \rho\, a(x, y)\, U(u, y) + a(x, y)$$

qui s'annule sur les droites $x = 0$ et $y = t$, et que la fonction $\mathfrak{B}(x, y; s)$ est la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \rho\, b(x, y)\, U(x, v) + b(x, y)$$

qui s'annule sur les droites $x = s$ et $y = 0$.

Quant à $\mathfrak{C}(x, y; s, t)$ on remarque que c'est la solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \rho\,[a(x, y)\, U(u, y) + b(x, y)\, U(x, v) + a(x, y)\, \mathfrak{B}(u, y; s) + b(x, y)\, \mathfrak{A}(x, v; t)]$$

qui s'annule sur les droites $x = s$ et $y = t$. Nous voyons que cette équation est identique à l'équation (13).

[6] Traitons encore un exemple qui va nous servir dans la suite. Considérons un arc de courbe OI représenté par l'équation $x = \beta(y)$, et à tout point $M(x, y)$, faisons correspondre le point N, intersection de la parallèle menée par M à Ox avec l'arc de courbe OI. Envisageons l'équation fonctionnelle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi\left[A z_N + B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_N + \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_N\right] + F \tag{15}$$

où A, B, C, F sont des constantes et proposons-nous de trouver la solution de cette équation qui s'annule le long de Ox et de Oy.

La méthode d'approximations successives, appliquée comme il a été expliqué au n° 3, donnera

$$(z_0)_N = \varphi_0(y) = Fy\beta(y), \qquad \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_N = \psi_0(y) = Fy, \qquad \left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_N = \theta_0(y) = F\beta(y).$$

$$\begin{cases} (z_1)_N = \varphi_1(y) = \int\int_{ON'N''N} [A\varphi_0(t) + B\psi_0(t) + C\theta_0(t)]\, ds\, dt \\ \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_N = \psi_1(y) = \int_{N'N} [A\varphi_0(t) + B\psi_0(t) + C\theta_0(t)]\, dt \\ \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)_N = \theta_1(y) = \int_{N''N} [A\varphi_0(y) + B\psi_0(y) + C\theta_0(y)]\, ds \end{cases}$$

et ainsi de suite. N' et N'' sont les projections de N sur Ox et Oy. En général on démontre que

$$\begin{cases} z_n(x, y) = \int_0^x \int_0^y [A\varphi_{n-1}(t) + B\psi_{n-1}(t) + C\theta_{n-1}(t)]\, ds\, dt \\ \frac{\partial z_n}{\partial x} = \int_0^y [A\varphi_{n-1}(t) + B\psi_{n-1}(t) + C\theta_{n-1}(t)]\, dt \\ \frac{\partial z_n}{\partial y} = \int_0^x [A\varphi_{n-1}(y) + B\psi_{n-1}(y) + C\theta_{n-1}(y)]\, ds \end{cases}$$

de sorte que la convergence des séries

$$\sum \varphi^n z_n, \qquad \sum \varphi^n \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \sum \varphi^n \frac{\partial z_n}{\partial y}, \tag{16}$$

est entraînée, par la convergence des séries

$$\sum \varphi^n \varphi_n(y), \qquad \sum \varphi^n \psi_n(y), \qquad \sum \varphi^n \theta_n(y). \tag{17}$$

Or, si on applique la méthode des approximations successives au système d'équations intégrales

$$(18)\qquad \begin{cases} \varphi(y) = \rho\beta(y)\displaystyle\int_0^y [\mathrm{A}\varphi(t) + \mathrm{B}\psi(t) + \mathrm{C}\theta(t)]\,dt + \mathrm{F}y\beta(y) \\ \psi(y) = \rho\displaystyle\int_0^y [\mathrm{A}\varphi(t) + \mathrm{B}\psi(t) + \mathrm{C}\theta(t)]\,dt + \mathrm{F}y \\ \theta(y) = \rho\beta(y)\,[\mathrm{A}\varphi(y) + \mathrm{B}\psi(y) + \mathrm{C}\theta(y)] + \mathrm{F}\beta(y), \end{cases}$$

on trouve précisément les séries (17).

La résolution de ce système, se ramène à la résolution de l'équation de M. Volterra

$$[1 - \rho\beta(y)\,\mathrm{C}]\,\mathrm{U}(y) = \rho[\mathrm{B} + \mathrm{A}\beta(y)]\int_0^y \mathrm{U}(t)\,dt + \mathrm{F}[\mathrm{A}y\beta(y) + \mathrm{B}y + \mathrm{C}\beta(y)].$$

en posant

$$\mathrm{U}(y) = \mathrm{A}\varphi(y) + \mathrm{B}\psi(y) + \mathrm{C}\theta(y).$$

Pour les valeurs de y satisfaisant à l'inégalité

$$(19)\qquad \beta(y) < \frac{1}{\rho\mathrm{C}},$$

l'équation précédente a une solution continue unique. Il résulte alors, que pour les mêmes valeurs de y, le système (18) a aussi une solution unique, et par suite les séries (17) sont convergentes.

Donc l'équation (15) a une solution régulière s'annulant sur les axes, pour toutes les valeurs de y satisfaisant à l'inégalité (19).

CHAPITRE II.

Le problème de Cauchy.

[7] Considérons un arc de courbe qui n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à l'axe Ox ou Oy. Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F(x, y),$$

on sait que l'intégrale dont les dérivées partielles du premier ordre sont nulles le long de l'arc de courbe OI, et l'intégrale elle-même est nulle au point O, est donnée par la formule

$$(1) \qquad z(x, y) = \int\int_{MPQ} f(s, t)\, ds\, dt - \int_{x}^{\beta(y)} ds \int_{\gamma(s)}^{y} F(s, t)\, dt,$$

P et Q étant les intersections des parallèles menées par M à Oy et à Ox, avec l'arc de courbe OI. L'équation de l'arc de courbe OI est désignée par

$$y = \alpha(x) \quad \text{ou} \quad x = \beta(y).$$

Les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $z(x, y)$ sont

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \int_{\alpha(x)}^{y} F(x, t)\, dt = \int_{PM} F(x, t)\, dt, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \int_{\beta(y)}^{x} F(s, y)\, ds = \int_{QM} F(s, y)\, ds.$$

[8] Cela étant rappelé, considérons la surface $z = z(x, y)$ et au point $M'(x, y, z)$ de cette surface, faisons correspondre les points M'_1 et M'_2 de coordonnées

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \omega_1(x, y), \quad y_1 = \pi_1(x, y), \quad z_1 = z(x_1, y_1); \\ x_2 &= \omega_2(x, y), \quad y_2 = \pi_2(x, y), \quad z_2 = z(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Les projections de ces points sur le plan xoy sont désignées par M, M_1, M_2, respectivement. Nous supposons que lorsque le point $M(x, y)$ se trouve dans le rectangle R défini par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant \lambda, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \mu = \alpha(\lambda),$$

les points M_1 et M_2 s'y trouvent aussi. Les fonctions $\omega_1(x, y), \ldots, \pi_2(x, y)$ sont supposées continues dans ce rectangle et satisfont donc aux inégalités

$$(4) \qquad \begin{aligned} 0 < \omega_1(x, y) \quad &\text{et} \quad \omega_2(x, y) < \lambda \\ 0 < \pi_1(x, y) \quad &\text{et} \quad \pi_2(x, y) < \mu . \end{aligned}$$

Reprenons l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \rho \Big\{ a_1(x, y)\, z_{M_1} + b_1(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_1} + c_1(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_1} + a_2(x, y)\, z_{M_2} + b_2(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_2} + c_2(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_2} \Big\} + f(x, y)$$

où $z_{M_1}, \ldots, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_2}$ ont la signification donnée au n° 2, et où $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y)$, $f(x, y)$ sont des fonctions continues dans le rectangle R. Nous nous proposons de montrer que lorsque ρ est suffisamment petit, l'équation (5) a une solution régulière correspondant aux conditions de Cauchy relativement à l'arc de courbe OI. Sans diminuer la généralité du problème, nous pouvons supposer que la valeur de la fonction $z(x, y)$ au point O est nulle et que les valeurs de ses dérivées partielles du premier ordre sont nulles également le long de l'arc OI.

[**9**] Employons toujours la méthode des approximations successives pour démontrer ce théorème. Cherchons à satisfaire formellement à l'équation (5) et aux conditions initiales par le développement

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \rho z_1(x, y) + \rho^2 z_2(x, y) + \ldots .$$

Les fonctions $z_i(x, y)$ sont données par les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} = a_1(x, y)\,(z_{i-1})_{M_1} + b_1(x, y) \left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial x}\right)_{M_1} + c_1(x, y) \left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial y}\right)_{M_1} + a_2(x, y)\,(z_{i-1})_{M_2} + b_2(x, y) \left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial x}\right)_{M_2} + c_2(x, y) \left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial y}\right)_{M_2} = g_i(x, y)$$

$i = 1, 2, \ldots,$

et doivent avoir leurs dérivées partielles du premier ordre nulles sur l'arc de courbe OI

et s'annuler au point O. Nous remarquons que d'après les hypothèses faites, les fonctions

$$z_n, \quad \frac{\partial z_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_n}{\partial y}$$

sont toutes continues dans le rectangle R. Démontrons maintenant la convergence des séries

$$\sum \varrho^n z_n, \qquad \sum \varrho^n \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \sum \varrho^n \frac{\partial z_n}{\partial y}. \tag{7}$$

D'après les formules (1) et (2) on a :

$$z_0(x, y) = \int\int_{MPQ} f(s, t)\, ds\, dt$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} = \int_{PM} f(x, t)\, dt, \qquad \frac{\partial z_0}{\partial y} = \int_{QM} f(s, y)\, ds.$$

Si on désigne par F un nombre supérieur à la valeur absolue de $f(x, y)$ dans R, et si on remarque que lorsque le point $M(x, y)$ est dans le rectangle R, le domaine MPQ est intérieur à R, on a :

$$|z_0| < F\lambda\mu, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < F\mu, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < F\lambda.$$

D'autre part, d'après les inégalités (4) on a aussi

$$\begin{aligned} |(z_0)_{M_h}| &< \left|\int\int_{M_h P_h Q_h} f(s, t)\, ds\, dt\right| < F\lambda\mu \\ \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| &< \left|\int_{P_h M_h} f(x_h, t)\, dt\right| < F\mu \qquad (h = 1, 2) \\ \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| &< \left|\int_{Q_h M_h} f(s, y_h)\, ds\right| < F\lambda. \end{aligned}$$

Maintenant il est facile d'évaluer la valeur absolue de $g_1(x, y)$. On a :

$$|g_1(x, y)| < F\{(A_1 + A_2)\lambda\mu + (B_1 + B_2)\mu + (C_1 + C_2)\lambda\} = FJ$$

en posant

$$J = (A_1 + A_2)\lambda\mu + (B_1 + B_2)\mu + (C_1 + C_2)\lambda,$$

$A_1, \ldots, C_2$ sont des nombres supérieurs aux valeurs absolues de $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y)$ dans le rectangle R. Il résulte qu'on a les inégalités

$$|z_1| < FJ\lambda\mu, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < FJ\mu, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < FJ\lambda$$

et de proche en proche on démontre que

$$|z_n| < FJ''\lambda\mu, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < FJ''\mu, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < FJ''\lambda.$$

Alors les séries (7) sont uniformément convergentes lorsque

$$|\varrho| J < 1.$$

En supposant cette condition vérifiée, on démontre que la fonction $z(x, y)$ ainsi trouvée est bien la solution de l'équation (5) et que cette solution est unique.

[10] Montrons maintenant qu'en faisant une autre hypothèse sur la position des points M_1 et M_2, par rapport au point M, on obtient une solution régulière de l'équation (5), valable dans toute la région où les fonctions $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y)$, $f(x, y)$ sont continues et qui est une fonction entière de ϱ.

Considérons un arc de courbe IJ qui n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à l'axe Ox ou à l'axe Oy et qui ne passe pas forcément par l'origine de coordonnées. Nous désignons par R' le rectangle formé par les parallèles aux axes menées par I et J. Pour la suite on peut supposer que le rectangle R' se trouve du côté des x positifs et du côté des y positifs. Par le point M de coordonnées (x, y) pris à l'intérieur du rectangle R', menons des parallèles aux axes Ox et Oy qui rencontrent l'arc de courbe IJ en Q et P.

Nous supposons qu'au point $M(x, y)$, nous faisons correspondre les points M_1 et M_2 par les formules (3), ces points étant à l'intérieur du triangle curviligne MPQ. Les fonctions $\omega_1(x, y), \ldots, \pi_2(x, y)$ sont supposées continues dans le rectangle R'.

Reprenons l'équation (5) et supposons que les fonctions $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y)$, $f(x, y)$ sont continues dans le rectangle R'. Nous allons démontrer l'existence d'une solution régulière de l'équation (5) satisfaisant aux conditions de Cauchy relativement à l'arc de courbe IJ, valable dans tout le rectangle R'. Comme précédemment on supposera nulles les données le long de l'arc de courbe IJ.

En procédant comme au n° 9, nous sommes conduits à l'étude de la convergence des séries (7) avec ces nouvelles hypothèses. Nous allons faire la démonstration en supposant d'abord que le point M se trouve au-dessus de l'arc de courbe IJ et ensuite qu'il se trouve au-dessous de l'arc de courbe IJ.

Commençons donc par supposer que le point M est au-dessus de IJ.

[**11**] Soient $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ les intersections de MP et MQ avec IJ' et JJ' respectivement. Soient $A_1, \ldots, C_2, F$ des nombres supérieurs aux valeurs absolues de $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(x, y)$ dans le rectangle R'. Le domaine MPQ étant intérieur au domaine $M\overline{P}J'\overline{Q}$, on a d'après les formules (1) et (2)

$$|z_0(x, y)| < \int\int_{MPQ} |f(s, t)|\, ds\, dt < \int\int_{M\overline{P}J'\overline{Q}} F\, ds\, dt$$

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < \int_{PM} |f(x, t)|\, dt < \int_{\overline{P}M} F\, dt$$

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < \int_{QM} |f(s, y)|\, ds < \int_{\overline{Q}M} F\, ds.$$

Donc si nous prenons l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\, \partial y} = F$$

qui s'annule le long de IJ' et J'J, on a

$$|z_0(x, y)| < u_0, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < \frac{\partial u_0}{\partial x}, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < \frac{\partial u_0}{\partial y}.$$

D'autre part le triangle $M_h P_h Q_h$ étant intérieur au triangle MPQ on a aussi

$$|(z_0)_{M_h}| < u_0, \qquad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_0}{\partial x}, \qquad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_0}{\partial y} \qquad (h = 1, 2).$$

Évaluons maintenant la valeur absolue de $g_1(x, y)$ qui figure dans les formules (6) et la valeur absolue de l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = g_1(x, y)$$

qui s'annule le long de l'arc IJ, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre. On aura

$$|g_1(x, y)| < (A_1 + A_2)\, u_0(x, y) + (B_1 + B_2)\frac{\partial u_0}{\partial x} + (C_1 + C_2)\frac{\partial u_0}{\partial y}$$

$$< A u_0 + B\frac{\partial u_0}{\partial x} + C\frac{\partial u_0}{\partial y},$$

en posant

$$A = A_1 + A_2, \qquad B = B_1 + B_2, \qquad C = C_1 + C_2.$$

Si nous considérons l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = A u_0 + B \frac{\partial u_0}{\partial x} + C \frac{\partial u_0}{\partial y},$$

qui s'annule le long des segments IJ' et J'J, on démontre comme plus haut que

$$|z_1(x, y)| < u_1, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

En général, si nous considérons l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} = A u_{n-1} + B \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + C \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y},$$

qui s'annule sur IJ' et J'J, on démontre que

8) $$|z_n(x, y)| < u_n, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < \frac{\partial u_n}{\partial x}, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Ces inégalités, combinées avec l'hypothèse faite au n° 10 sur les points M_1 et M_2, entraînent les inégalités suivantes

$$|(z_n)_{M_h}| < u_n, \qquad \left|\left(\frac{\partial z_n}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_n}{\partial x}, \qquad \left|\left(\frac{\partial z_n}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_n}{\partial y}, \qquad (h = 1, 2)$$

qui permettent d'évaluer la valeur absolue de $g_{n+1}(x, y)$ et de $z_{n-1}(x, y)$ et ainsi de suite.

Ainsi d'après les inégalités (8), l'étude de la convergence des séries (7) est ramenée à l'étude de la convergence des séries

(9) $$\sum \rho^n u_n, \qquad \sum \rho^n \frac{\partial u_n}{\partial x}, \qquad \sum \rho^n \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Or si nous considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \rho\left(A u + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y}\right) + F,$$

on sait qu'elle admet une intégrale s'annulant sur les segments IJ' et J'J et que la méthode des approximations successives permet de trouver cette intégrale et ses dérivées partielles du premier ordre sous forme de séries uniformément convergentes dans le rectangle R'. Ces séries sont les séries (9), de sorte que les séries (7) sont

uniformément convergentes dans la partie du rectangle R′ située au-dessus de l'arc de courbe IJ.

Une démonstration analogue permet de conclure la convergence uniforme des séries (7) aussi lorsque le point $M(x, y)$ se trouve au-dessous de l'arc de courbe IJ.

L'existence d'une solution régulière de l'équation (5), satisfaisant aux conditions de Cauchy relativement à l'arc de courbe IJ, avec les hypothèses faites au n° 10, est donc établie. Nous voyons que cette solution est valable dans tout le rectangle R′, et qu'elle est une fonction entière de φ.

[**12**] Étudions encore un cas. Reprenons la courbe OI, représentée par l'équation

$$y = \alpha(x) \quad \text{ou} \quad x = \beta(y)$$

et par le point $M(x, y)$ situé au-dessus de l'arc de courbe OI, menons une parallèle à Ox qui rencontre cet arc en N. Soient N′ et N″ les projections de N sur Ox et sur Oy.

Nous supposons que les points M_1 et M_2 que nous faisons correspondre au point M par les formules (3) se trouvent à l'intérieur du triangle curviligne formé par l'axe Oy, le segment NN″ et l'arc de courbe OI. Les fonctions $\omega_1(x, y), \ldots, \pi_2(x, y)$ sont supposées continues dans la région R″ définie par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant d, \qquad \alpha(x) \leqslant y \leqslant d' = \alpha(d). \tag{10}$$

Cela étant, démontrons que l'équation (5) admet, dans une certaine partie de R″, une solution régulière correspondant aux conditions de Cauchy relativement à l'arc de courbe OI.

En employant la méthode du n° 9 il faut démontrer la convergence uniforme des séries (7).

Désignons par $\lambda_1, \ldots, C_2, F$ des nombres supérieurs aux valeurs absolues des fonctions $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(xy)$ lorsque le point $M(x, y)$ se trouve dans la région R″ définie par les inégalités (10) où ces fonctions sont supposées continues.

Remarquons qu'on a :

$$|z_0(x, y)| < \int\int_{MPQ} |f(s, t)|\, ds\, dt < F \int\int_{ON'N''} ds\, dt = F\gamma\beta(\gamma) = \varphi_0(\gamma)$$

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < \int_{PM} |f(x, t)|\, dt < F \int_{N'N} dt = F\gamma = \psi_0(\gamma)$$

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < \int_{QM} |f(s, y)|\, ds < F \int_{N''N} ds = F\beta(\gamma) = \theta_0(\gamma).$$

D'autre part, d'après nos hypothèses on a aussi

$$\begin{aligned}
|(z_0)_{M_h}| &< \int\int_{M_hP_hQ_h} |f(s,t)|\,ds\,dt < F\int\int_{OX'NN''} ds'dt = \varphi_0(y)\\
\left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| &< \int_{P_hM_h} |f(x_h,t)|\,dt < F\int_{X'N} dt = \psi_0(y)\\
\left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| &< \int_{Q_hM_h} |f(s,y_h)|\,ds < F\int_{X''N} ds = \theta_0(y).
\end{aligned}$$

Dans les formules (6), $g_1(x,y)$ est une fonction continue dans la région R'' et on a

$$|g_1(x,y)| < A\varphi_0(y) + B\psi_0(y) + C\theta_0(y)$$

avec

$$A = A_1 + A_2, \qquad B = B_1 + B_2, \qquad C = C_1 + C_2.$$

Ensuite on a

$$\begin{aligned}
|z_1(x,y)| &< \int\int_{MPQ} |g_1(s,t)|\,ds\,dt < \int\int_{OX'NN''} [A\varphi_0(t) + B\psi_0(t) + C\theta_0(t)]\,ds\,dt = \varphi_1(y)\\
\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| &< \int_{PM} |g_1(x,t)|\,dt < \int_{X'N} [A\varphi_0(t) + B\psi_0(t) + C\theta_0(t)]\,dt = \psi_1(y)\\
\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| &< \int_{QM} |g_1(s,y)|\,ds < \int_{X''N} [A\varphi_0(y) + B\psi_0(y) + C\theta_0(y)]\,ds = \theta_1(y).
\end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$\varphi_1(y_h) < \varphi_1(y), \qquad \psi_1(y_h) < \psi_1(y), \qquad \theta_1(y_h) < \theta_1(y) \qquad (h = 1,2),$$

et ceci nous permet d'évaluer la valeur absolue de $g_2(x,y)$ et de $z_2(x,y)$ et ainsi de suite.

En général si l'on pose

$$\begin{cases}
\varphi_n(y) = \displaystyle\int\int_{OX'NN''} [A\varphi_{n-1}(t) + B\psi_{n-1}(t) + C\theta_{n-1}(t)]\,ds\,dt\\
\psi_n(y) = \displaystyle\int_{X'N} [A\varphi_{n-1}(t) + B\psi_{n-1}(t) + C\theta_{n-1}(t)]\,dt\\
\theta_n(y) = \displaystyle\int_{X''N} [A\varphi_{n-1}(y) + B\psi_{n-1}(y) + C\theta_{n-1}(y)]\,ds
\end{cases}$$

on démontre qu'on a :

$$|z_n(x,y)| < \varphi_n(y), \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < \psi_n(y), \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < \theta_n(y)$$

et qu'on a aussi

$$|(z_n)_{M_h}| < \varphi_n(y), \qquad \left|\left(\frac{\partial z_n}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \psi_n(y), \qquad \left|\left(\frac{\partial z_n}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \theta_n(y) \quad (h = 1,2)$$

de sorte que l'étude de la convergence des séries (7) est ramenée à l'étude de la convergence des séries

$$\Sigma \rho^n \varphi_n(y), \qquad \Sigma \rho^n \psi_n(y), \qquad \Sigma \rho^n \theta_n(y).$$

Or nous avons montré au n° 6, que ces séries sont convergentes pour

$$\beta(y) < \frac{1}{\rho C} \qquad \text{ou} \qquad y < \alpha\left(\frac{1}{\rho C}\right).$$

Ainsi les séries (7) sont uniformément convergentes pour tous les points de la région R'' ayant une ordonnée moindre que d'_1, d'_1 étant le plus petit des nombres d' et $\alpha\left(\frac{1}{\rho C}\right)$.

Le théorème est donc démontré.

[**13**] Reprenons l'équation (5) et supposons que les points M_1 et M_2 que nous faisons correspondre au point M par les formules (3) sont dans la partie du rectangle, formé par les axes et les parallèles aux axes menées par le point M, situés du même côté de l'arc de courbe OI que le point $M(x, y)$. Alors d'après ce qui précède il y a une solution régulière de l'équation (5) satisfaisant aux conditions de Cauchy relativement à l'arc de courbe OI, valable au-dessus et au-dessous de l'arc OI. D'une façon précise cette solution est valable pour tous les points situés au-dessus de l'arc OI, ayant une ordonnée moindre que d'_1 et pour tous les points situés au-dessous de l'arc OI ayant une abscisse moindre que d_1, d_1 étant le plus petit des nombres d et $\beta\left(\frac{1}{\rho B}\right)$.

Supposons que la courbe OI soit une droite. Les considérations précédentes s'appliquent en particulier à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \rho\left[a(x, y)\, z(kx, ky) + b(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{kx \\ ky}} + c(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{kx \\ ky}}\right] + f(x, y)$$

k étant un nombre moindre que l'unité.

[**14**] Nous allons maintenant traiter un problème sur l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \varphi\left[a(x,y)\,z + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + c\frac{\partial z}{\partial y}\right] + f(x,y) \tag{11}$$

qui est différent du problème de Cauchy, mais qui s'y ramène.

Il s'agit de trouver une intégrale régulière de l'équation (11) qui satisfasse sur un arc de courbe IJ, qui n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à l'axe Ox ou à l'axe Oy, aux relations

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P &= k_1(x)\,z_P + l_1(x)\\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P &= k_2(x)\,z_P + l_2(x),\end{aligned} \tag{12}$$

P étant un point de l'arc IJ correspondant à l'abscisse x. En plus la fonction inconnue prend une valeur h en un point P_0 de IJ.

Nous procédons par approximations successives, en prenant pour première approximation, l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x\,\partial y} = f(x,y) \tag{13}$$

qui satisfait aux conditions (12), et pour approximation d'ordre $n+1$, l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y} = a(x,y)\,z_{n-1} + b(x,y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + c(x,y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

qui s'annule ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre le long de IJ. Nous voyons que le seul point à traiter, est de trouver l'intégrale de l'équation (13) avec les conditions (12).

Si nous posons

$$z_0[x, \alpha(x)] = \varphi(x),$$

et nous prenons la dérivée par rapport à x des deux membres de cette identité, nous voyons en tenant compte des formules (12) que $\varphi(x)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(x) = [k_1(x) + \alpha'(x)\,k_2(x)]\,\varphi(x) + l_1(x) + \alpha'(x)\,l_2(x),$$

qui prend la valeur h pour $x = x_0$.

Ainsi z_0, $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ étant connus le long de l'arc de courbe IJ le problème est ramené au problème de Cauchy.

CHAPITRE III

Le problème de M. Picard.

[15] Considérons un arc de courbe OI qui n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à l'axe Ox ou Oy, et l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

On sait que l'intégrale de cette équation qui s'annule le long de Ox et de l'arc de courbe OI est donnée par la formule

$$(1) \qquad z(x, y) = \int\int_{MNPQ} f(s, t)\, ds\, dt = \int_{\beta(y)}^{x} \int_{0}^{y} f(s, t)\, ds\, dt$$

N est l'intersection de l'arc de courbe OI avec la parallèle menée à Ox par M, P et Q sont les projections de N et M sur Ox. On a désigné par $x = \beta(y)$, l'équation de l'arc de courbe OI, et on suppose que $\beta(y)$ soit une fonction continue ayant une dérivée $\beta'(y)$ continue pour $0 < y < d'$. Les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $z(x, y)$ sont

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \displaystyle\int_0^y f(x, t)\, dt = \int_{QM} f(x, t)\, dt \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \displaystyle\int_{\beta(y)}^{x} f(s, y)\, ds - \beta'(y) \int_0^y f[\beta(y), t]\, dt = \int_{NM} f(s, y)\, ds - \beta'(y) \int_{PN} f[\beta(y), t]\, dt. \end{cases}$$

[16] Considérons la surface $z = z(x, y)$ et au point $M'(x, y, z)$ de cette surface faisons correspondre les points M'_1 et M'_2 de coordonnées

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = \omega_1(x, y) & y_1 = \pi_1(x, y) & z_1 = z(x_1, y_1) \\ x_2 = \omega_2(x, y) & y_2 = \pi_2(x, y) & z_2 = z(x_2, y_2). \end{cases}$$

Soient M, M_1, M_2 les projections de ces points sur le plan (xoy).

Nous supposons que lorsque le point $M(x, y)$ se trouve dans le rectangle R défini par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant \lambda = \beta(\mu) \qquad 0 \leqslant y \leqslant \mu$$

les fonctions $\omega_1(x, y), \ldots, \pi_2(x, y)$ sont continues et que les points M_1 et M_2 se trouvent aussi dans le rectangle R.

Cela étant reprenons l'équation fonctionnelle

$$(4) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \rho \left\{ a_1(x, y) z_{M_1} + b_1(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_1} + c_1(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_1} + a_2(x, y) z_{M_2} + b_2(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_2} + c_2(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_2} \right\} + f(x, y),$$

où $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(x, y)$ sont des fonctions continues dans le rectangle R, et montrons que si ρ est suffisamment petit, cette équation admet une solution régulière prenant des valeurs données sur Ox et sur l'arc de courbe OI.

Nous pouvons supposer que les données le long de Ox et OI sont nulles.

Nous démontrons ce théorème par la méthode des approximations successives en cherchant à satisfaire formellement à l'équation (4) et aux conditions initiales par la série

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \rho z_1(x, y) + \ldots + \rho^n z_n(x, y) + \ldots$$

Les fonctions $z_0(x, y), \ldots, z_n(x, y)$ sont données par les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} = a_1(x, y)(z_{i-1})_{M_1} + b_1(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial x}\right)_{M_1} + c_1(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial y}\right)_{M_1} + a_2(x, y)(z_{i-1})_{M_2} + b_2(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial x}\right)_{M_2} + c_2(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial y}\right)_{M_2} = g_i(x, y)$$

$(i = 1, 2 \ldots)$

et par les conditions initiales

$$z_i(0, y) = z_i[\beta(y), y] = 0$$

$(i = 0, 1, 2 \ldots)$.

Nous allons démontrer les convergences des séries

$$(5) \qquad \sum \rho^n z_n, \qquad \sum \rho^n \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \sum \rho^n \frac{\partial z_n}{\partial y}.$$

D'après nos hypothèses les termes généraux de ces séries sont des fonctions continues de x et de y.

Désignons par $A_1, \ldots, C_2, F$ des nombres supérieurs aux valeurs absolues de $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(x, y)$ dans le rectangle R et par k un nombre supérieur à la valeur absolue de $\beta'(y)$ lorsque y varie de o à μ.

D'après les formules (1) et (2) nous avons

$$|z_0(x, y)| < \int\int_{MNPQ} |f(s, t)|\, ds\, dt < F\lambda\mu$$

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < \int_{QM} |f(x, t)|\, dt < F\mu$$

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < \int_{NM} |f(s, y)|\, ds + k \int_{PN} |f(\beta(y), t)|\, dt < F(\lambda + k\mu).$$

Le rectangle $M_h N_h P_h Q_h$ étant à l'intérieur du rectangle R on a aussi

$$|(z_0)_{M_h}| < F\lambda\mu, \quad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < F\mu, \quad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < F(\lambda + k\mu) \quad (h = 1, 2).$$

Évaluons maintenant la valeur absolue de $g_1(x, y)$. On aura

$$|g_1(x, y)| < F\{(A_1 + A_2)\lambda\mu + (B_1 + B_2)\mu + (C_1 + C_2)(\lambda + k\mu)\} = FJ$$

en posant

$$J = (A_1 + A_2)\lambda\mu + (B_1 + B_2)\mu + (C_1 + C_2)(\lambda + k\mu).$$

On aura ensuite de la même manière

$$|z_1(x, y)| < FJ\lambda\mu, \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < FJ\mu. \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < FJ(\lambda + k\mu)$$

et ainsi de suite. Donc si

$$|z| J < 1,$$

les séries (5) sont uniformément convergentes et représentent bien la solution de l'équation (4) ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre. Cette solution, si elle existe, est valable dans tout le rectangle R.

[17] Si nous supposons que les points M_1 et M_2 que nous faisons correspondre au point $M(x, y)$ par les formules (3) se trouvent dans la partie du rectangle, formé par les axes et les parallèles aux axes menées par le point $M(x, y)$ du même côté

de OI que le point $M(x, y)$, nous pouvons démontrer l'existence d'une solution régulière de l'équation (4) prenant des valeurs données le long de Ox et de OI, valable dans toute la région comprise entre OI et Ox, où les fonctions $a_1(x, y)$, ..., $c_2(x, y)$, $f(x, y)$ sont continues. Dans cette région la solution est une fonction entière de p. Nous montrerons ensuite que cette solution se prolonge au-dessus de l'arc OI. Nous pouvons supposer les données nulles le long de Ox et de OI.

Considérons la région R' définie par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant d \qquad 0 \leqslant y \leqslant \alpha(x),$$

$\alpha(x)$ étant l'inverse de la fonction $\beta(y)$, et supposons que les fonctions $a_1(x, y)$ ..., $c_2(x, y)$, $f(x, y)$ sont toutes continues dans R' ainsi que la fonction $\beta'(y)$. Reprenons les séries (5) et montrons leur convergence uniforme dans R'. Nous désignons par $A_1, \ldots, C_2$, F, K des nombres supérieurs aux valeurs absolues de $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y)$, $f(x, y)$, $\beta'(y)$ dans R' et nous posons

$$A = A_1 + A_2, \qquad B = B_1 + B_2, \qquad C = C_1 + C_2.$$

Soit N' la projection de M sur Oy. D'après les formules (1) et (2) nous avons :

$$|z_0(x, y)| < \int\int_{MNPQ} |f(s, t)|\, ds\, dt < \int\int_{OQMN'} F\, ds\, dt = \int_0^{x} \int_0^{y} F\, ds\, dt$$

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < \int_0^{y} F\, dt$$

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < \int_0^{x} F\, ds + k \int_0^{y} F\, dt.$$

Introduisons la fonction $u_0(x, y)$, intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\, \partial y} = F$$

qui s'annule le long de Ox et Oy. Nous aurons

$$|z_0(x, y)| < u_0, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < \frac{\partial u_0}{\partial x}, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < \frac{\partial u_0}{\partial y} + k\frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

D'autre part les points M_1 et M_2 étant à l'intérieur du rectangle OQMN' on a aussi

$$|(z_0)_{M_h}| < \int\int_{OQMN'} F\, ds\, dt$$

$$\left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \int_0^{y} F\, dt, \qquad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \int_0^{x} F\, ds + k \int_0^{y} F\, dt \qquad (h = 1, 2)$$

c'est-à-dire

$$|(z_0)_{M_h}| < u_0, \quad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_0}{\partial y} + k\frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (h = 1,2)$$

Maintenant nous pouvons évaluer la valeur absolue de $g_1(x, y)$. On trouve

$$|g_1(x, y)| < Au_0(x, y) + (B + kC)\frac{\partial u_0}{\partial x} + C\frac{\partial u_0}{\partial y} = h_1(x, y).$$

Il est bon de remarquer que

$$h_1[\beta(y), y], \qquad h_1(x_h, y) \quad \text{et} \quad h_1(x, y_h) < h_1(x, y) \qquad (h = 1,2)$$

parce que dans la région R', $\beta(y) < x$ et que $x_h < x$, $y_h < y$

Alors si nous considérons l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = Au_0 + (B + kC)\frac{\partial u_0}{\partial x} + C\frac{\partial u_0}{\partial y}$$

qui s'annule sur les axes Ox et Oy, et l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = g_1(x, y),$$

qui s'annule le long de Ox et de OI, on a

$$|z_1(x, y)| < u_1, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < \frac{\partial u_1}{\partial y} + k\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

et on démontre qu'on a aussi

$$|(z_1)_{M_h}| < u_1, \quad \left|\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \left|\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_1}{\partial y} + k\frac{\partial u_1}{\partial x}. \quad (h = 1,2)$$

En général si l'on prend l'intégrale $u_n(x, y)$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} = Au_{n-1} + (B + kC)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + C\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}$$

qui s'annule sur les axes, on aura

$$|z_n| < u_n, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < \frac{\partial u_n}{\partial x}, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < \frac{\partial u_n}{\partial y} + k\frac{\partial u_n}{\partial x}$$

et

$$|(z_n)_{M_h}| < u_n, \quad \left|\left(\frac{\partial z_n}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad \left|\left(\frac{\partial z_n}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \frac{\partial u_n}{\partial y} + k\frac{\partial u_n}{\partial x} \quad (h = 1,2)$$

de sorte que la convergence des séries (5) est ramenée à la convergence des séries

$$(6) \qquad \sum \rho^n u_n, \qquad \sum \rho^n \frac{\partial u_n}{\partial x}, \qquad \sum \rho^n \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Or, si nous considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \rho\left[Au + (B + kC)\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right] + F,$$

l'intégrale qui s'annule sur les axes s'obtient par la méthode des approximations successives et les séries formées par cette méthode sont précisément les séries (6). On sait que ces séries sont convergentes dans la région R' et nous déduisons que les séries (5) le sont aussi.

Le théorème est donc démontré.

La solution précédente peut se prolonger au-dessus de l'arc de courbe OI. En effet les séries (5) nous donnent les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en tout point de l'arc de courbe OI, et par suite nous avons à traiter, au-dessus de OI, un problème de Cauchy. Ce problème a été traité au n° 12.

Lorsque la courbe OI est une droite, les considérations précédentes s'appliquent en particulier à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \rho\left[a(x, y)\, z(kx, ky) + b(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{kx \\ ky}} + c(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{kx \\ ky}}\right] + f(x, y)$$

où k est un nombre moindre que l'unité.

[18] Nous allons reprendre le problème de M. Picard relativement à l'équation (4), avec des nouvelles hypothèses sur la position des points M_1 et M_2 que nous faisons correspondre au point M par les formules (3).

Soient N et N_1 les intersections de l'arc de courbe OI, avec les parallèles aux axes Ox et Oy menées par M. Nous supposons maintenant que les points M_1 et M_2 se trouvent à l'intérieur du triangle curviligne MNN_1.

En procédant par des approximations successives comme au n° 16, la question se ramène à l'étude de la convergence des séries (5). Nous supposerons que le point M se trouve au-dessous de l'arc OI dans la région R'' définie par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant d, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \alpha(x),$$

où les fonctions $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(x, y), \beta(y)$ sont continues.

Soit S la projection de N_1 sur Oy. En posant

$$\varphi_0(x) = \int\int_{OQN_1S} F\, ds\, dt, \qquad \psi_0(x) = \int_{QN_1} F\, dt, \qquad \theta_0(x) = \int_{SN_1} F\, ds,$$

on aura

$$|z_0(x,y)| < \varphi_0(x), \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < \psi_0(x), \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < \theta_0(x) + k\psi_0(x)$$

et

$$|(z_0)_{M_h}| < \varphi_0(x), \qquad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \psi_0(x), \qquad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \theta_0(x) + k\psi_0(x). \qquad (h = 1,2)$$

En général si l'on pose

$$\varphi_n(x) = \int\int_{OQN_1} [A\varphi_{n-1}(s) + (B + kC)\psi_{n-1}(s) + C\theta_{n-1}(s)]\, ds\, dt,$$

$$\psi_n(x) = \int_{QN_1} [A\varphi_{n-1}(x) + (B + kC)\psi_{n-1}(x) + C\theta_{n-1}(x)]\, dt,$$

$$\theta_n(x) = \int_{SN_1} [A\varphi_{n-1}(s) + (B + kC)\psi_{n-1}(s) + C\theta_{n-1}(s)]\, ds,$$

on aura

$$|z_n| < \varphi_n(x), \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < \psi_n(x), \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < \theta_n(x) + k\psi_n(x),$$

et

$$|(z_n)_{M_h}| < \varphi_n(x), \qquad \left|\left(\frac{\partial z_n}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < \psi_n(x), \qquad \left|\left(\frac{\partial z_n}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < \theta_n(x) + k\psi_n(x). \qquad (h = 1,2)$$

La démonstration se fait comme au n° 17.

Il résulte que la convergence des séries (5), est ramenée à la convergence des séries

$$\Sigma\rho^n\varphi_n(x), \qquad \Sigma\rho^n\psi_n(x), \qquad \Sigma\rho^n\theta_n(x).$$

Or, nous avons démontré au n° 6 que ces séries sont convergentes si

$$\alpha(x) < \frac{1}{\rho(B + kC)} \qquad \text{ou} \qquad x < \beta\left[\frac{1}{\rho(B + kC)}\right].$$

Il résulte alors que les séries (5) sont uniformément convergentes pour tous les points de la région R'' ayant une abscisse inférieure d_1, d_1 étant le plus petit des nombres d et $\beta\left[\frac{1}{\rho(B + kC)}\right]$.

La solution de l'équation (4) ainsi trouvée se prolonge au-dessus de l'arc OI de la manière suivante. Les séries (5) donneront les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long de l'arc OI, et au-dessus de l'arc de courbe OI, nous avons à résoudre un problème de Cauchy. Ce problème a été traité au n° 11.

CHAPITRE IV

Le problème de M. Goursat.

[**19**] Considérons deux droites OI et OJ issues de l'origine et ayant pour équations

$$y = \alpha x \qquad \text{et} \qquad x = \beta y,$$

la première étant la plus approchée de Ox et la seconde la plus approchée de Oy. Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F(x, y),$$

M. Goursat(1) a montré que l'intégrale qui s'annule le long de OI et de OJ est donnée par la formule

$$z(x, y) = \int_0^x \int_0^y F(s, t)\, ds\, dt + \varphi(x) + \psi(y),$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont les solutions des équations fonctionnelles

$$\varphi(\gamma x) - \varphi(x) = \int_x^{\alpha x} \int_0^{\alpha x} F(s, t)\, ds\, dt, \qquad \psi(\gamma x) - \psi(x) = \int_0^{\beta x} \int_x^{\beta x} F(s, t)\, ds\, dt$$

avec

$$\gamma = \alpha\beta < 1.$$

Si dans une certaine région autour du point O la valeur absolue de $f(x, y)$ est moindre que F, on a dans cette région

$$(1) \qquad \begin{aligned} |z(x, y)| &< F\left(xy + \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{1 + \gamma}\right), \\ \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| &< F\left(y + \frac{2\alpha x}{1 - \gamma^2}\right), \\ \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| &< F\left(x + \frac{2\beta y}{1 - \gamma^2}\right). \end{aligned}$$

(1) M. E. Goursat. *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, tome VI, p. 117.

[**20**] Considérons la surface $z = z(x, y)$ et au point $M'(x, y, z)$ de cette surface faisons correspondre les points M'_1 et M'_2 de coordonnées

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \omega_1(x, y), \quad y_1 = \pi_1(x, y), \quad z_1 = z(x_1, y_1), \\ x_2 &= \omega_2(x, y), \quad y_2 = \pi_2(x, y), \quad z_2 = z(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Nous désignons par M, M_1, M_2 les projections de ces points sur le plan (xoy). $\omega_1(x, y), \ldots, \pi_2(x, y)$ sont des fonctions continues dans le rectangle R défini par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant \lambda, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \mu.$$

Nous supposons que lorsque le point $M(x, y)$ se trouve dans le rectangle R, les points M_1 et M_2 s'y trouvent aussi.

Cela étant, reprenons l'équation fonctionnelle

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \rho \Big\{ & a_1(x, y)\, z_{M_1} + b_1(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_1} + c_1(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_1} \\ & + a_2(x, y)\, z_{M_2} + b_2(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_2} + c_2(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_2} \Big\} + f(x, y) \end{aligned}$$

où $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(x, y)$ sont des fonctions continues dans R.

Nous allons montrer que si ρ est suffisamment petit, cette équation admet une solution régulière prenant des valeurs données le long des droites OI et OJ. En utilisant une remarque faite par M. Goursat(1), nous pouvons supposer que les données le long de OI et OJ sont nulles.

Nous démontrons ce théorème par la méthode des approximations successives, en cherchant à satisfaire formellement à l'équation (3) et aux conditions initiales par la série

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \rho z_1(x, y) + \rho^2 z_2(x, y) + \ldots$$

Les fonctions $z_i(x, y)$ sont données par les équations

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x\,\partial y} = f(x, y).$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\,\partial y} = & a_1(x, y)(z_{i-1})_{M_1} + b_1(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial x}\right)_{M_1} + c_1(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial y}\right)_{M_1} \\ & + a_2(x, y)(z_{i-1})_{M_2} + b_2(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial x}\right)_{M_2} + c_2(x, y)\left(\frac{\partial z_{i-1}}{\partial y}\right)_{M_2} = g_i(x, y) \end{aligned}$$

$(i = 1, 2 \ldots)$

(1) M. E. Goursat Mémoire cité, p. 133

et les conditions initiales

$$z_i(x, \alpha x) = z_i(\beta y, y) = 0$$

$(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

Nous allons maintenant démontrer la convergence uniforme des séries

$$\sum \varphi^n z_n, \qquad \sum \varphi^n \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \sum \varphi^n \frac{\partial z_n}{\partial y}. \tag{5}$$

Désignons par $A_1, \ldots, C_2, F$ des nombres supérieurs aux valeurs absolues de $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(x, y)$ dans le rectangle R. D'après les formules (1) on a

$$|z_0(x, y)| < F\left(xy + \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{1 + \gamma}\right),$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < F\left(y + \frac{2\alpha x}{1 - \gamma^2}\right), \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < F\left(x + \frac{2\beta y}{1 - \gamma^2}\right)$$

et tenant compte de l'hypothèse faite sur les points M_1 et M_2, on a

$$\begin{gathered} |(z_0)_{M_h}| < F\left(x_h y_h + \frac{\alpha x_h^2 + \beta y_h^2}{1 + \gamma}\right) < F\left(\lambda\mu + \frac{\alpha\lambda^2 + \beta\mu^2}{1 + \gamma}\right), \\ \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < F\left(\mu + \frac{2\alpha\lambda}{1 - \gamma^2}\right), \qquad \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < F\left(\lambda + \frac{2\beta\mu}{1 - \gamma^2}\right). \end{gathered} \qquad (h = 1, 2)$$

Nous pouvons maintenant évaluer la valeur absolue de $g_1(x, y)$.

En posant

$$J = (A_1 + A_2)\left(\lambda\mu + \frac{\alpha\lambda^2 + \beta\mu^2}{1 + \gamma}\right) + (B_1 + B_2)\left(\mu + \frac{2\alpha\lambda}{1 - \gamma^2}\right) + (C_1 + C_2)\left(\lambda + \frac{2\beta\mu}{1 - \gamma^2}\right)$$

on a

$$|g_1(x, y)| < FJ.$$

Alors en continuant de la même manière on aura

$$|z_1(x, y)| < FJ\left(xy + \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{1 + \gamma}\right)$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < FJ\left(y + \frac{2\alpha x}{1 - \gamma^2}\right), \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < FJ\left(x + \frac{2\beta y}{1 - \gamma^2}\right)$$

et

$$|g_2(x, y)| < FJ^2$$

et ainsi de suite. Si

$$|\varphi| J < 1$$

les séries (5) sont uniformément convergentes et l'équation (3) admet bien une solution régulière s'annulant sur OI et OJ. Cette solution, lorsqu'elle existe, est valable dans tout le rectangle R.

[**21**] Dans certains cas la solution de l'équation (3) correspondant aux conditions de M. Goursat est valable dans un domaine assez étendu. Supposons par exemple les points M_1 et M_2 dans l'angle formé par les deux droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$ et ayant les abscisses et les ordonnées moindres que x et y respectivement. D'autre part supposons que les fonctions connues qui figurent dans l'équation (3) sont toutes continues dans la région R' comprise entre les droites $Y = \alpha X$, $X = \beta Y$, $X = d$ et $Y = d'$. Alors l'équation (3) admet une solution régulière s'annulant sur les droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$, valable dans toute la région R'.

Pour démontrer ce théorème nous allons reprendre l'étude du problème de M. Goursat pour l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F(x, y). \tag{6}$$

[**22**] Par le point M situé dans l'angle formé par OI et OJ menons deux lignes brisées L et L'. La ligne L s'obtient en menant par M le parallèle Mm_1 à Oy jusqu'à sa rencontre avec OI, puis la parallèle m_1p_1 à Ox jusqu'à sa rencontre avec OJ et ainsi de suite. La ligne L' s'obtient de la même façon, en menant la parallèle Mn_1 à Ox jusqu'à sa rencontre en n_1 avec OJ, ensuite la parallèle n_1q_1 à Oy et ainsi de suite. M. Goursat(1) a montré que si l'on désigne par I et I' les intégrales doubles $\int\int f(s, t)\, ds\, dt$, étendues respectivement aux portions du plan comprises, d'une part entre Ox, la ligne L et l'ordonnée MP; et d'autre part entre Oy, la ligne L' et la droite MQ, l'intégrale de l'équation (6) qui s'annule le long de OI et OJ est donnée par

$$z(x, y) = \int_0^{x} \int_0^{y} f(s, t)\, ds\, dt - I - I'. \tag{7}$$

Nous allons mettre cette formule sous une autre forme qui nous permettra de trouver des limites supérieures pour z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ lorsque le point $M(x, y)$ est dans l'angle formé par les droites OI et OJ.

(1) M. Goursat. *Traité d'Analyse*, tome III, éd. 1923, p. 123.

Soit N l'intersection de $m_1 p_1$ avec $n_1 q_1$ et considérons comme l'a fait aussi M. Goursat(1) la relation évidente

$$\int\int_{m_1 M n_1} \frac{\partial^2 z}{\partial s\, \partial t}\, ds\, dt = \int\int_{m_1 M n_1} \mathrm{F}(s, t)\, ds\, dt.$$

Le premier membre de cette relation à la valeur(2) $z_M + z_N - z_{m_1} - z_{n_1}$ et comme z_{m_1} et z_{n_1} sont nulles, il résulte que nous avons

$$z(x, y) + z(\beta y, \alpha x) = \int_{\beta y}^{x}\int_{\alpha x}^{y} \mathrm{F}(s, t)\, ds\, dt.$$

Si dans cette formule nous changeons x en βy et y en αx nous avons :

$$z(\beta y, \alpha x) + z(\alpha\beta x, \alpha\beta y) = \int_{\alpha\beta x}^{\beta y}\int_{\alpha\beta y}^{\alpha x} \mathrm{F}(s, t)\, ds\, dt = \alpha\beta \int_{\beta y}^{x}\int_{\alpha s}^{x} \mathrm{F}(\beta t, \alpha s)\, ds\, dt$$

et si l'on retranche membre à membre ces égalités, on trouve

$$z(x, y) - z(\gamma x, \gamma y) = l(x, y) \tag{8}$$

en posant

$$\gamma = \alpha\beta < 1$$

$$l(x, y) = \int_{\beta y}^{x}\int_{\alpha x}^{y} [\mathrm{F}(s, t) - \gamma \mathrm{F}(\beta t, \alpha s)]\, ds\, dt. \tag{9}$$

De l'équation (8) nous déduisons en dérivant par rapport à x et y et en désignant les dérivées partielles de z du premier ordre par p et q, les équations

$$\begin{aligned} p(x, y) - \gamma p(\gamma x, \gamma y) &= \frac{\partial l}{\partial x} = l'(x, y), \\ q(x, y) - \gamma q(\gamma x, \gamma y) &= \frac{\partial l}{\partial y} = l''(x, y). \end{aligned} \tag{10}$$

Remarquons maintenant qu'à l'origine, les dérivées p et q sont nulles. En effet si nous prenons la dérivée de z à l'origine dans la direction OI et OJ, nous trouvons

$$p(0, 0) + \alpha q(0, 0) = 0, \qquad \beta p(0, 0) + q(0, 0) = 0$$

et comme le déterminant $1 - \gamma$ de ce système, n'est pas nul, on déduit que $p(0,0) = q(0,0) = 0$.

(1) M. Goursat, *Traité d'Analyse*, tome III, pp. 115, 117, 120.
(2) M. Goursat, *Traité d'Analyse*, tome I, p. 309.

Les équations (8) et (10) donnent les valeurs de $z, p, q,$ sous la forme des séries

$$z(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} l(\gamma^i x, \gamma^i y), \tag{11}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i l'(\gamma^i x, \gamma^i y),$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i l''(\gamma^i x, \gamma^i y). \tag{12}$$

Si l'on suppose que pour $x < d$ et $y < d'$, la fonction $F(x, y)$ reste en valeur absolue moindre que F, les séries précédentes sont absolument et uniformément convergentes. En effet en remarquant que le point $M(x, y)$, étant situé dans l'angle formé par les droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$, le rectangle $Mn_1 O m_1$ est intérieur au rectangle OPMQ, et on a

$$|l(x, y)| < F(1 + \gamma) xy,$$
$$|l'(x, y)| < F(1 - \gamma^2) y,$$
$$|l''(x, y)| < F(1 - \gamma^2) x,$$

et comme $\gamma < 1$, la convergence des séries précédentes est évidente.

Il résulte aussi les inégalités

$$|z(x, y)| < F \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma^2} xy.$$
$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < Fy, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < Fx. \tag{13}$$

[**23**] Supposons que la fonction $F(x, y)$ satisfait, lorsque x et y sont moindres que d et d' respectivement, à l'inégalité

$$|F(x, y)| < H(x + y)^p$$

p étant un entier positif, et évaluons la valeur absolue de la solution $z(x, y)$ de l'équation (6) qui s'annule sur OI et OJ, et de ses dérivées partielles du premier ordre. Remarquons d'abord que cette solution peut se mettre sous la forme

$$z(x, y) = \int_0^x \int_0^y h(s, t)\, ds\, dt, \tag{14}$$

où $h(x, y)$ est la solution de l'équation fonctionnelle

$$h(x, y) + \gamma h(\beta y, \alpha x) = F(x, y). \tag{15}$$

En effet posons

$$G(x, y) = F(x, y) - \gamma F(\beta y, \alpha x) \tag{16}$$

et dans la formule (9) changeons x en $\gamma^i x$ et y en $\gamma^i y$. On aura

$$l(\gamma^i x, \gamma^i y) = \int_{\beta^i y}^{\gamma^i} \int_{\alpha^i x}^{\gamma^i y} G(s, t)\, ds\, dt$$

et si dans cette intégrale on fait le changement de variables

$$s = \gamma^i \sigma, \qquad t = \gamma^i \tau,$$

on trouve

$$l(\gamma^i x, \gamma^i y) = \int_{\beta y}^{\gamma} \int_{\alpha x}^{y} h_i(s, t)\, ds\, dt$$

en posant

$$h_i(x, y) = \gamma^{2i} G(\gamma^i x, \gamma^i y).$$

D'autre part nous remarquons que la série

$$G(x, y) + h_1(x, y) + h_2(x, y) + \dots \tag{17}$$

lorsqu'elle est convergente représente bien la solution de l'équation fonctionnelle (15), et d'après la formule (11) nous pouvons écrire

$$z(x, y) = \int_{\beta y}^{\gamma} \int_{\alpha x}^{y} h(s, t)\, ds\, dt.$$

Il reste donc à prouver que la série (17) est uniformément convergente.

Remarquons que le point $M(x, y)$ étant situé dans l'angle formé par les droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$, on a

$$\beta y < x \quad \text{et} \quad \alpha x < y,$$

de sorte qu'en tenant compte de la valeur absolue de $F(x, y)$ et de la formule (16) on a :

$$|G(x, y)| \leq H(x + y)^p + \gamma H(x + y)^p < H(1 + \gamma)(x + y)^p.$$

Il résulte que

$$|G(\gamma' x, \gamma' y)| < H(1+\gamma)\gamma'^{p}(x+y)^{p}$$

et par suite la série (17) est convergente parce que $\gamma < 1$. Nous remarquons qu'on a en plus

$$|h(x, y)| < H\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{\frac{p}{2}}}(x+y)^{p}.$$

Evaluons maintenant la valeur absolue de $z(x, y)$ lorsque le point $M(x, y)$ est dans l'angle formé par les droites OI et OJ. Le rectangle $M_{n_1} N_{m_1}$ étant intérieur au rectangle OPMQ, on a évidemment d'après la formule (14)

$$|z(x, y)| < \int_0^{x} \int_0^{y} |h(s, t)|\, ds\, dt$$

et comme

$$\int_0^{x} \int_0^{y} (s+t)^{p}\, ds\, dt < \frac{1}{(p+1)(p+2)}(x+y)^{p+2}$$

on a :

$$|z(x, y)| < \frac{H}{(p+1)(p+2)}\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{\frac{p}{2}}}(x+y)^{p+2}. \tag{18}$$

En dérivant les deux membres de la formule (14) par rapport à x et à y on a :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int_{\alpha x}^{y} h(x, t)\, dt - \alpha \int_{\beta y}^{x} h(s, \alpha x)\, ds,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_{\beta y}^{x} h(s, y)\, ds - \beta \int_{\alpha x}^{y} h(\beta y, t)\, dt,$$

et en remarquant qu'entre les droites OI et OJ

$$\alpha x < y \qquad \text{et} \qquad \beta y < x,$$

on a

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < H\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{\frac{p}{2}}}\int_0^{y}(x+t)^{p}\, dt + \alpha H\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{\frac{p}{2}}}\int_0^{x}(s+y)^{p}\, ds$$
$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < H\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{\frac{p}{2}}}\int_0^{x}(s+y)^{p}\, ds + \beta H\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{\frac{p}{2}}}\int_0^{y}(x+t)^{p}\, dt,$$

Mais

$$\int_0^y (x+t)^p\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^x (s+y)^p\,ds < \frac{(x+y)^{p+1}}{(p+1)}$$

de sorte que

$$(19)\qquad \begin{aligned} \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| &< \frac{H}{p+1}\,\frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1-\gamma^{p+2}}\,(x+y)^{p+1} \\ \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| &< \frac{H}{p+1}\,\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{1-\gamma^{p+2}}\,(x+y)^{p+1}. \end{aligned}$$

[24] Cela posé, nous pouvons faire la démonstration du théorème énoncé au n° 21. Nous employons toujours la méthode des approximations successives et ainsi la question est ramenée à l'étude de la convergence des séries (5). Nous supposons, comme nous avons dit dans le n° 21, que le point $M(x, y)$ se trouve dans l'angle formé par les deux droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$ et que les points M_1 et M_2 se trouvent aussi dans cet angle et ont les abcisses et les ordonnées moindres que x et y respectivement.

Nous désignons par $A_1, \ldots, C_2, F$ des nombres supérieurs aux valeurs absolues de $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(x, y)$, lorsque le point (x, y) se trouve dans la région R' dont il a été question au n° 21.

D'après les formules (13) on a

$$|z_0(x, y)| < F\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}\,xy, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < Fy, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < Fx$$

et ensuite

$$\begin{aligned} |(z_0)_{u_h}| &< F\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}\,x_h y_h < F\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}\,xy, \\ \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{u_h}\right| &< F y_h < Fy, \qquad (h = 1, 2) \\ \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{u_h}\right| &< F x_h < Fx. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant évaluer la valeur absolue de $g_1(x, y)$. On aura

$$\begin{aligned} |g_1(x, y)| &< F\left[(A_1 + A_2)\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}\,xy + (B_1 + B_2)\,y + (C_1 + C_2)\,x\right] \\ &< F\left[\frac{A_1 + A_2}{2}\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}\,(x+y)^2 + (B_1 + B_2 + C_1 + C_2)\,(x+y)\right]. \end{aligned}$$

Alors si l'on pose

$$F_1 = F\left\{\frac{A_1 + A_2}{2}\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}(d+d') + B_1 + B_2 + C_1 + C_2\right\}$$

on aura pour $x < d$ et $y < d'$

$$|g_1(x, y)| < F_1(x + y).$$

Donc maintenant pour l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = g_1(x, y),$$

qui s'annule le long de OI et OJ, on va appliquer les inégalités (18) et (19). On trouve :

$$|z_1(x, y)| < F_1\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\frac{(x+y)^3}{3!},$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < F_1\frac{(1+\gamma)(1+\alpha)}{1-\gamma^3}\frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < F_1\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{1-\gamma^3}\frac{(x+y)^2}{2!}.$$

De ces inégalités nous déduisons aussi les inégalités suivantes

$$|(z_1)_{M_h}| < F_1\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\frac{(x+y)^3}{3!},$$

$$\left|\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_{M_h}\right| < F_1\frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1-\gamma^3}\frac{(x+y)^2}{2!}, \qquad (h = 1, 2)$$

$$\left|\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)_{M_h}\right| < F_1\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{1-\gamma^3}\frac{(x+y)^2}{2!},$$

qui permettent d'évaluer la valeur absolue de $g_2(x, y)$. On a :

$$|g_2(x, y)| < F_1\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\frac{(x+y)^2}{2!}\{(A_1 + A_2)(x+y) + (1+\alpha)(B_1 + B_2) + (1+\beta)(C_1 + C_2)\}$$

et si nous posons

$$K = (A_1 + A_2)(d+d') + (1+\alpha)(B_1 + B_2) + (1+\beta)(C_1 + C_2),$$

on a pour $x < d$ et $y < d'$

$$|g_2(x, y)| < F_1 K\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\frac{(x+y)^2}{2!}.$$

Ensuite les inégalités (18) et (19) montrent que

$$|z_2(x,y)| < F_1 K \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)} \frac{(x+y)^4}{4!}$$

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right| < F_1 K \frac{(1+\alpha)(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)} \frac{(x+y)^3}{3!}$$

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right| < F_1 K \frac{(1+\beta)(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)} \frac{(x+y)^3}{3!}$$

et ainsi de suite.

De proche en proche on démontre qu'en général on a

$$|z_n(x,y)| < F_1 K^{n-1} \frac{(1+\gamma)^n}{(1+\gamma^3)\dots(1-\gamma^{n+2})} \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < F_1 K^{n-1} \frac{(1+\alpha)(1+\gamma)^n}{(1-\gamma^3)\dots(1-\gamma^{n+2})} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < F_1 K^{n-1} \frac{(1+\beta)(1+\gamma)^n}{(1-\gamma^3)\dots(1-\gamma^{n+2})} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}$$

de sorte que les séries (5) sont absolument et uniformément convergentes.

Ainsi le théorème énoncé au n° 21 est démontré.

En particulier ces considérations s'appliquent à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \rho\left[a(x,y)\,z(kx,ky) + b(x,y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{kx\\ky}} + c(x,y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{kx\\ky}}\right] + f(x,y),$$

où k est un nombre moindre que l'unité.

La solution trouvée par la méthode précédente est valable dans toute la région comprise entre les droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$, où les fonctions $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$ sont continues. La méthode précédente donnera les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long de OI et de OJ, de sorte que cette solution peut se prolonger au-dessus de OJ et au-dessous de OI, en résolvant un problème de Cauchy. Ce problème a été traité au n° 12.

[**25**] Reprenons les droites $X = \beta Y$, $Y = \alpha X$ et par le point $M(x,y)$ compris dans l'angle formé par ces droites menons une parallèle à Oy qui rencontre la droite $X = \beta Y$ en N et la droite $Y = \alpha X$ en N_1. Nous allons supposer que les points M_1 et M_2 que nous faisons correspondre au point $M(x,y)$ par les formules (2) sont à l'intérieur du triangle ON_1N. Dans ces conditions nous allons démontrer de nouveau l'existence d'une solution régulière de l'équation (3) qui s'anuule sur les droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$.

En procédant comme au n° 20, la question est ramenée à l'étude de la convergence des séries (5). Nous supposons que dans la région R'' limitée par les droites $Y = \alpha X$, $X = \beta Y$ et $X = d$, les fonctions $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(x, y)$ sont toutes continues. Nous désignons par $A_1, \ldots, C_2, F$ les nombres supérieurs aux valeurs absolues de $a_1(x, y), \ldots, c_2(x, y), f(x, y)$ dans cette région. Soient N' et N'' les projections de N sur Oy et Ox.

Considérons d'abord l'équation

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

En procédant comme au n° 22, les fonctions $z_0, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}$ sont données par les séries (11) et (12) et nous avons les inégalités (13), c'est-à-dire

$$|z_0(x, y)| < F\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}xy, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < Fy, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < Fx.$$

Il résulte alors que :

$$\begin{aligned} |(z_0)_{M_h}| &< F\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}x_h y_h < F\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}\frac{x^2}{\beta} \\ \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{M_h}\right| &< F y_h < F\frac{x}{\beta} \qquad (h = 1, 2) \\ \left|\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{M_h}\right| &< F x_h < Fx, \end{aligned}$$

les coordonnées du point N étant x et $\frac{x}{\beta}$.

Nous pouvons maintenant évaluer la valeur absolue de $g_1(x, y)$ et nous avons :

$$|g_1(x, y)| < F\left\{\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}(A_1 + A_2)\frac{x^2}{\beta} + (B_1 + B_2)\frac{x}{\beta} + (C_1 + C_2)x\right\}.$$

Alors si nous posons

$$F_2 = F\left[\frac{1+\gamma}{1-\gamma^2}(A_1 + A_2)\frac{d}{\beta} + (B_1 + B_2)\frac{1}{\beta} + C_1 + C_2\right]$$

on a pour $x \leqslant d$

$$|g_1(x, y)| < F_2 x. \tag{20}$$

D'après ce qu'on a vu dans le n° 23, la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = g_1(x, y),$$

qui s'annule le long des droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$, est donnée par la formule

$$z_1(x, y) = \int_{\beta y}^{x} \int_{\alpha x}^{y} h_1(s, t)\, ds\, dt$$

$h_1(x, y)$ étant la fonction définie par la série

$$h_1(x, y) = \sum_{0}^{\infty} \gamma^{2i} G_1(\gamma^i x, \gamma^i y) \tag{21}$$

avec

$$G_1(x, y) = g_1(x, y) - \gamma g_1(\beta y, \alpha x).$$

En tenant compte de l'inégalité (20), la série précédente est convergente. En effet

$$|G_1(x, y)| < F_2(x + \gamma\beta y).$$

Mais dans l'angle formé par les droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$ on a $\beta y < x$, de sorte que

$$|G_1(x, y)| < F_2(1 + \gamma)\, x.$$

On en déduit que

$$|\gamma^{2i} G_1(\gamma^i x, \gamma^i y)| < F_2(1 + \gamma)\, \gamma^{3i} x$$

et comme $\gamma < 1$, la série (2) est convergente. On a en plus

$$|h_1(x, y)| < F_2 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma^3}\, x.$$

Nous déduisons comme au n° 23 que

$$|z_1(x, y)| < F_2 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma^3} \int_0^t \int_0^{\frac{x}{\alpha}} s\, ds\, dt$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < F_2 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma^3} \left[\int_0^{\frac{y}{\beta}} \varepsilon\, dt + \alpha \int_0^t s\, ds \right]$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < F_2 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma^3} \left[\int_0^t s\, ds + \beta \int_0^{\frac{x}{\alpha}} x\, dt \right].$$

Alors si l'on pose

$$(22)\quad \varphi_0(x) = F_2 \int_0^t \int_0^{\frac{x}{\beta}} s\,ds\,dt, \qquad \psi_0(x) = F_2 \int_0^{\frac{x}{\beta}} x\,dt, \qquad \theta_0(x) = F_2 \int_0^x s\,ds,$$

on a :

$$\begin{aligned} |z_1(x,y)| &< \frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,\varphi_0(x) \\ \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| &< \frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,[\psi_0(x) + \alpha\theta_0(x)] \\ \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| &< \frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,[\theta_0(x) + \beta\psi_0(x)]. \end{aligned}$$

On démontre de la même manière qu'on a aussi

$$\begin{aligned} |(z_1)_{M_h}| &< \frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,\varphi_0(x) \\ \left|\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_{M_h}\right| &< \frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,[\psi_0(x) + \alpha\theta_0(x)] \qquad (h = 1,2) \\ \left|\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)_{M_h}\right| &< \frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,[\theta_0(x) + \beta\psi_0(x)]. \end{aligned}$$

Ces inégalités permettent d'évaluer la valeur absolue de $g_2(x,y)$. On a :

$$\begin{aligned} |g_2(x,y)| < \frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\{&(A_1 + A_2)\,\varphi_0(x) + [B_1 + B_2 + \beta(C_1 + C_2)]\,\psi_0(x) \\ &+ [C_1 + C_2 + \alpha(B_1 + B_2)]\,\theta_0(x)\} \end{aligned}$$

ou bien

$$|g_2(x,y)| < \frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,[A\varphi_0(x) + D\psi_0(x) + E\theta_0(x)],$$

en posant

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ D &= B_1 + B_2 + \beta(C_1 + C_2) \\ E &= C_1 + C_2 + \alpha(B_1 + B_2). \end{aligned}$$

Passons maintenant à l'équation

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y} = g_2(x,y).$$

La solution qui s'annule sur les droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$, est donnée par la formule

$$z_2(x, y) = \int_{\beta y}^{x} \int_{\alpha x}^{y} h_2(s, t)\, ds\, dt,$$

où

$$h_2(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^{2i} G_2(\gamma^i x, \gamma^i y)$$

avec :

$$G_2(x, y) = g_2(x, y) - \gamma g_2(\beta y, \alpha x).$$

Evaluons la valeur absolue de $h_2(x, y)$. Remarquons d'abord que

$$\varphi_0(\beta y) < \varphi_0(x), \qquad \psi_0(\beta y) < \psi_0(x), \qquad \theta_0(\beta y) < \theta_0(x),$$

de sorte que

$$|G_2(x, y)| < \frac{(1+\gamma)^2}{1-\gamma^2} [A\varphi_0(x) + D\psi_0(x) + E\theta_0(x)]$$

et

$$|G_2(\gamma^i x, \gamma^i y)| < \frac{(1+\gamma)^2}{1-\gamma^2} [A\varphi_0(\gamma^i x) + D\psi_0(\gamma^i x) + E\theta_0(\gamma^i x)].$$

Mais d'après les formules (22) on a :

$$\begin{aligned} \varphi_0(\gamma^i x) &= \gamma^{3i} \varphi_0(x) < \gamma^{2i} \varphi_0(x) \\ \psi_0(\gamma^i x) &= \gamma^{2i} \psi_0(x) \\ \theta_0(\gamma^i x) &= \gamma^{2i} \theta_0(x) \end{aligned}$$

de sorte que

$$|G_2(\gamma^i x, \gamma^i y)| < \frac{(1+\gamma)^2}{1-\gamma^2} \gamma^{2i} [A\varphi_0(x) + D\psi_0(x) + E\theta_0(x)].$$

D'où

$$|h_2(x, y)| < \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^2)(1-\gamma^4)} [A\varphi_0(x) + D\psi_0(x) + E\theta_0(x)].$$

Ensuite en posant

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \int_0^{\frac{x}{\gamma}} [A\varphi_0(s) + D\psi_0(s) + E\theta_0(s)]\, ds\, dt$$

$$\psi_1(x) = \int_0^{\frac{x}{\gamma}} [A\varphi_0(x) + D\psi_0(x) + E\theta_0(x)]\, dt$$

$$\theta_1(x) = \int_0^x [A\varphi_0(s) + D\psi_0(s) + E\theta_0(s)]\, ds$$

on démontre comme plus haut que

$$|z_2(x, y)| < \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)}\, \varphi_1(x)$$

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right| < \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)} [\psi_1(x) + \alpha\theta_1(x)]$$

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right| < \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)} [\theta_1(x) + \beta\psi_1(x)]$$

et que

$$|g_3(x, y)| < \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)} [A\varphi_1(x) + D\psi_1(x) + E\theta_1(x)]$$

et ainsi de suite.

En général si l'on pose

$$\varphi_n(x) = \int_0^x \int_0^{\frac{x}{\gamma}} [A\varphi_{n-1}(s) + D\psi_{n-1}(s) + E\theta_{n-1}(s)]\, ds\, dt$$

$$\psi_n(x) = \int_0^{\frac{x}{\gamma}} [A\varphi_{n-1}(x) + D\psi_{n-1}(x) + E\theta_{n-1}(x)]\, dt$$

$$\theta_n(x) = \int_0^x [A\varphi_{n-1}(s) + D\psi_{n-1}(s) + E\theta_{n-1}(s)]\, ds,$$

on démontre que

$$|z_n(x, y)| < \frac{(1+\gamma)^n}{(1-\gamma^3)\dots(1-\gamma^{n+2})}\, \varphi_{n-1}(x) = \overline{\varphi_{n-1}}(x)$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < \frac{(1+\gamma)^n}{(1-\gamma^3)\dots(1-\gamma^{n+2})} [\psi_{n-1}(x) + \alpha\theta_{n-1}(x)] = \overline{\psi_{n-1}}(x)$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < \frac{(1+\gamma)^n}{(1-\gamma^3)\dots(1-\gamma^{n+2})} [\theta_{n-1}(x) + \beta\psi_{n-1}(x)] = \overline{\theta_{n-1}}(x)$$

de sorte que l'étude de la convergence des séries (5) est ramenée à l'étude de la convergence des séries

$$\Sigma \rho^n \overline{\varphi}_n(x), \qquad \Sigma \rho^n \overline{\psi}_n(x), \qquad \Sigma \rho^n \overline{\theta}_n(x).$$

Remarquons que γ étant moindre que l'unité on a

$$\frac{(1+\gamma)^n}{(1-\gamma^3)\dots(1-\gamma^{n-2})} < \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\right)^n$$

de sorte que les séries précédentes sont nécessairement convergentes lorsque les séries

$$\sum \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\right)^n \rho^n \varphi_n(x), \qquad \sum \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\right)^n \rho^n \psi_n(x), \qquad \sum \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\right)^n \rho^n \theta_n(x),$$

le sont.

Or, on démontre comme au n° 6 que ces séries sont convergentes lorsque

$$x < \frac{1-\gamma^3}{1+\gamma} \frac{\beta}{\rho D}.$$

Ainsi l'existence de la solution de l'équation (3) s'annulant sur les droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$ est établie dans la région comprise entre ces droites et $X = d_1$, d_1 étant plus petit que d et $\frac{1-\gamma^3}{1+\gamma} \frac{\beta}{\rho D}$.

CHAPITRE V

Généralisations.

[**26**] Les problèmes que nous avons traités dans les chapitres precédents s'étendent à des équations fonctionnelles de la forme

$$(1)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \varphi \sum_{i=1}^{n} \left[a_i(x, y)\, z_{M_i} + b_i(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_i} + c_i(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_i} \right] + f(x, y),$$

où

$$z_{M_i} = z[\omega_i(x, y),\ \pi_i(x, y)],\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_i} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=\omega_i \\ y=\pi_i}},\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_i} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=\omega_i \\ y=\pi_i}} \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

en faisant sur les fonctions $\omega_i(x, y)$ et $\pi_i(x, y)$ des hypothèses analogues à celles que nous avons fait précédemment.

On peut dans l'équation (1) supposer même $n = \infty$, pourvu que les séries

$$\Sigma a_i(x, y), \qquad \Sigma b_i(x, y), \qquad \Sigma c_i(x, y)$$

soient uniformément convergentes.

Les démonstrations que nous avons données dans les chapitres précédents s'étendent d'elles-mêmes pour l'équation fonctionnelle du type (1).

[**27**] Les problèmes traités précédemment pour l'équation fonctionnelle (1), peuvent s'étendre aussi pour les équations intégro-différentielles de la forme

$$(2)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \varphi \int\int_{D_{x,y}} \left[A(x, y; s, t)\, z(s, t) + B(x, y; s, t) \frac{\partial z}{\partial s} + C(x, y; s, t) \frac{\partial z}{\partial t} \right] ds\, dt + f(x, y)$$

qu'on peut regarder comme généralisant les équations (1). $D_{x,y}$ est un domaine qu'on fait correspondre à tout point (x, y).

En effet partageons le domaine $D_{x,y}$ en cellules $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ et soit M_i un point bien déterminé à l'intérieur de la $i^{ème}$ cellule. Les coordonnées de ce point sont des fonctions de x et de y

$$x_i = \omega_i(x, y), \qquad y_i = \pi_i(x, y).$$

Cela étant nous pouvons remplacer l'intégrale double de l'équation (2) par sa valeur approchée

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ A(x, y; x_i, y_i)\, z_{M_i} + B(x, y; x_i, y_i) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_i} + C(x, y; x_i, y_i) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_i} \right\} \sigma_i$$

et en posant

$$a_i(x, y) = A(x, y; x_i, y_i)\, \sigma_i$$
$$b_i(x, y) = B(x, y; x_i, y_i)\, \sigma_i$$
$$c_i(x, y) = C(x, y; x_i, y_i)\, \sigma_i,$$

nous remplaçons l'équation (2) par l'équation approchée

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left[a_i(x, y)\, Z_{M_i} + b_i(x, y) \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{M_i} + c_i(x, y) \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{M_i} \right] + f(x, y)$$

qui est du type (1).

Alors, en faisant des hypothèses convenables sur la position du domaine $D_{x,y}$ par rapport au point (x, y), nous pouvons démontrer des théorèmes d'existence analogues aux théorèmes traités dans les chapitres précédents.

[28] Par exemple supposons que le domaine $D_{x,y}$ est limité par les droites $Y = \alpha X$, $X = \beta Y$ dont il a été question au n° 19 et les droites $X = x$ et $Y = y$. Démontrons alors l'existence d'une solution régulière de l'équation (2) s'annulant sur les droites $Y = \alpha X$, $X = \beta Y$. Cette solution est valable dans toute la région R limitée par les droites $Y = \alpha X$, $X = \beta Y$, $X = d$, $Y = d'$ où les fonctions $A(x, y; s, t)$, $B(x, y; s, t)$, $C(x, y; s, t)$, $f(x, y)$ sont supposées continues.

Pour démontrer ce théorème nous allons employer la méthode des approximations successives. Cherchons à satisfaire à l'équation intégro-différentielle (2) par le développement

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \varepsilon z_1(x, y) + \ldots + \varepsilon^n z_n(x, y) + \ldots .$$

Les fonctions $z_i(x, y)$ sont données de proche en proche par les équations

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} = \int_{0xy} \Big[A(x, y; s, t)\, z_{i-1}(s, t) + B(x, y; s, t) \frac{\partial z_{i-1}}{\partial s} + C(x, y; s, t) \frac{\partial z_{i-1}}{\partial t} \Big] ds\, dt = g_i(x, y)$$

$(i = 1, 2 \ldots)$

et par les conditions initiales

$$z_i(\varepsilon, \alpha x) = z_i(\beta y, y) = 0$$

$(i = 0, 1, 2 \ldots)$.

Démontrons maintenant la convergence des séries

$$\sum \varepsilon^n z_n, \qquad \sum \varepsilon^n \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \sum \varepsilon^n \frac{\partial z_n}{\partial y}. \tag{3}$$

Soient A, B, C, F des nombres supérieurs à $A(x, y; s, t)$, $B(x, y; s, t)$, $C(x, y; s, t)$, $f(x, y)$ dans la région R. Soient P et Q les projections de M sur ox et oy.

D'après les formules (13) du chapitre précédent, on a en tout point situé dans l'angle formé par les droites $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$

$$|z_0(x, y)| < F \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma^2} xy, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < Fy, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < Fx.$$

Il résulte que

$$\left| A(x, y; s, t)\, z_0 + B(x, y; s, t) \frac{\partial z_0}{\partial s} + C(x, y; s, t) \frac{\partial z_0}{\partial t} \right| < F \left(A \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma^2} st + Bt + Cs \right)$$
$$< F(s + t) \left[\frac{A}{2} \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma^2} (s + t) + B + C \right].$$

Et en posant

$$F_1 = F \left[\frac{A}{2} \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma^2} (d + d') + B + C \right],$$

le premier membre de l'inégalité précédente est moindre que $F_1(s + t)$.

Le domaine $D_{x,y}$ étant intérieur au rectangle OPMQ on a

$$|g_1(x,y)| < F_1 \int_0^x \int_0^y (s+t)\,ds\,dt < F_1 \frac{(x+y)^3}{3!}.$$

Maintenant pour avoir une limite supérieure pour l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = g_1(x,y),$$

qui s'annule sur $Y = \alpha X$ et $X = \beta Y$, nous appliquons les formules (18) et (19) du chapitre précédent. Nous aurons

$$|z_1(x,y)| < F_1 \frac{1+\gamma}{1-\gamma^5} \frac{(x+y)^5}{5!}$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < F_1 \frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1-\gamma^5} \frac{(x+y)^4}{4!}, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < F_1 \frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{1-\gamma^5} \frac{(x+y)^4}{4!}.$$

Evaluons maintenant la valeur absolue de $g_2(x,y)$. D'abord

$$\left|A(x,y;s,t)\,z_1 + B(x,y;s,t)\frac{\partial z_1}{\partial s} + C(x,y;s,t)\frac{\partial z_1}{\partial t}\right| < F_1 \frac{1+\gamma}{1-\gamma^5} \frac{(s+t)^4}{4!} \left\{\frac{A}{5}(s+t) + B(1+\alpha) + C(1+\beta)\right\}.$$

En posant

$$J = B(1+\alpha) + C(1+\beta) + \frac{A}{5}(d+d')$$

on aura pour $s < d$ et $t < d'$

$$B(1+\alpha) + C(1+\beta) + \frac{A}{5}(s+t) < J,$$

de sorte que

$$|g_2(x,y)| < F_1 J \frac{1+\gamma}{1-\gamma^5} \int_0^x \int_0^y \frac{(s+t)^4}{4!}\,ds\,dt < F_1 J \frac{1+\gamma}{1-\gamma^5} \frac{(x+y)^6}{6!}.$$

Alors d'après les formules (18) et (19) du chapitre précédent on aura

$$|z_2(x,y)| < F_1 J \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)} \frac{(x+y)^4}{8!}$$

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right| < F_1 J \frac{(1+\alpha)(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^5)(1-\gamma^4)} \frac{(x+y)^7}{7!}$$

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right| < F_1 J \frac{(1+\beta)(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^5)(1-\gamma^4)} \frac{(x+y)^7}{7!}$$

et on démontre que

$$|g_3(x,y)| < F_1 J^2 \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^5)(1-\gamma^4)} \frac{(x+y)^9}{9!}$$

et ainsi de suite.

En général on démontre que

$$|z_n(x,y)| < F_1 J^{n-1} \frac{(1+\gamma)^n}{(1-\gamma^3)\dots(1-\gamma^{3n-2})} \frac{(x+y)^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < F_1 J^{n-1} \frac{(1+\alpha)(1+\gamma)^n}{(1-\gamma^5)\dots(1-\gamma^{3n-2})} \frac{(x+y)^{3n+1}}{(3n+1)!}$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < F_1 J^{n-1} \frac{(1+\beta)(1+\gamma)^n}{(1-\gamma^5)\dots(1-\gamma^{3n-2})} \frac{(x+y)^{3n+1}}{(3n+1)!}$$

ce qui prouve que les séries (3) sont uniformément convergentes.

Ainsi le théorème est démontré et il est facile de montrer que la solution donnée par la méthode précédente est unique.