M. LÉGAUT

Sur les systèmes de points du plan. Application aux courbes gauches algébriques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1925

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1925__57__1_0>

N° D'ORDRE :
1820

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Par M. M. LÉGAUT

AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

1re THÈSE. — SUR LES SYSTÈMES DE POINTS DU PLAN. APPLICATION AUX COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1924, devant la Commission d'examen.

MM. PICARD, *Président.*

VESSIOT, } *Examinateurs.*
MONTEL, }

TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université.

14, RUE DES ARTS, 14 (SQUARE DU MUSÉE, TOULOUSE)

1924

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

	MM.	
Doyen	MOLLIARD, *Professeur*.	Physiologie végétale.
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Professeurs honoraires	P. PUISEUX.	
	VÉLAIN.	
	BOUSSINESQ.	
	PRUVOT.	
Professeurs	E. PICARD	Analyse supérieure et algèbre supér.
	KOENIGS	Mécanique physique et expérimentale
	GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Electrotechnique générale.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécan. analytique et mécan. céleste.
	HAUG	Géologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie générale.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	M^me P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	Emile BOREL	Calcul des probab. et Physique math.
	MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Mécanique rationnelle.
	LAPICQUE	Physiologie.
	GENTIL	Géographie physique.
	VESSIOT	Théorie des groupes et calcul des variations.
	COTTON	Physique générale.
	DRACH	Applicat. de l'analyse à la géométrie.
	C. FABRY	Physique.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	LEDUC	Physique théorique et physiq. céleste.
	Léon BERTRAND	Géologie appliq. et géologie régionale
	DANGEARD	Botanique.
	LESPIEAU	Théories chimiques.
	RABAUD	Biologie expérimentale.
	PORTIER	Physiologie comparée.
	MAURAIN	Physique du globe.
	MONTEL	Mathématiques générales.
	WINTREBERT	Anatomie et Histologie comparées.
	DUBOSCQ	Biologie maritime.
	N...	Géométrie supérieure.
	HÉROUARD	Zoologie.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC	Physique théorique et physiq. céleste.
	BLAISE	Chimie organique.
	PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	AUGER	Chimie analytique.
	M. GUICHARD	Chimie minérale.
	GUILLET	Physique.
	JULIA	Mathématiques générales.
	MAUGUIN	Minéralogie.
	BLARINGHEM	Botanique.
	MICHEL-LÉVY	Pétrographie.
Secrétaire	Daniel TOMBECK.	

A MON PÈRE

A MA MÈRE

PREMIÈRE THÈSE

SUR LES SYSTÈMES DE POINTS DU PLAN

APPLICATION AUX COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES

PAR M. M. LÉGAUT,

Agrégé préparateur à l'École Normale Supérieure.

INTRODUCTION

1. La première partie de ce travail est consacrée à l'étude de quelques problèmes qui se posent très naturellement au début de la géométrie algébrique. Que peut-on dire sur la formation et les propriétés d'un système de points situés dans son plan? Comment peut-on les classer, les déduire les uns des autres? Peut-on les caractériser, au moins relativement à certaines de leurs propriétés, par un ensemble fini de nombres entiers? En particulier, quel est le nombre de conditions imposées à une courbe de degré l pour passer par un système donné?

Un problème de cette catégorie fut posé pour la première fois par Cramer, lorsqu'il considéra les n^2 points d'intersection de deux courbes de degré n. Un peu plus tard, Cayley (*Cambridge Mathematical Journal*, vol. 3) étudia le système des mn points communs à deux courbes de degrés n et m. Il montra qu'en supposant $m \geqslant n$, toute courbe de degré l tel que $m \leqslant l \leqslant m+n-3$, qui contient $mn - \frac{(m+n-l-1)(m+n-l-2)}{2}$ de ces points, passe par les autres. En 1886 (*Mathematischen Annalen*, t. 26), Bacharach publie un travail sur le même sujet. En 1890 (*idem*, t. 30), Cayley présente un nouveau Mémoire où il améliore ses démonstrations. Plus récemment, M. Gambier (*Comptes rendus*, 1922, t. 175) reprit le problème sous un aspect plus général, et se proposa de construire les systèmes de points présentant, relativement aux courbes de degré l, la propriété suivante : Une telle courbe passant par A de ces points, contient nécessairement les B restants. Dans une deuxième note (*C. R.*, 1923, t. 176), il montra en particulier que pour un système donné, lorsque l augmente, le nombre des points B diminue et devient nul. Il calcula en outre leur différence pour deux valeurs de l consécutives.

Mon travail se distingue complètement de celui de M. Gambier, par la méthode et par les résultats. J'ai borné exclusivement mon étude à celle des systèmes de points simples tous distincts. J'exclue en outre toutes les considérations relatives à la réalité de ces points [1].

2. Posons d'abord quelques définitions. J'entendrai par l'expression « la courbe de degré l (satisfaisant à la propriété X) » une courbe quelconque de ce degré (satisfaisant à cette propriété, c'est-à-dire dont les coefficients de l'équation ne vérifient aucune relation (autre que celles imposées par la propriété). La *première courbe minima* d'un système A est la courbe de plus petit degré, composée ou non, qui puisse passer par A. Suivant les cas elle est unique ou dépend de paramètres. La *deuxième courbe minima* d'un système A est la courbe de plus petit degré, composée ou non, qui puisse passer par A sans se décomposer *nécessairement* en la précédente et une autre courbe. Elle n'est jamais unique, mais en général elle recoupe la précédente en un système A_1 indépendant de son choix.

Exemple. — Le système formé de sept points de l'intersection d'une conique et d'une courbe du 5^e degré admet pour courbes minima la conique et une quartique passant par ces points.

Que le système A_1 soit déterminé ou dépende du choix de la deuxième courbe minima, nous dirons qu'il est le *premier réduit de* A. Cette indétermination occasionnelle ne provoque aucune difficulté. Le premier réduit A_2 de A_1 est le *deuxième réduit de* A, etc. Construire les divers réduits de A_1 c'est réduire A. Leur ensemble est *la réduction de* A. Nous supposerons toujours que tous les réduits de A sont des systèmes de points simples distincts. Dans ces conditions, on démontre que tout système se réduit à une intersection totale de deux courbes. (Chapitre III, paragr. 7.)

C'est de l'étude de la réduction d'un système de points que je déduis certaines de ses propriétés.

3. Le plus petit système corésiduel de A sur sa première courbe minima est dit le *premier adjoint de* A, ou plus simplement l'adjoint de A. L'adjoint du premier adjoint est le *deuxième adjoint*. Je montre que c'est aussi le deuxième réduit de A. L'ensemble des adjoints successifs forme la *réduction adjointe*.

Si nous faisons passer par A deux courbes de degré quelconque, non minima pour A, qui se recoupent en B, nous dirons que B se déduit de A. Si ces courbes sont minima pour B, nous dirons aussi que B se réduit à A. Si C se déduit de B, B de A, C sera dit aussi déduit de A et nous étendrons cette définition quel que soit

---

[1] Les quelques résultats nécessaires à l'intelligence de ce travail se trouvent dans les premiers chapitres du tome II du livre de MM. Picard et Simart : *Fonctions algébriques de deux variables*.

le nombre d'intermédiaires. On démontre (Chapitre II, paragr. 2) *que les adjoints de même rang de deux systèmes qui peuvent se déduire l'un de l'autre, peuvent aussi se déduire l'un de l'autre. Leurs réductions adjointes coïncident à partir d'un certain rang.* (Chapitre II, paragr. 7.) Les courbes qui servent à faire ces déductions peuvent être composées ou non, mais je suppose que chaque partie indécomposable contient des points de A et de B.

La *singularité* d'un système A, de A points, pour les courbes de degré l, est l'excès du nombre A sur celui des conditions indépendantes imposées à une courbe de degré l, pour contenir A. Un système est dit *général*, si sa singularité pour sa première courbe minima est nulle. *Un tel système se réduit à l'intersection totale de deux droites, d'une droite et d'une conique, ou de deux coniques.* (Chapitre I, paragr. 7.)

Les expressions de la singularité d'un système dépendent de ses irrégularités : Si une partie indécomposable de la première courbe minima du réduit A_i ne contient aucun point du réduit suivant A_{i+1}, je dis que A_i *présente ou contient une irrégularité* et que A est *irrégulier*. Si aucun réduit ne présente d'irrégularité, le système est *régulier*. J'étudie ces irrégularités, et leurs répercussions sur les réductions des systèmes dérivés, dans les chapitres II et III. Je montre qu'il y a lieu de distinguer les *irrégularités stables, instables et apparentes.*

Tout système peut se déduire d'un système régulier, se réduisant soit à une intersection totale, soit à un système général. (Chapitre II, paragr. 13.)

Le rang du premier réduit général (ou celui de l'intersection totale augmentée de un) est la *spécialité* du système. Le nombre des réduits contenant une irrégularité est l'*irrégularité* du système.

La singularité s^l_A d'un système de A points, de spécialité σ, a deux expressions de formes complètement différentes suivant que le degré l est supérieur ou inférieur à un nombre entier h^A_C appelé caractéristique centrale. (Chapitre I, paragr. 11; Chapitre II, paragr. 11.)

Les nombres entiers qui interviennent dans ces formules sont les caractéristiques du système. Ce sont des fonctions très simples des degrés des diverses courbes minima des réduits. La donnée de ces nombres, et du nombre de points A, permet de construire un système ayant pour singularité l'expression correspondante. (Chapitre I, paragr. 12; Chapitre II, paragr. 14.) *Ces nombres sont intimement liés au système de points.*

Les courbes ayant pour degré les caractéristiques d'indice pair jouissent de propriétés particulières. (Chapitre II, paragr. 13.) On peut en outre énoncer la proposition suivante qui en fera sentir toute l'importance. (Chapitre III, paragr. 8.)

L'équation générale des courbes de degré l passant par un système de points peut se mettre sous la forme :

$$F_l = \sum (u_{2i} F_{h_{2i}} + v_{2i} F_{k_{2i}}) + \sum w_i F^{(i)}_{h_C} = 0$$

où les $u_{2i}\, v_{2i}\, w_i$ sont des polynômes arbitraires de degré $l-h_{2i}$, $l-k_{2i}$, $l-h_C$, les F les premiers membres des équations des courbes de degré $h_{2i}\, k_{2i}\, h_C$ (caractéristiques), choisies arbitrairement et passant par le système.

Je démontre d'ailleurs qu'il n'est pas nécessaire, lorsque l est assez grand, de prendre toutes ces courbes pour avoir l'équation générale. (Chapitre III, paragr. 9.)

4. La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'application des résultats et des méthodes précédentes à l'étude des questions suivantes relatives aux courbes gauches algébriques.

a) Combien de conditions impose une courbe gauche à une surface de degré l pour qu'elle la contienne?

b) Quel est le genre d'une courbe gauche sans point multiple?

c) Dans quelles conditions une surface de degré l, passant par l'intersection totale d'une courbe C avec une surface d'ordre n, recoupe-t-elle C suivant l'intersection totale de C avec une surface d'ordre $l-n$?

Ces problèmes furent déjà étudiés par Halphen (*Journal de l'École polytechnique*, t. 33), Nœther (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1882), puis plus tard par M. Castelnuero (*Rendiconti di Palermo*, t. 7).

J'ai résolu ces trois questions exactement pour une certaine famille de courbes gauches (chapitre IV, paragr. 7, 8, 11). J'ai démontré en outre certaines propositions qui peut-être pourraient aider à leur résolution dans le cas général.

J'ai eu en outre l'occasion de montrer comment la méthode pouvait être employée pour l'étude des systèmes de points dans l'espace. Je signale les particularités qui rendent ce problème beaucoup plus délicat (Chapitre IV, paragr. 10).

5. Je dois terminer ce rapide exposé en remerciant bien vivement M. Vessiot et M. Lebesgue de l'aide qu'ils ont bien voulu me donner pour la présentation et l'impression de ce travail, M. Gambier de l'obligeance qu'il m'a témoignée en me communiquant le Mémoire qu'il a écrit sur la question.

Je désire spécialement témoigner ma reconnaissance à M. Garnier, qui voulut bien lire une ébauche de ce Mémoire et qui m'aida de ses conseils pour la rédaction.

CHAPITRE PREMIER

Les systèmes de points réguliers.

1. Faisons d'abord quelques conventions qui préciseront et faciliteront l'exposé de ce travail.

Un système de points sera désigné par une lettre, A par exemple, le *nombre* de ses points par cette même lettre A. Dans les figures que nous ferons, nous le représenterons par *un point* A.

Nous désignerons une courbe quelconque de degré l par le symbole C_l. Nous la représenterons par un simple arc de courbe, sans nous occuper de sa véritable forme, mais simplement dans le but de faciliter les raisonnements.

Lorsqu'une courbe passera par un système de points, nous ferons passer son image par le point image du système. Pour représenter deux systèmes A et B dont l'ensemble forme l'intersection totale de deux courbes C_m et C_n, nous figurerons deux arcs de courbe convexes qui se rencontrent aux deux points A et B.

Nous désignerons souvent l'intersection totale des courbes C_m et C_n par le symbole $C_m.C_n$.

2. *Singularité de l'intersection totale* $C_m.C_n$.

Nous appellerons *singularité* d'un système A pour une courbe C_l, *l'excès* du nombre A sur le nombre de conditions indépendantes imposées à une C_l pour contenir A.

Nous nous proposons actuellement de trouver la singularité a^l_{mn} du système $A = C_m.C_n$ pour les courbes C_l.

Énonçons d'abord deux lemmes préliminaires. Rappelons un théorème dû à Nœther (¹). *Lorsqu'une courbe* C_l, *d'équation* $F_l = 0$, *passe par l'intersection totale* $C_m.C_n$, C_m *et* C_n *ne se rencontrant qu'en des points simples tous distincts, on peut mettre son équation sous la forme*

$$F_l \equiv A_{l-m} . F_m + B_{l-n} F_n \qquad (m \geqslant n \quad \text{et} \quad l \geqslant n).$$

où F_m et F_n sont les premiers membres des équations de C_m et C_n, A et B deux polynômes de degrés respectivement égaux à leurs indices.

Considérons sur une C_n le système $A = C_m.C_n$. Faisons passer par A une C_l qui recoupe C_n suivant le système B. En supposant que C_m et C_n se coupent de la

(¹) *Math. Annalen*, t. VII; *Fonctions de deux variables*, Picard et Simart, t. II, p. 1.

2

façon générale énoncée, l'équation $F_l = 0$ de C_l peut se mettre sous la forme précédente. Cette dernière montre que C_l coupe C_n aux mêmes points que la courbe d'équation $A_{l-m}.F_m = 0$. La partie due à $F_m = 0$ donne A, le système B est donc l'intersection totale de C_n avec la C_{l-m} d'équation $A_{l-m} = 0$. On peut donc dire :

1° Lemme. — *Si une courbe C_l rencontre une courbe C_n suivant l'intersection totale $C_m.C_n$, elle recoupe C_n suivant l'intersection totale $C_n.C_{l-m}$.*

Observons que le théorème de Nœther ne suppose pas les courbes C_m et C_n indécomposables. La proposition précédente ne l'exige donc pas non plus.

Considérons la série de points déterminée sur C_n par un système de courbes C_l. Nous allons montrer que :

2° Lemme. — *Une courbe C_l, pour passer par h points de C_n, est soumise à autant de conditions indépendantes qu'un groupe de la série précédente pour les contenir.*

Soient en effet R et ρ les dimensions du système de courbes C_l et de la série qu'elles déterminent sur C_n. Par un groupe de cette série passent $\infty^{R-\rho}$ courbes C_l du système. Fixons h points sur C_n. Ils imposent $h - a$ conditions aux C_l précédentes qui passent par eux, $h - b$ conditions aux groupes de la série qui les contiennent. La dimension des C_l du système passant par les h points est $R - h + a$, celle de la série résiduelle $\rho - h + b$. Par un groupe de cette dernière passent $\infty^{R-h+a-(\rho-h+b)}$ courbes C_l du système contenant les h points. Or on sait qu'il y en a $\infty^{R-\rho}$ puisque en définitive ces courbes passent par un groupe de la série initiale : $a = b$.

Reprenons la figure précédente et laissons C_l passant par A, variable. — Les systèmes B constituent une série dont nous allons déterminer la dimension de deux façons différentes.

Si $mn - a^l_{mn}$ est le nombre de conditions imposées à une C_l pour passer par A, la dimension de la série B sera $\rho_l - (mn - a^l_{mn})$ où ρ_l est la dimension de la série déterminée sur C_n par toutes les C_l du plan. D'autre part la série B est déterminée par toutes les C_{l-m} du plan. On a donc l'égalité

$$\rho_l - (mn - a^l_{mn}) = \rho_{l-m}$$
$$\rho_l - \rho_{l-m} = mn - a^l_{mn}.$$

Or,

$$\rho_l - \rho_{l-m} = (\rho_l - \rho_{l-1}) + (\rho_{l-1} - \rho_{l-2}) + \dots + (\rho_{l-m+1} - \rho_{l-m});$$

Avec des notations semblables à celles utilisées pour $A = C_m.C_n$,

$$\rho_i - \rho_{i-1} = n - a^i_{1.n}$$

et par suite :

$$(1) \qquad \boxed{a^l_{m.n} = a^l_{1.n} + a^{l-1}_{1.n} + \ldots + a^{l-m+1}_{1.n}.}$$

Pour contenir n points en ligne droite, une C_n est soumise à n conditions : $a^i_{1.n} = 0$ si $i = n$, et par suite pour $i > n$. Si $i < n$ il faut que la courbe C_i *contienne* la droite et $a^i_{1n} = n - (i + 1)$.

Quand $l - m + 1 \geqslant n - 1$ ou $l \geqslant m + n - 2$, $a^l_{mn} = 0$.

Quand $m \leqslant l < m + n - 2$, l'égalité (1) devient :

$$a^l_{mn} = 1 + \ldots + [n - (l - m + 2)] = \frac{(m + n - l - 1)(m + n - l - 2)}{2}.$$

Si maintenant nous supposons $n \leqslant l < m$, le raisonnement pris sous la forme précédente est en défaut. C_l doit se *décomposer* suivant C_n et une C_{l-n} arbitraire.

$$mn - a^l_{mn} = \frac{(l + 1)(l + 2)}{2} - \frac{(l - n + 1)(l - n + 2)}{2}$$

et en vertu de l'identité classique :

$$(2) \quad \frac{(l + 1)(l + 2)}{2} = \frac{(l - n + 1)(l - n + 2)}{2} + \frac{(l - m + 1)(l - m + 2)}{2} - \frac{(l - n - m + 1)(l - n - m + 2)}{2} + mn,$$

$$a^l_{mn} = \frac{(m + n - l - 1)(m + n - l - 2)}{2} - \frac{(m - l - 1)(m - l - 2)}{2}.$$

La singularité de l'intersection totale de deux courbes C_n et C_m ne se rencontrant qu'en des points simples, tous distincts, est donnée par l'expression

$$\underline{a^l_{mn} = \varphi(m + n - l) - \varphi(m - l)} \qquad (m \geqslant n)$$

où

$$\varphi(u - l) = \frac{(u - l - 1)(u - l - 2)}{2} \quad \text{si} \quad l < u - 2 \quad \text{et} \quad \varphi(u - l) = 0 \quad \text{si} \quad l \geqslant u - 2.$$

Remarque. — Si on avait pris C_m pour courbe base sur laquelle sont découpées les séries de points, on aurait eu l'égalité

$$(1') \qquad a^l_{n.m} = a^l_{1.m} + a^{l-1}_{1.m} + \ldots + a^{l-n+1}_{1.m}.$$

Cette égalité permet de retrouver les résultats précédents, en particulier le dernier. Si $n \leqslant l < m$

$$a^l_{n.m} = [m - (l + 1)] + \ldots + [m - (l - n + 2)] = \frac{(m + n - l - 1)(m + n - l - 2)}{2} - \frac{(m - l - 1)(m - l - 2)}{2}.$$

3. Les résultats précédents vont nous permettre de trouver la dimension de la série déterminée sur C_n, courbe simple ou composée, par toutes les C_l du plan. Elle est égale au nombre de points qu'on peut arbitrairement choisir dans l'intersection totale $C_n . C_l$.

$$\rho_l = nl - a'_{n.l}.$$

Si $l \geqslant n$

$$\rho_l = nl - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - 1 - \frac{(n-l-1)(n-l-2)}{2}.$$

Si $l < n$, un groupe de la série n'est découpé que par une seule C_l.

$$\rho_l = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - 1 = nl - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-l-1)(n-l-2)}{2}.$$

La dimension da la série $C_n . C$ sur C_n est donnée par les expressions :

$$\rho_l = nl - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \varphi(n-l). \tag{3}$$

$$\rho_l = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - 1 - \psi(n-l). \tag{4}$$

φ est la fonction définie précédemment.

$$\psi(u-l) = \frac{(u-l-1)(u-l-2)}{2} \quad \text{si} \quad l \geqslant u \qquad \psi(u-l) = 0 \quad \text{si} \quad l < u.$$

Remarquons la relation :

$$\varphi(u-l) + \psi(u-l) = \frac{(u-l-1)(u-l-2)}{2}.$$

On sait que la dimension d'une série de a points sur une C_n de genre p est égale à $a - p + i - \omega$, où i est l'indice de spécialité de la série, c'est-à-dire le nombre d'adjointes d'ordre $n-3$, linéairement indépendantes passant par l'un de ces groupes, et ω le défaut. Totalisons ces deux derniers termes en posant $\delta = \omega - i$. On a ici :

$$nl - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \varphi(n-l) = nl - p - \delta_l$$

où

$$\delta_l = \pi - p - \varphi(n-l) \tag{5}$$

si on remarque que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ est le genre maximum π d'une C_n.

4. Faisons encore quelques remarques sur une figure qui nous servira souvent.

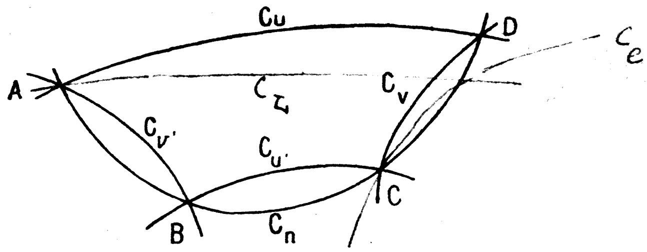


FIG. 1.

Soit $A + B$ l'intersection totale $C_n . C_{v'}$. Faisons passer par A une C_u et par B une $C_{u'}$ qui recoupent C_n en $D + C$. On sait que $C + D = C_n . C_v$ où v est donnée par l'égalité :

$$u + u' = v + v'.$$

Nous dirons que ABCD est un *quadrilatère curviligne inscrit dans* C_n.

Les systèmes opposés A et C, B et D sont *corésiduels*.

$$un - A = vn - C, \qquad v'n - A = u'n - C. \tag{6}$$

Si on fait passer par A une C_L, il existe une C_l passant par C qui détermine sur C_n, en dehors de C, le même groupe de points que C_L en dehors de A. Nous dirons que C_L *et* C_l *se correspondent sur* C_n.

$$L - u = l - v. \tag{7}$$

A la courbe de plus petit degré passant par A, extérieure à C_n, correspond la courbe de plus petit degré passant par C et extérieure à C_n.

Lorsqu'on fait varier C_L et C_l elles déterminent sur C_n la même série de points.

Systèmes de points généraux.

5. D'une façon générale, nous appellerons *première courbe minima* d'un système A, la courbe de *plus petit degré*, composée ou non, qui peut *passer* par A. Suivant les cas, elle est unique ou dépend de paramètres.

Nous appellerons aussi *deuxième courbe minima*, une des courbes de *plus petit degré* qui puisse passer par A sans se *décomposer* en la première courbe minima, et une courbe arbitraire de degré convenable. Elle n'est jamais unique.

Nous entendrons par l'expression « la première ou la deuxième courbe minima » une courbe quelconque de l'un de ces deux degrés.

Exemple. — Le système formé de sept points d'intersection d'une conique et d'une quintique, admet pour courbes minima la conique et une quartique.

Un système A sera dit *général si sa singularité pour la première courbe minima est nulle.*

La singularité pour une C_l de degré supérieur est nulle aussi, car on peut prendre pour C_l particulière la courbe minima C_n et une courbe arbitraire C_{l-n}. Le nombre des conditions indépendantes imposées à C_l est égal à celui des conditions imposées à C_n, car ce nombre ne peut pas diminuer quand on particularise C_l, et il ne peut être supérieur à A, le nombre de points.

A points pris arbitrairement forment un système général.

Les inégalités qui déterminent le degré n, de la première courbe minima, sont

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} < A \leqslant \frac{n(n+3)}{2}.$$

Si $A \neq \frac{n(n+3)}{2}$, il y a une infinité de premières courbes minima. La notion de deuxième courbe minima n'a pas ici de réalité.

Si $A = \frac{n(n+3)}{2}$, il n'y a qu'une première courbe minima. Les C_{n+1} sont deuxièmes courbes minima.

6. Considérons un système A, général ou non ; ses deux courbes minima se recoupent suivant le système A_1, que nous appellerons *premier réduit de* A. Le 1^er^ réduit A_2 de A_1 sera dit *deuxième réduit de* A, etc...

L'ensemble des réduits successifs de A constitue *la réduction de* A.

Nous dirons aussi que A *se réduit* en son réduit A_i.

Les courbes qui servent à faire la réduction seront appelées *réduites.*

Nous nous proposons d'étudier la réduction d'un système général.

7. *Réduction d'un système général.*

Soit le système général A, de courbe minima C_n. A_1 est son 1^er^ réduit.

Supposons A_1 général (on démontrera plus loin la réalité de cette hypothèse). Le degré n_1 de la première courbe minima de A_1 se calcule en utilisant les inégalités (8) et l'égalité $A + A_1 = n^2$ (ou $n^2 + n$). On obtient ainsi les résultats suivants :

TABLEAU I.

	Courbes minima de A.		Courbes minima de A_1.	
$A = \frac{n(n+3)}{2}.$	$C_n C_{n+1}$	$A_1 = \frac{n_1(n_1+1)}{2}$	$C_{n_1} C_{n_1}$	$n_1 = n-1$
$\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2 < A < \frac{n(n+3)}{2}$	$C_n C_n$	$\frac{(n_1-1)(n_1+2)}{2} < A_1 < \frac{n_1(n_1+3)}{2}$	$C_{n_1} C_{n_1}$	$n_1 = n-2$
$A = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$	$C_n C_n$	$A_1 = \frac{n_1(n_1+3)}{2}.$	$C_{n_1} C_{n_1+1}$	$n_1 = n-2$
$A = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1$	$C_n C_n$	$A_1 = \frac{n_1(n_1+1)}{2}.$	$C_{n_1} C_{n_1}$	$n_1 = n-1.$

On peut donc écrire les inégalités toujours vérifiées :

$$\boxed{n - 2 \leqslant n_1 < n.} \tag{9}$$

THÉORÈME. — *Le deuxième réduit A_2 de A est un système général.*

Pour démontrer cette proposition nous allons employer un mode de raisonnement qui nous servira souvent dans ce chapitre.

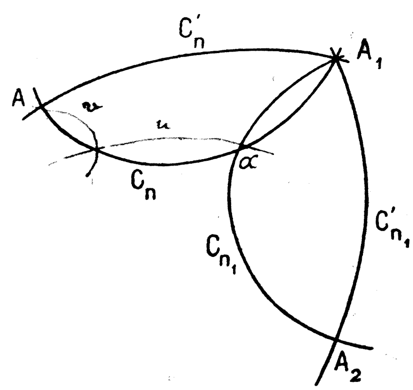


FIG. 2.

Supposons que les courbes minima de A et A_1 soient respectivement $C_n . C'_n$, $C_{n_1} C'_{n_1}$, C_{n_1} recoupe C_n suivant le système α.

A et α sont corésiduels sur C_n ; à une courbe C_n passant par A correspond une C_{n_1} passant par α, première courbe minima de α puisque $n_1 < n$ (9).

α et A_2 sont corésiduels sur C_{n_1} ; à C_{n_1} passant par α correspond une C_{2n_1-n} passant par A_2, première courbe minima pour A_2 puisque $2n_1 - n < n_1$.

Il suffit donc de montrer que la singularité $s^{n_2}_{A_2}$ de A_2 pour une courbe $C_{n_2} = C_{2n_1-n}$ est nulle.

En nous servant de la formule (3) et du deuxième lemme du paragraphe 2, nous pouvons estimer de deux façons différentes la dimension ρ de la série déterminée sur C_n par les courbes C_n et C_{n_1} correspondantes passant respectivement par A et α. Considérée comme décrite par les courbes C_n, $\rho = n^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - A$; décrite par les courbes C_{n_1}, puisque $n_1 \geqslant n - 2$, $\rho = nn_1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$ où δ est le nombre de conditions indépendantes imposées à une C_{n_1} pour passer par α.

$$(10) \qquad n^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - A = nn_1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta. \quad (\delta = \alpha)$$

Faisons de même avec les courbes correspondantes C_{n_1} et C_{n_2}, en remarquant que $n_2 \geqslant n_1 - 2$ puisque $n_1 \geqslant n - 2$.

$$(11) \qquad n_1^2 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - \delta = n_1 n_2 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - (A_2 - s^{n_2}_{A_2}).$$

Ajoutons membre à membre les égalités (10) et (11) en remarquant $n^2 - A = n_1^2 - A_2 (2nn_2 - \alpha)$

$$s^{n_2}_{A_2} = n_1(n_2 + n - 2n_1) = 0. \qquad \text{c. q. f. d. (}^1\text{).}$$

(par hypothèse)

Puisque A_1 est général, A_3 deuxième réduit de A_1 l'est aussi. *Tous les réduits de A sont généraux*. Le tableau I permet de voir comment s'effectue la réduction.

Si $A = \frac{n(n+1)}{2}$.	$A_1 = \frac{n_1(n_1+1)}{2}$	$A_2 = \frac{n_2(n_2+1)}{2}$.	$A_i = \frac{n_i(n_i+1)}{2}$.
	$n_1 = n - 1$.	$n_2 = n - 2$	$n_i = n - i$
Si $A = \frac{n(n+3)}{2}$.	$A_1 = \frac{n_1(n_1+1)}{2}$	$A_2 = \frac{n_2(n_2+1)}{2}$	$A_i = \frac{n_i(n_i+1)}{2}$.
	$n_1 = n - 1$	$n_2 = n - 2$	$n_i = n - i$
Si $A = \frac{n(n+1)}{2} + 1$	$A_1 = \frac{n_1(n_1+3)}{2}$	$A_2 = \frac{n_2(n_2+1)}{2}$	$A_i = \frac{n_i(n_i+1)}{2}$.
	$n_1 = n - 2$	$n_2 = n - 3$	$n_i = n - i - 1$.

Si $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2 < A < \frac{n(n+3)}{2}$, posons $A = \frac{n(n+3)}{2} - B \quad 0 < B < n - 1$.

(¹) La méthode serait la même si $A = \frac{n(n+3)}{2}$ ou $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Alors $n_1 = n - 2$ et $A_1 = \dfrac{(n_1+2)(n_1-1)}{2} + B = \dfrac{n_1(n_1+3)}{2} - (n_1 + 1 - B) = \dfrac{n_1(n_1+3)}{2} - B_1$.

Si $B \leqslant 2$ on est dans l'un des trois cas étudiés précédemment. Si non $n_2 = n_1 - 2$.

$$A_2 = \frac{(n_2+2)(n_2-1)}{2} + B_1 = \frac{n_2(n_2+3)}{2} - (n_2 + 1 - B_1) = \frac{n_2(n_2+3)}{2} - B_2.$$ $B_2 = B - 2$

Si $B_1 \leqslant 2$ on est dans l'un des trois cas déjà envisagés, si non continuons la réduction.

Supposons que cette éventualité ne soit pas arrivée après la k^e opération.

$B_2 = B - 2$

si $k = 2i$ $\quad B_{2i} = B - 2i \quad A_{2i+1} = \dfrac{(n_{2i+1}+2)(n_{2i+1}-1)}{2} + B_{2i} \quad n_{2i+1} = n - 4i - 2.$

si $k = 2i + 1 \quad B_{2i+1} = n - 2i - 1 - B. \quad A_{2i+2} = \dfrac{(n_{2i+2}+2)(n_{2i+2}-1)}{2} + B_{2i+1} \quad n_{2i+2} = n - 4i - 4.$

Les B_{2i} et B_{2i+1} décroissent quand l'indice croît. On aboutira donc certainement, après un nombre suffisant d'opérations, à l'un des trois cas précédents.

On voit qu'à partir de ce moment, les degrés des réduites *décroissent régulièrement d'une unité. Le dernier système réduit sera donc en général un point.*

Cet énoncé souffre deux exceptions, si l'on arrive seulement à la fin de la réduction à trouver des systèmes vérifiant un des trois cas précédents.

Si $B - 2i = 2$ et $n - 4i - 2 = 3$, ou $n - 1 - 2i - B = 2$ et $n - 4i - 4 = 3$, ce qui correspond à $B = \dfrac{n+1}{2}$, on vérifie aisément que le dernier réduit est constitué par deux points, *intersection totale* d'une droite et d'une conique.

Si $B - 2i = 2$ et $n - 4i - 2 = 2$, ou $n - 1 - 2i - B = 2$ et $n - 4i - 4 = 2$, ce qui correspond à $B = \dfrac{n}{2}$, le dernier réduit est constitué par 4 points, *intersection totale* de deux coniques.

Tout système général, dont le premier réduit est général, se réduit à une intersection totale, système général.

THÉORÈME. — *Le premier réduit d'un système général est général.*

Remarquons que l'on peut toujours faire passer par A_1 une infinité de courbes de degré $n - 1$ qui ne se décomposent pas en la première courbe minima C_{n_1} de A_1 et une courbe arbitraire.

Le tableau I nous le montre lorsque A_1 est général, et c'est vrai *a fortiori* si A_1 n'est pas général puisque ces A_1 points ne peuvent imposer plus de A_1 conditions indépendantes.

Menons alors par A_1 deux courbes C_{n-1} qui se recoupent en A'_2. A'_2 *est général* comme le montre un raisonnement identique à celui utilisé précédemment. Le degré de la première courbe minima de A'_2 est $n-2$.

Nous déduirons A'_4 de A'_2 comme A'_2 de A, etc...

Comme le degré des courbes employées décroît régulièrement d'une unité, on arrivera certainement à rencontrer *deux systèmes consécutifs généraux*.

Mais si deux systèmes consécutifs sont généraux, le précédent est général comme nous le démontrerons au paragraphe 8. On peut ainsi remonter progressivement jusqu'au système A_1. Nous pouvons donc conclure.

THÉORÈME. — *Les réduits d'un système général sont généraux. Le dernier est une intersection totale.*

Systèmes réguliers spéciaux.

8. *Systèmes réguliers de spécialité 1.*

Si une partie indécomposable de la première courbe minima de A ne passe par aucun point du premier réduit A_1, nous dirons que A *contient une irrégularité.*

Un système A sera *régulier* si aucun de ses réduits ne contient d'irrégularité.

Un système général est régulier.

Soit A_1 un système général, de premier réduit A_2. C_{n_1} et C_{n_2} sont les courbes minima de A_1 et A_2. Faisons passer par A_1 deux courbes arbitraires C_n et C_m dont les degrés vérifient les inégalités

$$m \geqslant n \qquad n \geqslant 2n_1 - n_2.$$

Ces courbes se recoupent suivant A. Nous supposons que toute partie indécomposable de C_n passe par des points de A_1.

THÉORÈME. — *Les courbes* C_n *et* C_m *sont les deux courbes minima de* A.

Reprenons la figure 2, en changeant convenablement les degrés des courbes. Soit encore α le système où C_{n_1} recoupe C_n. La courbe de plus petit degré C_ν passant par α, extérieure à C_{n_1}, correspond à celle de plus petit degré C_{n_2} passant par A_2. $\nu = n + n_2 - n_1$; or $\nu \geqslant n_1$, puisque $n \geqslant 2n_1 - n_2$; donc C_{n_1} est la première courbe minima de α. Remarquer aussi que $\rho = m + \nu - n_2 \geqslant m$

La courbe C_m, passant par A et correspondant à C_{n_1}, passant par α, est donc la deuxième courbe minima de A puisque $m \geqslant n$. A_1 est le premier réduit de A.

Un système non général dont le *premier réduit est général* et qui ne contient pas d'irrégularité est dit *régulier de spécialité 1.*

Remarque. — J'ai cru devoir employer les mots de spécial, spécialité. Le sens donné ici à ces termes n'a aucun rapport avec celui qu'on leur donne dans la théorie ordinaire des séries de points sur une courbe.

Théorème. — *Le plus petit degré de la courbe qui peut passer par* A *sans passer par* A_1 *est égale à*

$$h_2 = m + n - 2n_1 + n_2.$$

Une telle courbe correspond en effet à la courbe de plus petit degré passant par α sans être obligée de passer par A_1 c'est-à-dire à la deuxième courbe minima de α puisque C_{n_1} est première courbe minima et que C_{n_2} ne passe pas nécessairement par A_1.

La formule (7) donne alors $h_2 = m + n - 2n_1 + n_2$. $(=\rho)$

Lorsque le degré d'une courbe est compris entre m et h_2 le passage par A implique celui par A_1.

Singularité.

Elle est donnée par les formules suivantes :

$$n \leqslant l < h_2. \qquad s^l_A = \frac{(m+n-l-1)(m+n-l-2)}{2} - \varphi(m-l) - (mn - A)$$

$$h_2 \leqslant l \qquad s^l_A = 0.$$

La fonction φ a été définie à propos de l'égalité (3).

La première formule se déduit du fait que si $l < h_2$ C_l passe par l'intersection totale $A + A_1 = C_n . C_m$. D'après ce qui précède [paragr. 2], si on fait passer une C_l par $mn - \frac{(m+n-l-1)(m+n-l-2)}{2} + \varphi(m-l)$ points *convenablement choisis*, $(mn - a^{l}_{mn})$ c'est-à-dire tels que les conditions qu'ils imposent à une C_l soient toutes indépendantes, elle passe par le reste de l'intersection. On peut certainement choisir ces points tous dans le système A, autrement la courbe C_l passant par A ne serait pas obligée de passer par A_1. Une C_l contenant un tel groupe de points passe par l'intersection totale et par suite par le reste des points A.

Nous démontrerons la deuxième formule en supposant $l = h_2$, ce qui évidemment est suffisant.

La considération de la série de points déterminée sur C_{n_1} par les courbes C_{n_2} et C_ν correspondantes donne l'égalité suivante analogue à (11), si nous remarquons que $n_2 \geqslant n_1 - 2$ (9) et $\nu \geqslant n_1$ (car $n \geqslant 2n_1 - n_2$)

$$n_1 n_2 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - A_2 = n_1 \nu - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - \delta.$$

De même en utilisant les courbes correspondantes C_{h_2} et C_ν sur C_n et en remarquant que $\nu \geqslant n-2$ car $n_2 \geqslant n_1 - 2$ et $h_2 \geqslant n$ car $m \geqslant 2n_1 - n_2$.

$$n\nu - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta = nh_2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (A - s_A^{h_2}).$$

Ajoutons membre à membre en ayant égard à l'égalité $mn - A = n_1^2 - A_2$.

$$s_A^{h_2} = n(m + n - 2n_1 + n_2 - h_2) = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — Si $m = n = 2n_1 - n_2$, $h_2 = m$; le système A est général.

Si on fait passer par A_1 *deux* C_{n_1-1}, *le nouveau système* A' *est général*, proposition dont nous nous sommes servis à la fin du paragraphe 7.

Si $n_2 = n_1 - 1$. $n_1 + 1 = 2n_1 - n_2$. A' est général d'après la remarque.

Si $n_2 = n_1 - 2$. Considérons les trois systèmes A A_1 et A'. Les courbes qui relient A et A' sont de degré $n-1$. Le raisonnement fait sur la figure 2, paragraphe 7, montre que puisque A est général, A' l'est aussi. (p. 15 x)

9. *Systèmes réguliers de spécialité 2.*

Avant de passer à l'étude générale des systèmes réguliers, il est intéressant de considérer en particulier les systèmes dits de spécialité 2 et 3. Nous verrons ainsi apparaître des particularités qui convenablement généralisées seront celles que peuvent présenter les systèmes réguliers de spécialité arbitraire.

Soit A_1, un système régulier de spécialité 1 : C_{n_1} et C_{m_1} sont ses courbes minima, A_2 son premier réduit, de courbes minima C_{n_2}. Faisons passer par A_1 deux courbes $C_n C_m$ telles que $\quad m \geqslant n \quad n \geqslant n_1 + m_1 - n_2$.

Elles se recoupent suivant A. Nous faisons sur C_n les mêmes restrictions que précédemment.

Remarquons de suite que C_n et C_m ne sont pas obligées de passer par A_2 car

$$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \geqslant n_1 + m_1 - n_2 > \underbrace{n_1 + m_1 - 2n_2 + n_3}_{(h_2 \text{ pour } A} \text{ puisque } n_2 > n_3.$$

Théorème. — *Les courbes* C_n *et* C_m *sont les courbes minima de* A. *Le plus petit degré d'une courbe qui puisse passer par* A *sans contenir* A_1 *est égal à*

$$h_2 = m + n - m_1 - n_1 + n_2.$$

Ces propositions se démontrent comme précédemment.

Remarque. — Les inégalités $m \geqslant n \geqslant m_1 + n_1 - n_2$ expriment *les conditions nécessaires et suffisantes pour que* C_n *et* C_m *soient courbes minima de* A.

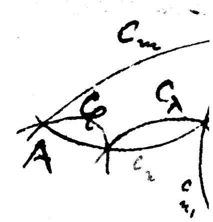
Car autrement $h_2 \leqslant n \leqslant m$ et ce serait C_{h_2} qui serait courbe minima.

Un système régulier est de spécialité 2, *si son* $2^{\text{ième}}$ *réduit est le premier réduit général.*

Singularité.

Elle est donnée par les formules suivantes :

$$n \leqslant l < h_2. \qquad s'_A = \frac{(m+n-l-1)(m+n-l-2)}{2} - \varphi(m-l) - (mn - A)$$



$$h_2 < l \qquad s'_A = \varphi(h_1 - l) + \varphi(k_1 - l).$$

$$h_1 = m + n - n_1, \qquad k_1 = m + n - m_1.$$

La première expression s'établit comme dans le paragraphe précédent.

Pour démontrer la deuxième, reprenons la figure 2, en modifiant convenablement les degrés des courbes; α est toujours le système où C_{n_1} recoupe C_n.

Soient $C_l C_\lambda C_{l_2}$ les courbes passant respectivement par A, α et A_2 et se correspondant : les deux premières sur C_n, les deux dernières sur C_{n_1}.

La considération de la série déterminée sur C_{n_1} par C_λ et C_{l_2} donne une égalité analogue à (11) en remarquant que $\lambda \geqslant n_1$ car $l_2 \geqslant n_2 \geqslant n_1 + m_1 - n$.

$$n_1 l_2 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + \varphi(n_1 - l_2) - A_2 = n_1 \lambda - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - \delta.$$

La série déterminée sur C_n par C_l et C_λ donne de même en remarquant que $l > n$

$$n\lambda - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \varphi(n-\lambda) - \delta = nl - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (A - s'_A).$$

Ajoutons membre à membre en ayant égard aux égalités

$$(12) \quad mn - A = m_1 n_1 - A_2, \qquad l = m + n - m_1 - n_1 + l_2, \qquad l = \lambda + m - n_1.$$

$$s'_A = \varphi(m + n - n_1 - l) + \varphi(m + n - m_1 - l).$$

10. *Systèmes réguliers de spécialité 3.*

On les construit à partir des systèmes réguliers de spécialité 2, comme ces derniers à partir de ceux de spécialité 1. En particulier on a toujours

$$m \geqslant n \geqslant m_1 + n_1 - n_2.$$

Sans insister sur les propriétés de ces systèmes, identiques à celles des précédents, considérons de suite l'expression de la singularité.

Singularité.

$$n \leqslant l < h_4 \qquad s'_A = \frac{(m+n-l-1)(m+n-l-2)}{2} + \psi(h_2 - l) + \psi(k_2 - l) - \varphi(m-l) - (mn - A)$$

$$h_4 \leqslant l \qquad s'_A = \varphi(h_1 - l) + \varphi(k_1 - l).$$

$$h_1 = m + n - n_1, \qquad k_1 = m + n - m_1,$$

$$h_2 = m + n - m_1 - n_1 + n_2, \quad k_2 = m + n - m_1 - n_1 + m_2, \quad h_4 = m + n - m_1 - n_1 + m_2 + n_2 - 2n_3 + n_4.$$

Les fonctions φ et ψ sont définies à propos de l'égalité 3.

Bornons-nous au cas où $h_2 \leqslant l < h_1$, les autres cas s'établissant comme précédemment. Reprenons la figure 2 convenablement modifiée. Soient toujours $C_l C_\lambda C_{l_2}$ les 3 courbes correspondantes.

De l'égalité (12) on déduit $n_2 \leqslant l_2 < m_2 + n_2 - 2n_3 + n_4$. Les courbes C_{l_2} sont obligées de passer par A_3, premier réduit de A_2.

La série déterminée sur C_{n_1} par C_λ et C_{l_2} donne l'égalité suivante si on se sert cette fois de la formule (4) en remarquant $l_2 \leqslant n_1$ puisque $n_1 \geqslant n_2 + m_2 - n_3$.

$$\frac{(l_2+1)(l_2+2)}{2} - 1 - [A_2 - s^{l_2}_{A_2}] = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} - 1 - \psi(n_1 - \lambda) - \delta .$$

La série déterminée sur C_n par C_l et C_λ donne de même en remarquant que $\lambda < n$ car $l_2 < m_1$

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} - 1 - \delta = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - 1 - \psi(n-l) - (A - s'_A).$$

Ajoutant membre à membre en se servant des égalités (12)

$$(13)\quad s^l_A - A + \frac{(l+1)(l+2)}{2} = s^{l_2}_{A_2} - A_2 + \frac{(l_2+1)(l_2+2)}{2} + \psi(m-l) + \psi(n-l).$$

Or

$$s^{l_2}_{A_2} = \frac{(m_2+n_2-l_2-1)(m_2+n_2-l_2-2)}{2} - \varphi(m_2 - l_2) - (m_2 n_2 - A_2).$$

et l'identité (2) peut s'écrire

$$(14)\quad \frac{(l_2+1)(l_2+2)}{2} + \frac{(m_2+n_2-l_2-1)(m_2+n_2-l_2-2)}{2} - \varphi(m_2 - l_2) - m_2 n_2 \equiv \psi(n_2 - l_2) + \psi(m_2 - l_2).$$

Si nous remarquons en outre que $n_2 - l_2 = h_2 - l$ et $m_2 - l_2 = k_2 - l$ on a

$$s'_A - A + \frac{(l+1)(l+2)}{2} = \psi(h_2 - l) + \psi(k_2 - l) + \psi(m-l) + \psi(n-l).$$

Et en se servant une deuxième fois de l'identité (2).

$$s'_A = \frac{(m+n-l-1)(m+n-l-2)}{2} + \psi(h_2 - l) + \psi(k_2 - l) - (mn - A).$$

11. *Systèmes réguliers de spécialité σ.*

Nous appellerons ainsi un système régulier dont le premier réduit est régulier de spécialité $\sigma - 1$, le $i^{\text{ème}}$ réduit de spécialité $\sigma - i$; le σ^{e} réduit est le premier système général de la réduction.

On obtient un pareil système en menant par A_1 système régulier de spécialité $\sigma - 1$ deux courbes C_m et C_n arbitraires mais telles que

$$m \geqslant h, \qquad n \geqslant m_1 + n_1 - n_2 .$$

Ces deux courbes ne sont pas obligées de passer par A_2. Elles sont les courbes minima du système A suivant lequel elles se recoupent. Nous faisons toujours la même restriction sur C_n.

Singularité.

Supposons que la singularité de A_2, système régulier de spécialité $\sigma - 2$, soit donnée par les formules suivantes :

$$\leqslant l_2 < h^2_C \qquad s^{l_2}_{A_2} = \frac{(m_2 + n_2 - l_2 - 1)(m_2 + n_2 - l_2 - 2)}{2} - \varphi(m_2 - l_2) - (m_2 n_2 - A_2) + \sum_{1}^{u'} [\psi(h^2_{2i} - l_2) + \psi(k^2_{2i} - l_2)]$$

$$h^2_C \leqslant l_2 \qquad s^{l_2}_{A_2} = \sum_{0}^{v'} [\varphi(h^2_{2i+1} - l_2) + \varphi(k^2_{2i+1} - l_2)]$$

où $2u'$ et $2v'$ sont les plus grands entiers pairs respectivement inférieurs à $\sigma - 2$ et $(\sigma - 2) - 1$.

$$h^2_{2i} = M_2 - M_3 + \dots + n_{2i+2}, \qquad k^2_{2i} = M_2 - M_3 + \dots + m_{2i+2}.$$
$$h^2_{2i+1} = M_2 - M_3 + \dots - n_{2i+3}, \qquad k^2_{2i+1} = M_2 - M_3 + \dots - m_{2i+3}.$$
$$h^2_C = M_2 - M_3 + \dots + n_{2u'+4} \qquad (M_j = m_j + n_j).$$

On voit aisément que ces formules sont vérifiées pour $\sigma - 2 = 1, 2$ ou 3.

Si $n \leqslant l < h_2$ C_l passe par A_1. Le raisonnement déjà employé ne dépend nullement de la réduction ultérieure de A_1. On peut donc encore écrire

$$n \leqslant l < h_2 \qquad s^l_A = \frac{(m + n - l - 1)(m + n - l - 2)}{2} - \varphi(m - l) - (mn - A).$$

Supposons $h_2 \leqslant l < h_C$ où $h_C = M - M_1 + h^2_C$.

Reprenons la figure 2, modifiée comme il a été dit. Soient toujours $C_l C_\lambda C_{l_2}$ les courbes correspondantes passant par A α et A_2. $n_2 \leqslant l_2 < h^2_C$.

Remarquons que $l_2 < n_1$ car $n_1 \geqslant h^2_1 > h^2_C$ (comme on le montrera paragraphe 12) et que $\lambda < n$ car $l_2 < m_1$ puisque $m_1 \geqslant n_1$. Nous sommes donc dans des conditions identiques à celles du paragraphe 10. On peut donc de nouveau écrire l'égalité (13). En se servant de l'identité (2) et de sa forme particulière (14), on obtient :

$$s^l_A = \frac{(m + n - l - 1)(m + n - l - 2)}{2} + \psi(h_2 - l) + \psi(k_2 - l) - (mn - A) + \sum_{1}^{u'} [\psi(h^2_{2i} - l_2) + \psi(k^2_{2i} - l_2)].$$

Or posons :

$$h_{2i} = \mathrm{M} - \mathrm{M}_1 \ldots + n_{2i}, \qquad k_{2i} = \mathrm{M} - \mathrm{M}_1 \ldots + m_{2i}.$$

En tenant compte de l'égalité (12) on a les identités

$$(15) \qquad h_{2i-2} - l = h^2_{2i} - l_2, \qquad k_{2i-2} - l = k^2_{2i} - l_2.$$

Par suite

$$\text{si} \quad h_1 \leqslant l < h_C \qquad s'_\mathrm{A} = \frac{(m+n-l-1)(m+n-l-2)}{2} + \sum_{1}^{u'+1} [\psi(h_{2i} - l) + \psi(k_{2i} - l)] - (mn - \mathrm{A})$$

où $2u' + 2$ est le plus grand entier pair inférieur à σ.

Supposons maintenant $l \geqslant h_C$, $l_2 \geqslant h^2_C$. Nous nous trouvons dans des conditions analogues à celles du paragraphe 9 : $\lambda > n_1$ car $l_2 > n_2 \geqslant n_1 + m_1 - n$ et $l > n$. On a donc :

$$s'_\mathrm{A} = \varphi(m + n - n_1 - l) + \varphi(m + n - m_1 - l) + s^{l_2}_{\mathrm{A}_2}$$

ou

$$s'_\mathrm{A} = \varphi(h_1 - l) + \varphi(k_1 - l) + \sum_{0}^{v'} [\varphi(h^2_{2i+1} - l_2) + \varphi(k^2_{2i+1} - l_2)].$$

Or posons

$$(16) \qquad h_{2i+1} = \mathrm{M} - \mathrm{M}_1 \ldots - n_{2i+1}, \qquad k_{2i+1} = \mathrm{M} - \mathrm{M}_1 \ldots - m_{2i+1}.$$

On a les identités

$$h_{2i+3} - l = h^2_{2i+1} - l_2, \qquad k_{2i+3} - l = k^2_{2i+1} - l_2.$$

Par suite, si

$$h_C \leqslant l \qquad s'_\mathrm{A} = \sum_{0}^{v'+1} [\varphi(h_{2i+1} - l) + \varphi(k_{2i+1} - l)]$$

où $2v' + 2$ est le plus grand entier pair inférieur à $\sigma - 1$.

Les formules exactes pour un système régulier de spécialité $\sigma - 2$, le sont encore pour un système régulier de spécialité σ.

Écrivons-les sous une forme plus synthétique en modifiant l'expression de la singularité lorsque $l < h_C$ à l'aide de l'identité 2. On obtient ainsi en posant $n = h_0$, $m = k_0$:

TABLEAU II.

$$h_0 \leqslant l < h_C \qquad s^l_A = A - \frac{(l+1)(l+2)}{2} + \sum_0^u [\psi(h_{2i} - l) + \psi(k_{2i} - l)]$$

$$h_C \leqslant l \qquad s^l_A = \sum_0^v [\varphi(h_{2i+1} - l) + \varphi(k_{2i+1} - l)]$$

$$\frac{\sigma - 2}{2} \leqslant u < \frac{\sigma}{2}, \qquad \frac{\sigma - 3}{2} \leqslant v < \frac{\sigma - 1}{2}.$$

$$h_{2i} = M - M_1 \ldots + n_{2i}, \qquad k_{2i} = M - M_1 \ldots + m_{2i},$$

$$h_{2i+1} = M - M_1 \ldots - n_{2i+1}, \qquad k_{2i+1} = M - M_1 \ldots - m_{2i+1},$$

$$h_C = M - M_1 \ldots + n_{2u+2}.$$

REMARQUE. — La singularité que présente un système de points A situé dans un plan, pour une courbe plane est la même que celle qu'il présente pour une surface de même degré.

Si, en particulier, on veut faire passer par A une surface d'ordre inférieur à h_0, la surface devra contenir le plan.

$$s^l_A = A - \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

C'est bien ce que donne la première expression puisque alors $\psi(h_0 - l) = 0$.

12. *Caractéristiques d'un système régulier.*

Nous venons de voir l'intérêt que présentent les symboles h et k dans l'expression de la singularité de A. Ces nombres sont intimement liés aux propriétés d'un tel système. Dans les chapitres suivants nous aurons l'occasion de voir d'autres circonstances où ils interviennent utilement. Nous les appellerons *les caractéristiques de* A. Tous ces nombres ne jouent pas le même rôle.

Le nombre h_C sera appelé *caractéristique centrale*. Les caractéristiques d'indice pair se distinguent nettement de celles d'indice impair. Nous nommerons les premières *caractéristiques paires*, les secondes *caractéristiques impaires*.

Il y a $2u + 2$ caractéristiques paires, $2v + 2$ impaires, $2\sigma + 1$ caractéristiques. Le nombre des réduites qu'il est nécessaire d'utiliser pour réduire A à A_σ est 2σ. Les 2σ caractéristiques paires et impaires qui contiennent chacune le degré d'une nouvelle réduite les déterminent. h_C contient certainement n_σ puisque $2u + 2 > \sigma$.

h_C contient aussi $n_{\sigma+1}$, si σ est impair, mais comme nous connaissons A_σ, le tableau I nous donne $n_{\sigma+1}$ en fonction de n_σ.

On obtient ainsi les expressions des degrés des réduites en fonction des caractéristiques

$$m_{2i} = H_0 - H_1 \ldots + k_{2i}, \qquad n_{2i} = H_0 - H_1 + \ldots + h_{2i},$$
$$m_{2i+1} = H_0 - H_1 \quad - k_{2i+1}, \qquad n_{2i+1} = H_0 - H_1 \ldots - h_{2i+1}. \quad (H_j = h_j + k_j).$$
$$n_\sigma = H_0 - H_1 \ldots + H_{2u} - h_C - \varepsilon \quad \text{si } \sigma \text{ est impair} \quad (\varepsilon = 1 \text{ ou } 2),$$
$$n_\sigma = H_0 - H_1 \ldots - H_{2v+1} + h_C \quad \text{si } \sigma \text{ est pair.}$$

Les caractéristiques jouissent des propriétés suivantes :

Une caractéristique k est comprise entre la caractéristique h de même indice, et celle d'indice de même parité immédiatement supérieure.

Les caractéristiques h paires ne décroissent pas avec l'indice, les impaires ne croissent pas avec l'indice.

La caractéristique centrale est supérieure aux caractéristiques paires et inférieure aux caractéristiques impaires.

On démontre aisément ces propositions en se reportant aux inégalités suivantes :

$$m_j \geqslant n_j \qquad n_j \geqslant M_{j-1} - n_{j-2} \quad \text{et leurs conséquences} \quad n_j \geqslant n_{j-1}$$

qui expriment que C_{n_j} et C_{m_j} sont les courbes minima de A_j.

Inversement, étant donnés $2\sigma + 1$ nombres, existe-t-il un système $\mathcal{A}$ de A points qui les admette pour caractéristiques ?

Si u et v ont toujours la même signification, les $2u + 2$ premiers de ces nombres rangés par ordre de grandeur croissante devront être pris pour caractéristiques paires, les $2v + 2$ derniers pour caractéristiques impaires, le nombre restant pour caractéristique centrale. D'après les propriétés énoncées il ne peut y avoir aucune ambiguïté pour donner à ces nombres leurs lettres h et k avec l'indice convenable.

Il est d'abord nécessaire que les $2\sigma + 1$ équations obtenues en égalant ces nombres aux expressions des h et k donnent un ensemble de valeurs positives aux n_j et m_j qui satisfassent aux inégalités :

$$m_j \geqslant n_j \geqslant m_{j-1} + n_{j-1} - n_{j-2}.$$

On voit aisément que ces inégalités sont vérifiées grâce à la manière dont on a choisi les h et k. Pour cette même raison les n_j ne croissent pas quand j croît. Pour que toutes ces quantités soient positives il suffit donc que :

$$n_\sigma = \Phi(h_0 k_0 \ldots h_{2u} k_{2u}, h_C, h_1 k_1 \ldots h_{2v+1} k_{2v+1}) > 0.$$

Ceci supposé, si A_σ existe, on pourra construire A. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que n_σ *soit la courbe minima de* A_σ.

$$A_\sigma = m_{\sigma-1} n_{\sigma-1} - m_{\sigma-2} \, . \, n_{\sigma-2} \ldots + (-1)^{\sigma-1} (mn - A) = F(h_0 k_0 \ldots) + (-1)^\sigma A \, .$$

On doit donc avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi > 0 \, . \\ \dfrac{(\Phi - 1)(\Phi + 2)}{2} - F < (-1)^\sigma A \leqslant \dfrac{\Phi(\Phi + 3)}{2} - F \, . \end{array} \right.$$

En particulier, *il existe toujours une infinité de systèmes de singularité donnée, vérifiant* $\Phi > 0$, car il suffit de prendre A_σ, tel que n_σ soit sa courbe minima.

REMARQUE. — Nous avons donné plus haut l'expression de Φ. Dans le cas où σ est impair pour savoir si $\varepsilon = 1$ ou 2, il faut d'abord calculer A_σ.

13. — *Nombre de paramètres dont dépend un système régulier de spécialité* σ et de caractéristiques données.

Nous déterminons le système A, de spécialité σ, par le nombre de ses points et ses caractéristiques. D'après le paragraphe précédent, nous connaissons les degrés de ses réduites successives.

Supposons que h_0 et k_0, caractéristiques de A, ne soient pas égaux.

A tout système A ne correspond qu'un seul premier réduit A_1 dont on connaît la spécialité $\sigma - 1$ et les caractéristiques.

A tout système A_1 satisfaisant à la définition précédente correspondent des systèmes A répondant à la question.

En prenant tous les systèmes A_1 et en déduisant d'eux tous les systèmes A possibles, on obtient l'ensemble des A *sans omission ni répétition.*

Faisons passer par A_1 une C_{h_0} ; comme $h_0 = n \geqslant n_1 + m_1 - n_2$, $s_{A_1}^{h_0} = 0$; la courbe dépend de $\dfrac{h_0(h_0+3)}{2} - A_1$ paramètres. Considérons sur l'une d'elles la série déterminée par les C_{k_0} passant par A_1. Comme $k_0 \geqslant h_0$, sa dimension est

$$k_0 h_0 - \frac{(h_0 - 1)(h_0 - 2)}{2} - A_1 \, .$$

Si X et X_1 sont les nombres de paramètres dont dépendent A et A_1, on a :

$$X = X_1 + \frac{h_0(h_0 + 3)}{2} + h_0 k_0 - \frac{(h_0 - 1)(h_0 - 2)}{2} - 2A_1$$ $k_0 h_0 - A + A_1$

ou

(17) $$(X - A) - (X_1 - A_1) = 3h_0 - 1 = 3n - 1 \, .$$

Si nous supposons $h_1 = k_0$, à un système A correspond sur sa première courbe minima C_{k_0} une série de systèmes A_1 de dimension $\rho = 1$, car :

$$\rho = \frac{(k_0 + 1)(h_0 + 2)}{2} - 1 - \psi(h_0 - k_0) - (A - s_A^{k_0}) \qquad \text{(formule 4)}$$

et

$$\frac{(k_0 + 1)(k_0 + 2)}{2} - A + s_A^{k_0} = \psi(h_0 - k_0) + 2\psi(k_0 - k_0) = \psi(h_0 - k_0) + 2.$$

En construisant, à partir de l'ensemble des systèmes A_1, tous les systèmes A, on obtient un ensemble de systèmes A où chacun est répété ∞^1 fois. Par suite,

$$(X + 1 - A) - (X_1 - A_1) = 3h_0 - 1.$$

Soit maintenant un système A, régulier, de spécialité σ et dont *toutes les caractéristiques d'indices différents sont inégales*. L'égalité (17) donne successivement :

$$(X - A) - (X_1 - A_1) = 3n - 1.$$
$$(X_1 - A_1) - (X_2 - A_2) = 3n_1 - 1.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(X_{\sigma-1} - A_{\sigma-1}) - (X_\sigma - A_\sigma) = 3n_{\sigma-1} - 1.$$

A_σ est général, $X_\sigma = 2A_\sigma$. En ajoutant membre à membre, on obtient donc :

$$(18) \qquad X = A + A_\sigma + 3\sum_{0}^{\sigma-1} n_i - (\sigma - 1).$$

S'il y avait c groupes de caratéristiques d'indices différents égales, il faudrait retrancher c au résultat.

Remarque. — Si σ est impair, X est indépendant de A, car

$$A + A_\sigma = mn - m_1 n_1 \dots + m_{\sigma-1} n_{\sigma-1}.$$

Le nombre de paramètres n'est fonction que des caractéristiques.

14. *Systèmes réguliers se réduisant à une intersection totale.*

Soit A_1 l'intersection totale $C_{n_1}.C_{m_1}$. Faisons passer par A_1 deux courbes C_n et C_m arbitraires telles que :

$$\underline{m \geqslant n \qquad n \geqslant m_1 + n_1.}$$

Elles se recoupent suivant le système A. Nous faisons sur C_n les mêmes restrictions que précédemment.

AX

THÉORÈME. — *Les courbes C_n et C_m sont les courbes minima de A.* (inters. totale : th. Nöther)

Soit en effet α le système où C_{n_1} recoupe C_n : $\alpha = C_{n_1} . C_{n-m_1}$. Les systèmes A et α sont corésiduels sur C_n. A la première courbe minima C_{n_1}. $(n_1 < n - m_1)$ de α correspond la courbe de plus petit degré C_m passant par A, extérieure à C_n. Or $m \geqslant n$, donc C_n et C_m sont les deux courbes minima de A.

Tout se comporte donc comme si $n_2 = 0$, d'ailleurs d'une façon générale.

Un système intersection totale se comporte comme un système régulier, dont les réduites, sauf les deux premières, sont de degré nul.

Tout ce qui a été écrit à propos des systèmes réguliers se réduisant à un système général peut être redit à propos des systèmes réguliers se réduisant à une intersection totale. Nous dirons aussi qu'un système régulier est de spécialité σ, si son σ^e réduit est un système nul, son $\sigma - 1^e$ est une intersection totale non générale. Le système nul constitue ainsi le premier réduit général.

Le nombre d'arbitraires d'un système de spécialité σ, de caractéristiques données (ici on ne se donne plus le nombre de points) est d'après l'égalité (17).

$$X - A = X_{\sigma-1} - A_{\sigma-1} + 3 \sum_{0}^{\sigma-2} n_i - (\sigma - 2) - c,$$

où

$$A = mn - m_1 n_1 \ldots + (-1)^{\sigma-1} m_{\sigma-1} n_{\sigma-1}$$

et c est le nombre de couples de caractéristiques d'indices différents égales.

On voit aisément que

$$X_{\sigma-1} = m_{\sigma-1} n_{\sigma-1} + 3 n_{\sigma-1} - 1.$$

De sorte que

$$X = mn - m_1 n_1 \ldots + (-1)^{\sigma-1} m_{\sigma-1} n_{\sigma-1} + \sum_{0}^{\sigma-1} n_i - (\sigma - 1) - c.$$

CHAPITRE II

Les systèmes de points irréguliers.

1. Faisons passer par un système A_1 deux courbes C_z et C_t ($z \geqslant t$). Si ces courbes ne sont pas minima pour le système B suivant lequel elles se recoupent, nous dirons que B *se déduit de* A. Si en outre ces courbes ne sont pas minima pour A, nous dirons aussi que A *se déduit de* B. Cette opération est la *déduction* de B à A ou de A à B.

Si C se déduit de B, B de A, C sera dit aussi déduit de A, et nous étendrons cette définition à un nombre quelconque d'intermédiaires pourvu que l'un d'eux au moins soit une déduction.

Les courbes qui servent à faire ces déductions pourront être composées ou non, mais nous supposerons, pour la courbe de *plus petit degré* C_t, que *chacune de ses parties indécomposables contient des points de* A *et* B.

Nous nous proposons dans ce chapitre l'étude des systèmes de points déduits des systèmes réguliers par des *courbes arbitraires*.

Systèmes déduits d'un système régulier par un couple de courbes.

2. Soit A un système régulier de caractéristiques $h_1 \ldots h_C \ldots h_0$, de réduits $A_1 \ldots A_\sigma$. Faisons passer par A deux courbes quelconques C_t, C_z ($z \geqslant t$) qui se recoupent en B.

A) Théorème. — *Si* $z \geqslant t \geqslant h_1$ *les 2 courbes* C_t *et* C_z *sont les courbes minima de* B.

C'est le cas étudié dans le chapitre précédent.

B) Théorème. — *Si* $z \geqslant k_1$ $t < h_1$. C_t *est une des deux courbes minima de* B.

Soit E_t le système où C_t recoupe C_n (*fig. 3*). E_t et A_1 sont corésiduels sur C_n. Comme $t + n_1 - m < n_1$, C_{t+n_1-m} correspondant sur C_n à C_{n_1} est première courbe minima de E_t. E_t et B sont corésiduels sur C_t. A C_{t-n_1-m} correspond la courbe de plus petit degré $C_{z+t-M-n_1}$ passant par B extérieure à C_t.

Si $z \geqslant h_1$ C_t est la première courbe minima de B(') si $z < h_1$ c'est $C_{z+t-M-n_1} = \Gamma = C_3$.

Dans cette hypothèse soit B_1 le système où C_{t+n_1-m} recoupe C_t.

La courbe de plus petit degré passant par B sans contenir nécessairement B_1.

correspond sur C_t à la deuxième courbe minima de E_t, puisque C_{t+n_1-m} est sa première courbe minima. La courbe de plus petit degré passant par E_t sans contenir α, correspond à C_{m_1} et est C_{t+m_1-m}.

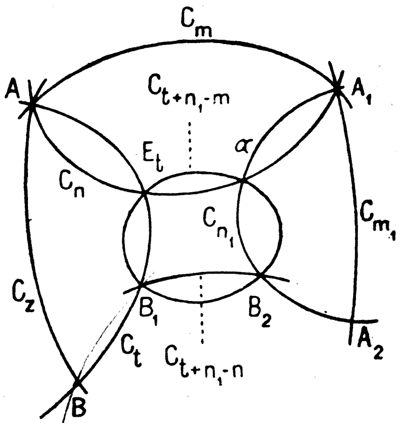


FIG. 3.

$\Gamma = C_{3+t-h_1}$

Si $t+m_1-m \geqslant n$ C_n est la deuxième courbe minima de E_t; la courbe correspondante passant par B est C_z. Comme $z \geqslant t$ C_t est la deuxième courbe minima de B.

Si $t+m_1-m < n$ C_{t+m_1-m} est la deuxième courbe minima de E_t, $C_{z+t-m+m_1}$ courbe correspondante passant par B étant de degré supérieur à t, la conclusion est la même.

(¹) En particulier si $z > h_1$, C_t est l'unique première courbe minima de B. Cette remarque permet d'établir géométriquement une proposition bien connue.

Considérons une courbe C_n présentant un groupe $\mathcal{A}$ de A points doubles. Faisons passer par $\mathcal{A}$ sa première courbe minima C_{h_0} qui recoupe la courbe en le système $B = \mathcal{A} + B'$ C_{h_0} est *à fortiori* minima pour B. En observant que tout ce que nous avons dit s'applique à ce cas où des points de B coïncident avec ceux de $\mathcal{A}$ on conclue

$$n \geqslant h_1^{\mathcal{A}}.$$

Si C_{h_0} est unique pour $\mathcal{A}$, elle sera aussi unique pour B.

Si C_{h_0} dépend de ρ paramètres ($\rho \geqslant 1$) la dimension de la série B' sera aussi ρ car on peut toujours faire passer une C_{h_0} par ρ points arbitraires de C_n (puisque $h_0 < n$ et que C_n est irréductible). Il n'y a donc encore qu'une C_{h_0} passant par un système $\mathcal{A} + B' = B$ donné. Par conséquent dans tous les cas l'égalité précédente est exclue et

$$n \geqslant h_1^{\mathcal{A}} + 1.$$

Mais alors $n-3 \geqslant h_1^{\mathcal{A}} - 2$. Cette dernière égalité montre *que le système* $\mathcal{A}$ *des points doubles de* C_n *présente* A *conditions indépendantes aux adjointes d'ordre* $n-3$ *de cette courbe.*

Cette dernière conclusion ne vaut en toute rigueur que si $\mathcal{A}$ est un système régulier. La suite du Mémoire la légitimera dans tous les cas.

Le premier réduit de B *est* B_1. (A et B_1 sont corésiduels sur C_t)

C_{t+n_1-m} est la première courbe minima de B_1 puisqu'elle correspond sur C_t à C_n.

C_{t+n_1-n} correspondant sur C_{t+n_1-m} à C_{n_1}, première courbe minima de α, est deuxième courbe minima de B_1. B_2 est ainsi le système ou C_{n_1} et C_{t+n_1-m} se recoupent.

Soit C_{t_2} une courbe passant par A_2, correspondant sur C_{n_1} à C_{t+n_1-m}. Nous dirons que C_{t_2} *et* C_t *se correspondent*.

THÉORÈME. — B_2 *se déduit de* A_2 *par l'intermédiaire de* C_{n_1} *et de* C_{t_2} *correspondant à* C_t.

Nous appellerons *adjoint* d'un système A, le système α obtenu de la façon suivante. Considérons la première courbe minima C_n de A. Une courbe arbitraire C_u passant par A recoupe C_n en M. Menons la courbe de plus petit degré passant par M, extérieure à C_n. Elle recoupe C_n suivant le système α.

Le système α, *adjoint de* A, *est le plus petit système corésiduel à* A *sur sa première courbe minima.*

Lorsque l'adjoint est unique, il *ne dépend pas* de la courbe C_u qui sert à le construire. Faisons en effet passer par A une autre courbe C_v qui recoupe C_n en N. M et N sont corésiduels sur C_n. Les courbes de plus petit degré passant par N et M, extérieures à C_n, rencontrent à nouveau C_n suivant le même système de points α puisque elles sont correspondantes.

Sur la figure 3 l'adjoint de A est α.

Si $z \geqslant h_1$ C_t est la première courbe minima de B; son adjoint est E_t.

L'adjoint de B *se déduit de l'adjoint de* A *par l'intermédiaire de* C_n *et* C_{t+n_1-m} *correspondant à* C_t.

Si $z < h_1$ $C_{z+t-M-n}$ est la première courbe minima de B. Son adjoint β est le système où C_{t+n_1-m} (1^{e} c-m. de B_1) la recoupe après être passée par B_1. $\beta B_1 E_t \alpha$ forme un quadrilatère curviligne inscrit dans C_{t+n_1-m}. Le côté curviligne $\alpha\beta$ est de degré $z - m + n_1$.

L'adjoint de B *se dédut de l'adjoint de* A *par l'intermédiaire de* $C_{t+n_1-m}C_{z+n_1-m}$ *correspondant à* $C_t.C_z$.

C) Supposons maintenant $t \leqslant z < k_1$.

C_t et C_z ne sont plus courbes minima de B. Comme nous l'avons vu dans le cas précédent, $C_{z+t-M-n_1}$ est la première courbe minima de B.

Les courbes C_{z+n_1-m}, C_{t+n_1-m} correspondant sur C_n à C_z, C_t recoupent C_n suivant les systèmes E_z, E_t dont elles sont les premières courbes minima. Elles se recoupent en β, et rencontrent à nouveau respectivement C_z et C_t en F_z et F_t. F_z et F_t sont sur $C_{z+t-M-n_1}$. (prem cbe minima de B)

Nous allons montrer que cette courbe passe par β.

Considérons pour cela les deux courbes composées $[C_z + C_{t+n_1-m}]$ et $[C_t + C_{z+n_1-m}]$.
On peut écrire avec des notations déjà employées :

$$[C_z + C_{t+n_1-m}] \cdot [C_t + C_{z+n_1-m}] = (\dot{A} + \dot{B}) + (\dot{E}_t + \dot{F}_t) + (\dot{E}_z + \dot{F}_z) + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})$$
$$[C_z + C_{t+n_1-m}] \cdot C_n = (A + E_z) + (\alpha + E_t).$$

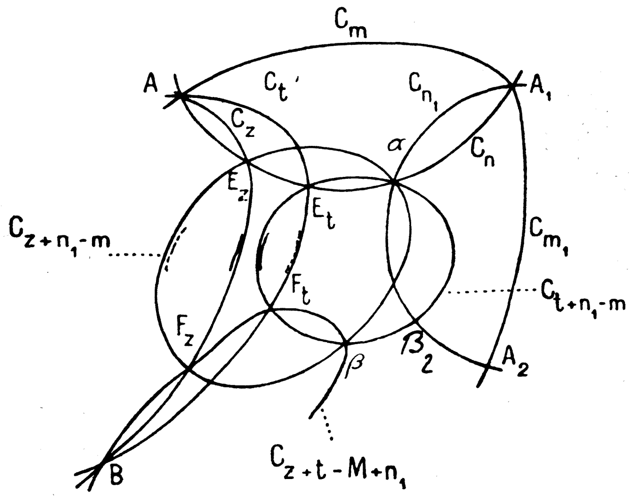


Fig. 4.

Comme C_z et C_t sont quelconques, nous pouvons appliquer le 1[er] Lemme du 2[e] paragraphe du chapitre précédent.

$$[C_z + C_{t+n_1-m}] \cdot C_{z+t-M+n_1} = B + \beta + F_t + F_z.$$

La première courbe minima de B passe donc par β. C_{t+n_1-m}, première courbe minima de F_t la recoupe suivant le système β.

β est l'adjoint de B.

L'adjoint β de B se déduit de l'adjoint α de A par l'intermédiaire de C_{t+n_1-m}, C_{z+n_1-m} correspondant à C_t, C_z.

Or l'adjoint de α est A_2, celui de β B_2, 2[e] réduit de B. D'autre part C_{t+n_1-m} ne peut pas être la première courbe minima de β puisque C_t n'est pas minima pour B. Les adjoints se correspondent donc.

B_2 se déduit de A_2 par l'intermédiaire des courbes C_{t_2} C_{z_2} correspondant à C_t et C_z.

Remarque. — Remarquons l'identité :

$$z + t - (z + t - M + n_1) = h_1 = m + n - n_1.$$

D'une manière générale on peut énoncer que *l'excès de la somme* $z+t$ *sur la plus petite caractéristique paire de* B, *différente de* t *et* z *est égal à la caractéristique* h_1 *de* A. On montre aisément que la deuxième courbe minima de B est de degré $z+t-\mathrm{M}+m_1$.

On peut en conclure de même que *l'excès de la somme* $z+t$ *sur la* 2e *caractéristique paire de* B, *différente de* z *et* t *est égal à la caractéristique* k_1 *de* A.

3. *Réduction du système* B *dans le cas où* $z \geqslant t \geqslant h_{\mathrm{C}}$.

Supposons $\quad k_{2\gamma+1} \leqslant z < k_{2\gamma-1}, \qquad h_{2\delta+1} \leqslant t < h_{2\delta-1}, \qquad z \geqslant t.$

Appelons $\mathrm{C}_{z_{2i}}$, $\mathrm{C}_{t_{2i}}$ les courbes correspondantes à C_z et C_t passant par A_{2i}. Si on affecte de l'exposant $2i$ les caractéristiques de A_{2i}, on voit en se reportant aux expressions des caractéristiques que si $2i \leqslant 2\gamma - 2 \leqslant 2\delta - 2$.

$$k^{2i}_{2\gamma-2i+1} \leqslant z_{2i} < k^{2i}_{2\gamma-2i-1}. \qquad h^{2i}_{2\delta-2i+1} \leqslant t_{2i} < h^{2i}_{2\delta-2i-1} \qquad z_{2i} \geqslant t_{2i}.$$

L'étude du cas C permet ainsi de construire la réduction de B jusqu'à $\mathrm{B}_{2\gamma}$ inclusivement. Comme $z_{2\gamma} \geqslant \mathrm{M}_{2\gamma} - m_{2\gamma+1}$, on se trouve alors dans le cas B. Il en sera ainsi jusqu'à $\mathrm{B}_{2\delta}$ inclusivement. A ce moment $t_{2\delta} \geqslant \mathrm{M}_{2\delta} - n_{2\delta+1}$ et le premier réduit de $\mathrm{B}_{2\delta}$ est $\mathrm{A}_{2\delta}$. Nous montrerons dans le chapitre suivant que la réduction de B jusqu'à $\mathrm{B}_{2\delta+1}$ est régulière.

Puisque $\mathrm{B}_{2\delta+1}$ est identique à $\mathrm{A}_{2\delta}$ la spécialité de B est $\sigma+1$, si $\mathrm{B}_{2\delta}$ n'est pas général.

Théorème. — *Le système* B *déduit d'un système* A *régulier, de spécialité* σ, *par l'intermédiaire des deux courbes* C_t *et* C_z *de degré supérieur à la caractéristique centrale de* A *est régulier de spécialité* $\sigma+1$.

Remarque. — Si $\mathrm{B}_{2\delta}$ est général, l'énoncé est en défaut. Cela suppose d'abord $\mathrm{A}_{2\delta}$ général, puisque

$$n_{2\delta} \leqslant t_{2\delta} \leqslant z_{2\delta} < 2n_{2\delta} - n_{2\delta+1} = n_{2\delta} + \varepsilon \qquad (\varepsilon = 1 \text{ ou } 2).$$

Dans le cas où $h_{\mathrm{C}} \leqslant t \leqslant z < h_{\mathrm{C}} + \varepsilon$, *le système* B *est aussi de spécialité* σ.

4. Avant d'aborder l'étude de la réduction de B dans les autres cas, il nous faut démontrer deux théorèmes qui joueront un rôle important dans la théorie.

Soit le système $A = A' + A''$ composé de l'intersection totale A' de C_{ν_A} et C_{μ_A} et du système A'' situé sur C_{μ_A}, où les nombres μ_A et ν_A vérifient l'inégalité :

$$I_A = \nu_A - \mu_A + h_1^{A''} < 0,$$

$h_1^{A''}$ étant la caractéristique correspondant à l'indice de A''. ?

A contient une irrégularité, car sa première courbe minima comprend C_{ν_A} et C_n, première courbe minima de A'', la partie C_{ν_A} ne passant par aucun point du réduit A_1. Nous dirons que A présente *une irrégularité stable*.

Considérons une courbe composée $C_{\nu_A} + C_n$, C_n passant par A''. Soit $B = B' + B''$ un système corésiduel à A sur $C_{\nu_A} + C_n$: C_{t_A} et C_{t_B} sont deux courbes correspondantes et nous supposerons $t_A \geqslant t_B$. C_{t_B}

Théorème. — *Le système* B *présente une irrégularité stable.*

La courbe C_{μ_B} correspondante à C_{μ_A} (*fig.* 5) ne recoupe pas C_{ν_A}. B' est donc l'intersection totale de C_{ν_A} et C_{μ_B} où $\mu_B = \mu_A + t_B - t_A$. D'autre part C_{μ_B} passe par B''.

Si C_{t_B} n'est pas la courbe de plus petit degré passant par X'', extérieure à C_n, soit C_q cette courbe.

D'après la remarque du paragraphe 2.

$$h_1^{A''} = n + t_A - q, \qquad h_1^{B''} = n + t_B - q.$$

On en conclut :

$$I_B = I_A.$$

Si C_{t_B} est la courbe de plus petit degré passant par X'' extérieure à C_n, soit C_p une courbe de degré égal à la caractéristique paire suivante. On a ainsi :

$$h_1^{B''} = n + t_B - p, \qquad h_1^{A''} = n + t_A - t_B, \qquad k_1^{A''} = n + t_A - p,$$

et par suite,

$$I_B = I_A + (k_1^{A''} - h_1^{A''}).$$

Dans tous les cas, on a donc

$$I_B \leqslant I_A < 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — t_A est supérieur à μ_A pour ne pas se décomposer suivant C_{ν_A} et une $C_{t-\nu_A}$, or $\mu_A > k_1^{A''}$ donc C_n est la première courbe minima de X''.

En construisant le réduit de X″, on voit que les 2^e courbes minima de X sont aussi deuxièmes courbes minima de X″. La première courbe minima de X est donc $C_n + C_{\nu_A}$.

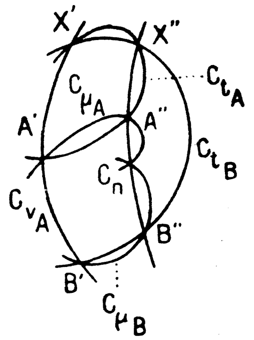


FIG. 5.

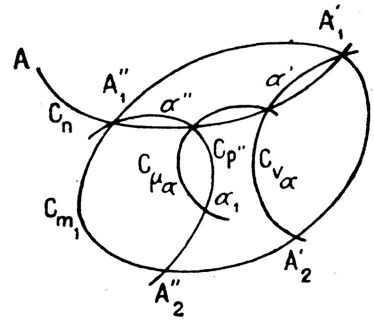


FIG. 6.

THÉORÈME. — *Le deuxième réduit A_2 d'un système A dont l'adjoint contient une irrégularité stable contient aussi une irrégularité stable.*

Soit l'adjoint $\alpha = \alpha' + \alpha''$ où $\alpha' = C_{\nu_\alpha} . C_{\mu_\alpha}$. La première courbe minima de α se compose de C_{ν_α} et de la première courbe minima $C_{p''}$ de α''. Elle recoupe C_n en $A_1 = A'_1 + A''_1$.

Comme α est adjoint de A, $C_{\nu_\alpha} + C_{p''}$ est première courbe minima de A_1. A_2 et α sont corésiduels sur cette courbe, en outre $m_1 < n$, par suite A_2 présente une irrégularité stable. (H-I)

REMARQUE 1. — Si on se borne à supposer que α contient l'irrégularité la plus générale on peut encore assurer que A_2 contient une intersection totale.

REMARQUE 2. — La condition de stabilité implique que la première courbe minima du réduit A_1 se confond avec la première courbe minima de A″, puisque $\mu_1 > h_1^{A''}$. Le deuxième réduit A_2 est ainsi l'adjoint de A″.

5. *Réduction du système* B *dans le cas où* $t < h_C < z$.

A) Supposons $h_{2\delta+2} < t < k_{2\delta+2}$, $h_{2\gamma+1} < z < h_{2\gamma-1}$, $\gamma > \delta$.

Les premières inégalités expriment que t est compris entre $n_{2\delta+2}$ et $m_{2\delta+2}$. $C_{t_{2\delta+2}}$ se décompose en $C_{n_{2\delta+2}}$ et $C_{t_{2\delta+2}-n_{2\delta+2}}$. Comme $\gamma > \delta$ $B_{2\delta+2}$ se déduit de $A_{2\delta+2}$ par l'intermédiaire de $C_{t_{2\delta+2}}$ et $C_{z_{2\delta+2}}$. $B_{2\delta+2}$, par suite comprend l'intersection totale $B'_{2\delta+2} = C_{z_{2\delta+2}} . C_{t_{2\delta+\delta}-n_{2\delta+2}}$ et un système $B''_{2\delta+2}$ déduit de $A_{2\delta+2}$ par l'intermédiaire de $C_{z_{2\delta+2}}$ et $C_{n_{2\delta+2}}$.

Les courbes minima de $B_{2\delta+2}$ sont $C_{z_{2\delta+2}}$ et la courbe composée de $C_{t_{2\delta+2}-n_{2\delta+2}}$ et de la première courbe minima $C_{n''_{2\delta+2}}$ de $B''_{2\delta+2}$. On voit par un raisonnement analogue à celui fait sur la figure 8 *que* $B_{2\delta+4}$ *se déduit de* $A_{2\delta+4}$ *par l'intermédiaire* de $C_{n_{2\delta+3}}$ et $C_{z_{2\delta+4}}$. Nous savons désormais poursuivre la réduction de B, qui se confondra à un certain rang avec celle de A.

La spécialité de B est $\sigma + 1$; *mais* B *est irrégulier*. $B_{2\delta+2}$ contient une irrégularité stable; l'inégalité I s'écrit en effet :

$$t_{2\delta+2} - n_{2\delta+2} - z_{2\delta+2} + [z_{2\delta+2} + n_{2\delta+2} - m_{2\delta+2}] < 0.$$

B) Supposons $\quad k_{2\delta} < t < h_{2\delta+2}, \qquad k_{2\gamma+1} < z < k_{2\gamma-1}, \qquad \gamma > \delta.$

Les deux premières inégalités expriment que :

$$n_{2\delta+1} < t_{2\delta} + n_{2\delta+1} - m_{2\delta} < n_{2\delta} + n_{2\delta+2} - m_{2\delta+1}.$$

La courbe $C_{t_{2\delta}+n_{2\delta+1}-m_{2\delta}}$ passant par $\alpha_{2\delta}$, correspondant à $C_{t_{2\delta}}$ se décompose ainsi en la première courbe minima $C_{n_{2\delta+1}}$ de $\alpha_{2\delta}$ et une courbe arbitraire $C_{t_{2\delta}-m_{2\delta}}$ (*fig.* 7). Comme $\gamma > \delta$, l'adjoint $\beta_{2\delta}$ de $B_{2\delta}$ se déduit de $\alpha_{2\delta}$ par l'intermédiaire des courbes $C'_{t_{2\delta}+n_{2\delta+1}-m_{2\delta}}$ $C_{z_{2\delta}+n_{2\delta+1}-m_{2\delta}}$. $\beta_{2\delta}$ par suite comprend l'intersection totale $\beta'_{2\delta}$ de $C_{z_{2\delta}+n_{2\delta+1}-m_{2\delta}}$ avec $C_{t_{2\delta}-m_{2\delta}}$ et le système $\beta''_{2\delta}$ déduit de $\alpha_{2\delta}$ par l'intermédiaire de $C_{n_{2\delta+1}}$ et $C_{z_{2\delta}+n_{2\delta+1}-m_{2\delta}}$. On voit aisément, comme précédemment, que $\beta_{2\delta}$ contient une irrégularité stable. Il en est donc de même de $B_{2\delta+2}$.

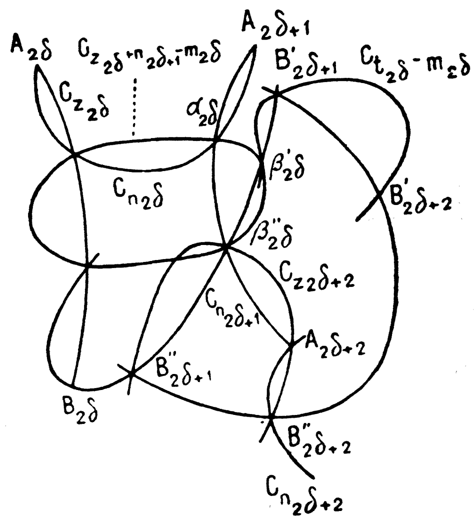


FIG. 7.

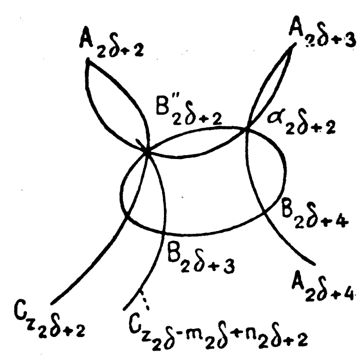


FIG. 8.

La première courbe minima de $\beta_{2\delta}$ se compose de $C_{t_{2\delta}-m_{2\delta}}$ qui recoupe la première courbe minima de $B_{2\delta}$ en $B'_{2\delta+1}$, et de la première courbe minima de $\beta''_{2\delta}$ qui passe par $A_{2\delta+2}$ puisque $\beta''_{2\delta}$ et $A_{2\delta+1}$ sont corésiduels sur $C_{n_{2\delta+1}}$.

Nous avons représenté une deuxième courbe minima de $B''_{2\delta+1}$ qui passe par $B'_{2\delta+1}$, et nous savons qu'elle est aussi deuxième courbe minima pour $B_{2\delta+1}$ (paragraphe 4). On obtient ainsi le système $B_{2\delta+2}$. Comme $B''_{2\delta+1}$ et $A_{2\delta+2}$ sont corésiduels sur $C_{z_{2\delta+2}}$, $B''_{2\delta+2}$ se déduit de $A_{2\delta+3}$ par l'intermédiaire de $C_{z_{2\delta+2}}$ et $C_{n_{2\delta+2}}$. $B'_{2\delta+2} = C_{t_{2\delta}-m_{2\delta}}$. $C_{z_{2\delta}-m_{2\delta}+n_{2\delta+2}}$ et $C_{z_{2\delta}-m_{2\delta}+n_{2\delta+2}}$ passe par $B''_{2\delta+2}$, de sorte que $B_{2\delta+3}$ est le système où cette dernière courbe rencontre la première courbe minima de $B''_{2\delta+2}$. Comme l'irrégularité est stable $B_{2\delta+4}$ est l'adjoint de $B''_{2\delta+2}$.

Considérons alors la figure 8. Comme $B''_{2\delta+2}$ et $A_{2\delta+3}$ sont corésiduels sur $C_{n_{2\delta+2}}$, la première courbe minima de $B''_{2\delta+2}$ passe par $\alpha_{2\delta+2}$. $C_{n_{2\delta+3}}$ est la première courbe minima de $\alpha_{2\delta+2}$. Elle recoupe la précédente suivant $B_{2\delta+4}$, adjoint de $B''_{2\delta+2}$.

$B_{2\delta+4}$ *se déduit de* $A_{2\delta+4}$ *par l'intermédiaire de* $C_{n_{2\delta+3}}$ *et* $C_{z_{2\delta+4}}$.

On en tire les mêmes conclusions que dans le cas précédent.

C) Supposons $\quad k_{2\delta} < t < k_{2\delta+2}, \qquad k_{2\gamma+1} < z < k_{2\gamma-1}, \qquad \gamma \leqslant \delta.$

$C_{t_{2\gamma}}$ est courbe minima pour $B_{2\gamma}$, et on sait que $B_{2\gamma+2}$ se déduit de $A_{2\gamma+2}$ par l'intermédiaire de $C_{n_{2\gamma+1}}$ et $C_{t_{2\gamma+2}}$. L'étude du cas B (paragr. 2) permet de continuer la réduction.

Si $h_{2\delta+2} < t < k_{2\delta+2}$, ou $n_{2\delta+2} < t_{2\delta+2} < m_{2\delta+2}$, $B_{2\delta+2}$ se compose de l'intersection totale $B'_{2\delta+2} = C_{n_{2\delta+1}} . C_{t_{2\delta+2}-n_{2\delta+2}}$ et du système $B''_{2\delta+2}$ déduit de $A_{2\delta+2}$ par l'intermédiaire de $C_{n_{2\delta+1}}$ et $C_{n_{2\delta+2}}$. Les courbes minima de $B_{2\delta+2}$ sont $C_{n_{2\delta+1}}$ et la courbe composée de $C_{t_{2\delta+2}-n_{2\delta+2}}$ et de $C_{n_{2\delta+2}}$ première courbe minima de $B''_{2\delta+2}$
$A_{2\delta+2}$ *est le réduit de* $B_{2\delta+2}$. On vérifie que $B_{2\delta+2}$ contient une irrégularité stable.

Si $k_{2\delta} < t < h_{2\delta+2}$, $C_{t_{2\delta}+n_{2\delta+1}-m_{2\delta}}$ passant par $\alpha_{2\delta}$ se décompose suivant $C_{n_{2\delta+1}}$ et une courbe arbitraire $C_{t_{2\delta}-m_{2\delta}}$. $\beta_{2\delta}$ par suite se compose de l'intersection totale $\beta'_{2\delta}$ de $C_{n_{2\delta}}$ et de $C_{t_{2\delta}-m_{2\delta}}$ et du système $\beta''_{2\delta}$ identique à $A_{2\delta+1}$. $\beta_{2\delta}$ présente une irrégularité stable; $B_{2\delta+2}$ aussi.

On suit aisément sur la figure 9 la construction de $B_{2\delta+1}$ et $B_{2\delta+2}$. En particulier $B'_{2\delta+2}$ est l'intersection totale de $C_{t_{2\delta}-n_{2\delta}}$ et $C_{n_{2\delta}+n_{2\delta+2}-m_{2\delta+1}}$. $B''_{2\delta+2}$ est sur cette dernière courbe, de sorte que $B_{2\delta+3}$ est le système où $C_{n_{2\delta+2}}$ première courbe minima de $B''_{2\delta+2}$ recoupe $C_{n_{2\delta}+n_{2\delta+2}-m_{2\delta+1}}$. D'ailleurs l'adjoint de $B''_{2\delta+2}$ est le système $A_{2\delta+3}$. par conséquent $B_{2\delta+4}$ *se confond avec* $A_{2\delta+3}$.

Il est clair que si z est supérieur à h_1, les résultats sont les mêmes.

Nous montrerons au chapitre suivant qu'il n'y a pas d'autres irrégularités.

Théorème. — *Le système* B, *déduit d'un système* A *régulier, de spécialité* σ, *par l'intermédiaire de deux courbes* C_t *et* C_z *telles que* $t < h_C < z$ *est irrégulier d'ordre un et de spécialité* $\sigma + 1$.

6. *Réduction du système* B *dans le cas où* $t \leqslant z < h_C$.

Supposons $k_{2\delta} < t < k_{2\delta+2}$, $k_{2\gamma} < z < k_{2\gamma+2}$, $\gamma \geqslant \delta$.

Si $\gamma > \delta + 1$ les raisonnements précédents suffisent pour faire la réduction. Ils

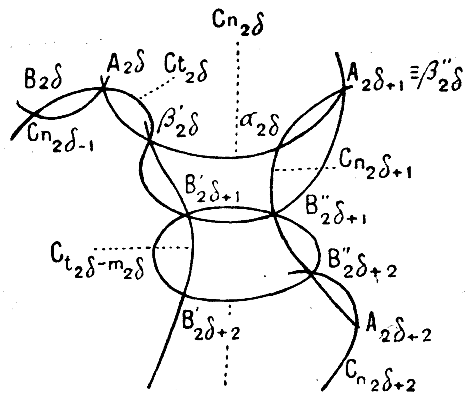
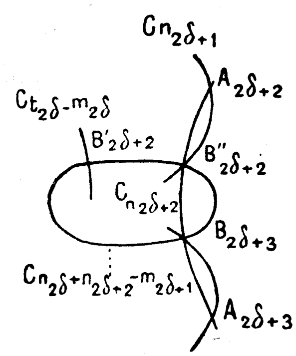


Fig. 9.



Eig. 10.

montrent que $B_{2\delta+2}$ contient une irrégularité stable et que $B_{2\delta+4}$ se déduit de $A_{2\delta+4}$ par l'intermédiaire de $C_{n_{2\delta+3}}$ et $C_{z_{2\delta+4}}$. La réduction de $B_{2\delta+4}$ contient de même une irrégularité stable.

Si $\gamma = \delta$ ou $\delta + 1$, les résultats sont les mêmes. Les raisonnements doivent être un peu modifiés, car les deux irrégularités se trouvent dans le même réduit pair, ou dans deux réduits pairs consécutifs.

Théorème. — *Le système* B, *déduit d'un système* A *régulier, de spécialité* σ, *par l'intermédiaire de deux courbes* C_t *et* C_z *de degré inférieur à la caractéristique centrale de* A, *est irrégulier d'ordre deux, et de spécialité* $\sigma + 1$.

Remarque. — Tous les nouveaux systèmes de points que nous venons d'étudier ne possèdent quand ils sont irréguliers que des irrégularités stables. Leur réduction se confond toujours à un certain rang avec la réduction du système régulier dont ils sont déduits.

Si le système régulier se réduit à une intersection totale, nous démontrerons plus loin qu'il en est de même du système déduit. C'est un cas particulier de la remarque précédente, si on considère le système nul comme le dernier réduit.

7. *Propriétés des courbes caractéristiques paires de* A.

Nous appellerons ainsi les courbes de degré égal à une caractéristique paire de A.

Théorème. — *Les courbes caractéristiques paires de* A *ne provoquent aucune irrégularité dans la réduction de* B.

Reportons-nous aux paragraphes précédents. Supposons par exemple

$$t = k_{2\delta}, \quad k_{2\gamma+1} < z < k_{2\gamma+1}, \quad \gamma > \delta.$$

Considérons la figure 7.

L'adjoint $\beta_{2\delta}$ est constitué par le seul système $\beta''_{2\delta}$ car $\beta'_{2\delta}$ disparaît puisque l'une des courbes de cette intersection totale a son degré qui s'annule. L'irrégularité de $\beta_{2\delta}$ disparaît, et avec elle celle de $B_{2\delta+2}$. c. q. f. d.

L'adjoint $\beta_{2\delta}$ se déduit de $A_{2\delta+2}$ par l'intermédiaire des courbes $C_{t_{2\delta+1}}$ et $C_{z_{2\delta+2}}$. Les réduits pairs ultérieurs de B vont se déduire des adjoints des réduits de même indice de A. *La réduction de* B *ne pourra plus venir se confondre avec celle de* A.

Ce fait est général comme on peut le voir en considérant les autres cas étudiés.

Si les deux courbes C_t et C_z sont des courbes caractéristiques paires, la réduction de B vient de nouveau se confondre avec celle de A.

Théorème. — *La réduction du système déduit de* A *par un seul couple de courbes dont une seule est courbe caractéristique paire de* A *ne se confond jamais avec celle de* A.

Appelons *réduction adjointe*, la succession des adjointes de A. La réduction adjointe comprend tous les réduits pairs de A, et leurs adjoints. On peut dire :

La réduction adjointe d'un système déduit de A *par un seul couple de courbes vient toujours se confondre avec celle de* A.

Signalons encore une propriété que nous établirons plus facilement un peu plus loin.

Théorème. — *Le système* B *déduit du système* A, *régulier de spécialité* σ, *par un couple de courbes, est de spécialité* σ *si l'une d'entre elles est courbe caractéristique paire, de spécialité* $\sigma - 1$ *si les deux sont des courbes caractéristiques paires.*

Cette proposition montre la grande analogie qui existe entre les deux courbes minima et les courbes caractéristiques paires.

Systèmes déduits d'un système régulier par deux couples de courbes.

8. Passons maintenant à l'étude des systèmes B déduits des systèmes obtenus précédemment que nous appellerons A, par l'intermédiaire des courbes arbitraires C_z et C_t ($z \geqslant t$).

Nous définirons formellement les caractéristiques des systèmes irréguliers, comme celles des systèmes réguliers. Soit $A_{2\delta}$ un système réduit de A qui présente une irrégularité stable. $A_{2\delta}$ est composé de l'intersection totale $A'_{2\delta}$ de $C_{\nu_{2\delta}} C_{\mu_{2\delta}}$ et du système $A''_{2\delta}$ de première courbe minima $C_{n''_{2\delta}}$. Nous poserons :

$$h_{2\delta} = M - M_1 \dots + (\nu_{2\delta} + n''_{2\delta}), \qquad k_{2\delta} = M - M_1 + \dots + \mu_{2\delta}.$$

Dans toutes les caractéristiques d'indice supérieur à 2δ, $\nu_{2\delta} + n''_{2\delta}$ et $\mu_{2\delta}$ joueront le rôle de $n_{2\delta}$ et $m_{2\delta}$.

L'inégalité qui exprime la stabilité de l'irrégularité s'écrit avec ces notations :

$$k_{2\delta+1} < k_{2\delta}.$$

Comme la première courbe minima de $A_{2\delta+2}$ est $C_{n''_{2\delta}}$: $h_{2\delta+1} = \nu_{2\delta} + k_{2\delta}$,

$$k_{2\delta} < h_{2\delta+1}.$$

Les raisonnements faits précédemment ne supposent rien sur la régularité du système A. Ils sont donc applicables quand A est irrégulier. Le système B pourra ainsi avoir des irrégularités provenant des valeurs de t ou z inférieures à la caractéristique centrale de A.

Le seul fait nouveau est la présence d'irrégularité stable dans des réduits pairs de A. Nous allons étudier l'influence de l'irrégularité $A_{2\delta}$ dans la réduction de B.

Théorème. — *Une irrégularité stable d'un réduit pair de* A, *provoque dans la réduction de* B *une irrégularité stable dans un réduit impair.*

Pour abréger l'exposé, nous ne considérerons que les cas où les précédentes irrégularités ne viennent pas se mêler à celles que nous allons étudier. Quand $B_{2\delta}$ se déduira de $A_{2\delta}$ par l'intermédiaire de $C_{t_{2\delta}}$, nous supposerons que cette courbe n'est pas obligée de se décomposer suivant $C_{n''_{2\delta}}$ et une courbe arbitraire. Lorsque $t_{2\delta} < \mu_{2\delta}$ $C_{t_{2\delta}}$ se décomposera suivant $C_{\nu_{2\delta}}$ et $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$. D'autre part la deuxième courbe minima de $A''_{2\delta}$ est de degré $\mu_{2\delta} + n''_{2\delta} - M_{2\delta+1} + n_{2\delta+2}$. Nous supposerons donc dans ce cas :

$$t_{2\delta} - \nu_{2\delta} \geqslant \mu_{2\delta} + n''_{2\delta} - M_{2\delta+1} + n_{2\delta+2} \quad \text{ou} \quad t \geqslant h_{2\delta+2}.$$

A) L'éventualité la plus simple est celle où $A_{2\delta}$ fait partie de la réduction de B.

Supposons $z > k_{2\delta}$ et $t > k_{2\delta+1}$. $B_{2\delta}$ se déduit de $A_{2\delta}$ par l'intermédiaire de $C_{z_{2\delta}}$ et $C_{t_{2\delta}}$ ou de $C_{t_{2\delta}}$ et $C_{n_{2\delta-1}}$ si la réduction de B n'est pas déjà confondue avec celle de A. Comme l'irrégularité est stable, dans les deux cas $B_{2\delta-1}$ est confondu avec $A_{2\delta}$.

Il en serait ainsi encore si $t \leqslant z < k_{2\delta-2}$.

B) Supposons $z > k_{2\delta}$, $\quad h_{2\delta+2} \leqslant t < k_{2\delta+1}$.

$C_{t_{2\delta}}$ se décompose suivant $C_{\nu_{2\delta}}$ et $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$. De sorte que $B_{2\delta}$ dans l'hypothèse qu'il se déduit de $A_{2\delta}$ par l'intermédiaire de $C_{t_{2\delta}}$ et $C_{z_{2\delta}}$ se compose de l'intersection totale $B'_{2\delta} = C_{\nu_{2\delta}} . C_{z_{2\delta}-\mu_{2\delta}}$ et du système $B''_{2\delta}$ déduit de $A''_{2\delta}$ par $C_{z_{2\delta}}$ et $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$.

D'après une remarque du paragraphe 4, nous savons que $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$ est première courbe minima de $B''_{2\delta}$ et que la deuxième courbe minima de $B_{2\delta}$ l'est aussi pour $B''_{2\delta}$.

Si $z_{2\delta} - \mu_{2\delta} > \nu_{2\delta}$, la première courbe minima de $B_{2\delta}$ est donc $C_{\nu_{2\delta}} + C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$.

La deuxième courbe minima de $B_{2\delta}$ recoupe cette dernière suivant

$$B_{2\delta+1} = B'_{2\delta+1} + B''_{2\delta+1}. \qquad (\textit{fig. 11}).$$

$B_{2\delta+1}$ et $A_{2\delta}$ sont corésiduels sur $C_{\nu_{2\delta}} + C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$, $z_{2\delta}$ est supérieur au degré de la deuxième courbe minima de $B_{2\delta}$, *donc* $B_{2\delta+1}$ *contient une irrégularité stable.*

Si $z_{2\delta} - \mu_{2\delta} < \nu_{2\delta}$ la première courbe minima de $B_{2\delta}$ serait $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}} + C_{z_{2\delta}-\mu_{2\delta}}$. Avec une méthode semblable on serait arrivé au même résultat.

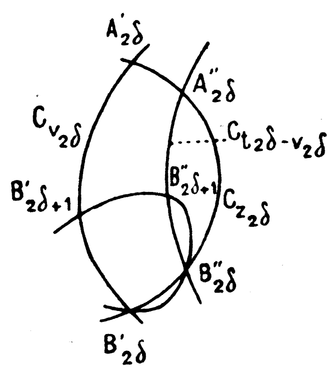


FIG. 11.

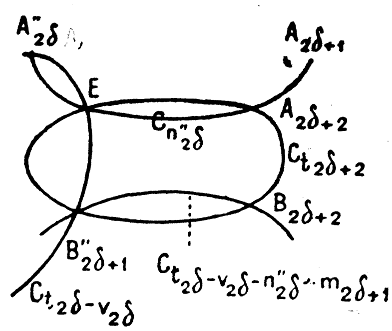


FIG. 12.

Poursuivons la réduction de B en supposant par exemple $z_{2\delta} - \mu_{2\delta} > \nu_{2\delta}$.

$B'_{2\delta+1} = C_{\nu_{2\delta}} . C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}-n''_{2\delta}+m_{2\delta+1}}$. Cette dernière courbe passe par $B''_{2\delta+1}$. De sorte que $B_{2\delta+2}$ est le système où cette courbe recoupe la première courbe minima de $B''_{2\delta+1}$.

Comme $B''_{2\delta+1}$ est le plus petit système corésiduel à $A''_{2\delta}$ sur $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$, la première courbe minima de $B''_{2\delta+1}$ passe par le système E où $C_{n''_{2\delta}}$ recoupe $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$ et détermine à nouveau sur $C_{n''_{2\delta}}$ l'adjoint de $A''_{2\delta}$, $A_{2\delta+2}$, cette courbe minima est $C_{t_{2\delta+2}}$.

Le quadrilatère curviligne $A_{2\delta+2} E B''_{2\delta+1} B_{2\delta+2}$ est inscrit dans $C_{t_{2\delta+2}}$. Le côté curviligne $A_{2\delta+2} B_{2\delta+2}$ a pour degré :

$$t_{2\delta} - \nu_{2\delta} - n''_{2\delta} + m_{2\delta+1} + n''_{2\delta} - (t_{2\delta} - \nu_{2\delta}) = m_{2\delta+1}.$$

$B_{2\delta+2}$ *se déduit de* $A_{2\delta+2}$ *par l'intermédiaire de* $C_{m_{2\delta+1}}$ *et* $C_{t_{2\delta+2}}$.

La réduction ultérieure de B est donc connue.

Si $B_{2\delta}$ se déduisait de $A_{2\delta}$ par l'intermédiaire de $C_{n_{2\delta-1}}$ et $C_{t_{2\delta}}$ le raisonnement et le résultat seraient identiques.

C) Supposons $\quad k_{2\delta+1} < t \leqslant z < k_{2\delta}$.

Nous savons faire la réduction de B jusqu'à l'adjoint $\beta_{2\delta-2}$ de $B_{2\delta-2}$, que l'on déduit de $\alpha_{2\delta-2}$ par l'intermédiaire des deux courbes $C_{t_{2\delta}+n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$ et $C_{z_{2\delta}+n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$. Les courbes $C_{t_{2\delta}}$ et $C_{z_{2\delta}}$ se décomposent toutes les deux, suivant la courbe $C_{\nu_{2\delta}}$ et deux courbes arbitraires $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$, $C_{z_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$ passant par $A''_{2\delta}$. $\beta_{2\delta-2}$ contient ainsi le système $\beta'_{2\delta-2}$ où $C_{\nu_{2\delta}}$ recoupe $C_{n_{2\delta-1}}$ et un système complémentaire $\beta''_{2\delta-2}$.

$\beta_{2\delta-2}$ et $E'_z + \beta'_{2\delta-2}$ sont corésiduels sur $C_{z_{2\delta}+n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$; $C_{t_{2\delta}+n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$ correspondant sur cette courbe à $C_{n_{2\delta-1}}$, deuxième courbe minima de $E'_z + \beta'_{2\delta-2}$ est aussi deuxième courbe minima pour $\beta_{2\delta-2}$ puisque $t_{2\delta} < z_{2\delta}$.

$\beta_{2\delta-2}$ et $E'_t + \beta'_{2\delta-2}$ sont corésiduels sur $C_{t_{2\delta}+n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$. Or $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}} + C_{\nu_{2\delta}}$ est la première courbe minima de $E'_t + \beta'_{2\delta-2}$ si $n_{2\delta-1} - \mu_{2\delta} > n_{2\delta}$. Elle rencontre donc à nouveau $C_{t_{2\delta}+n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$ suivant le premier réduit $\beta_{2\delta-1}$ de $\beta_{2\delta-2}$.

Comme $\beta_{2\delta-1}$ et $\alpha_{2\delta-2}$ sont corésiduels sur $C_{t_{2\delta}+n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$, la courbe $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}} + C_{\nu_{2\delta}}$ est la première courbe minima de $\beta_{2\delta-1}$, et $A_{2\delta}$ est l'adjoint de $\beta_{2\delta-1}$.

$B_{2\delta+1}$ *coïncide avec* $A_{2\delta}$.

Si $n_{2\delta-1} - \mu_{2\delta} < n_{2\delta}$, la première courbe minima de $E'_t + \beta'_{2\delta-2}$ serait $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}} + C_{n_{2\delta-1}-\mu_{2\delta}}$ et le même raisonnement donne le même résultat.

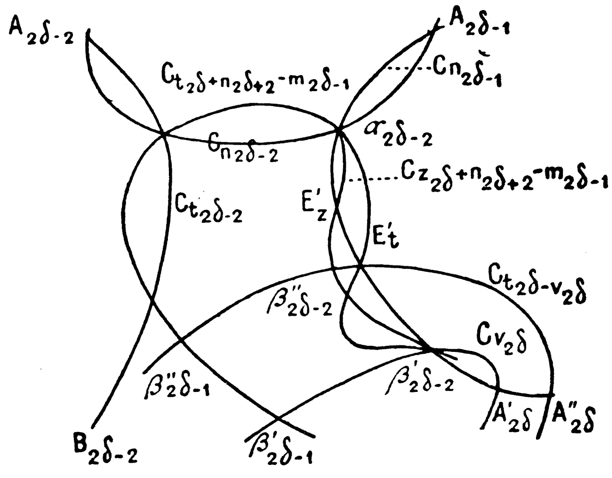


FIG. 13.

D) Supposons $\quad h_{2\delta+2} \leqslant t \leqslant z < k_{2\delta+1}$.

Comme dans le cas précédent on obtient $\beta_{2\delta-2}$. Reprenons la figure 13 en remplaçant $\beta_{2\delta-1}$ par K. Comme précédemment la première courbe minima de $\beta_{2\delta-2}$ passe par K. Les systèmes K et $A_{2\delta}$ sont corésiduels sur $C_{y_{2\delta}} + C_{t_{2\delta}-y_{2\delta}}$. Comme les courbes $C_{n_{2\delta-1}}$ et $C_{t_{2\delta}+n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$ ne sont pas minima pour E'_{t}, on peut écrire

$$I_{K} = I_{A_{2\delta}}.$$

K présente donc une irrégularité stable.

$B_{2\delta-1}$ est le système où la première courbe minima de $\beta_{2\delta-2}$ recoupe la première courbe minima de $B_{2\delta-2}$. $B_{2\delta-1}$ et $B_{2\delta-2}$ sont ainsi corésiduels sur la première courbe minima de $\beta_{2\delta-2}$, et pour la même raison :

$$I_{B_{2\delta-1}} = I_{K}.$$

$B_{2\delta-1}$ *présente une irrégularité stable.*

Du fait de cette irrégularité, $B_{2\delta+1}$ est confondu avec le premier réduit de $\beta''_{2\delta-2}$. Le deuxième adjoint de $\beta''_{2\delta-2}$ est confondu avec $B_{2\delta+2}$. Or $\beta''_{2\delta-2}$ se déduit de $\alpha_{2\delta-2} + \beta'_{2\delta-2}$ par l'intermédiaire des courbes $C_{t_{2\delta}\ n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$ et $C_{z_{2\delta}\ n_{2\delta-2}-m_{2\delta-1}}$. L'adjoint de ce système est $A''_{2\delta}$, son deuxième adjoint $A_{2\delta+2}$; par conséquent, $B_{2\delta+2}$ *se déduit de* $A_{2\delta+2}$ *par l'intermédiaire des courbes* $C_{t_{2\delta+2}}$. $C_{z_{2\delta+2}}$.

E) Supposons $h_{2\delta+2} < t < k_{2\delta+1}$, $k_{2\delta+1} < z < k_{2\delta}$.

Il suffit de reprendre la même méthode. En particulier le premier adjoint de $\beta''_{2\delta-2}$ se déduit de $A''_{2\delta}$ par les courbes $C_{t_{2\delta}-y_{2\delta}}$, $C_{z_{2\delta}-y_{2\delta}}$ dont la première est première courbe minima, puisque $z_{2\delta} - y_{2\delta} > \mu_{2\delta} + n''_{2\delta} - m_{2\delta+1}$.

$B_{2\delta+2}$ *se déduit de* $A_{2\delta+2}$ *par l'intermédiaire des courbes* $C_{t_{2\delta+2}}$ et $C_{n''_{2\delta}}$.

Propriété de la courbe $C_{k_{2\delta}}$.

Faisons passer par A une courbe $C_{k_{2\delta}}$ et une C_{t} telle que $h_{2\delta+2} < t < k_{2\delta+1}$. En se reportant à la figure 11, on voit que $B_{2\delta}$ ne se compose plus que du système $B''_{2\delta}$, car $B'_{2\delta}$ disparaît puisque l'une des courbes de l'intersection totale a son degré qui s'annule. *L'irrégularité de* $B_{2\delta+1}$ *s'évanouit.*

On peut d'ailleurs prendre t tel qu'il ne cause pas d'irrégularité dans la réduction de B, on en conclut que :

Théorème. — ***On peut toujours déduire un système régulier d'un système dont seul un réduit pair contient une irrégularité stable.***

Systèmes déduits d'un système régulier par trois couples de courbes.

9. Il est nécessaire d'étudier aussi en particulier cette éventualité car elle présente un fait nouveau. Soit A un système déduit d'un système régulier par deux couples de courbes; faisons passer par A, deux courbes arbitraires C_1 et C_2 qui se recoupent suivant le système B. D'après les paragraphes précédents la réduction de B peut présenter des irrégularités du fait des valeurs de z et t, et des irrégularités de A situées dans ses réduits pairs. Mais A possède aussi des irrégularités situées dans des réduits impairs.

Quelle est leur influence sur la réduction de B?

On peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Une irrégularité stable d'un réduit impair de* A *provoque une irrégularité stable d'un réduit pair de* B.

Nous aurons l'occasion de développer la démonstration au chapitre suivant.

Systèmes déduits d'un système régulier.

10. Nous pouvons maintenant considérer le cas général. D'après l'étude précédente un tel système ne présente que des irrégularités stables. Les unes sont situées dans des réduits pairs, les autres dans des réduits impairs. Nous les appellerons pour abréger *irrégularités paires ou impaires*.

La réduction de ce système se fait parallèlement à celles des systèmes intermédiaires nécessaires pour arriver au système régulier en ce sens que sauf aux endroits où les irrégularités se manifestent, les réduits pairs de même indice, ainsi que leurs adjoints, se déduisent les uns des autres par des courbes correspondantes.

Les réductions adjointes de ces systèmes viennent se confondre avec celle du système régulier. Ils se réduisent donc tous à un système général (en y comprenant le système nul). Réciproquement :

Un système se réduisant à un système général et ne présentant que des irrégularités stables, peut être déduit d'un système régulier.

Nous avons vu en effet comment on pouvait déduire d'un système A, un système B ne présentant pas dans sa réduction d'irrégularité correspondante à celle de $A_{2\delta}$, réduit pair déterminé de A, et n'ayant pas d'autres irrégularités que celles qui correspondent aux autres irrégularités de la réduction de A. Comme en outre à toute irrégularité impaire de A correspond une irrégularité paire de B, on voit qu'on peut déduire de A un système se réduisant à un système général et n'ayant plus d'irrégularité dans sa réduction.

11. *Singularité d'un système déduit d'un système régulier.*

Étudions d'abord la singularité d'un système A présentant une irrégularité quelconque $A' = C_1 . C_\lambda$ où C_λ passe par A''. Considérons sur cette courbe la série déterminée par les C_l passant par A. Cette même série est déterminée par les $C_{l-\nu}$ passant par A''. Si ρ_l et $\rho_{l-\nu}$ sont les dimensions des séries déterminées sur C_μ par les C_l et $C_{l-\nu}$:

$$\rho_l - (A - s^l_A) = \rho_{l-\nu} - (A'' - s^{l-\nu}_{A''})$$

ou

$$s^l_A = A - A'' - (\rho_l - \rho_{l-\nu}) + s^{l-\nu}_{A''} = \mu\nu - (\rho_l - \rho_{l-\nu}) + s^{l-\nu}_{A''}.$$

Au début du premier chapitre on a démontré que

$$\rho_l - \rho_{l-\nu} = \mu\nu - a^l_{\mu.\nu}.$$

On peut donc écrire :

$$s^l_A = s^{l-\nu}_{A''} + a^l_{\mu.\nu}.$$

La singularité de A *pour les* C_l *est la somme de la singularité de* A'' *pour les* $C_{l-\nu}$ *et de* A' *pour les* C_l.

A) *Le système* A *ne possède qu'une seule irrégularité. Elle est paire et stable.*

Soit $A_{2\delta}$ le réduit pair où elle se trouve. Nous reprenons toutes les notations du paragraphe 8.

Supposons $l > h_C$.

La réduction de A ne présente pas d'irrégularités avant $A_{2\delta}$, on peut donc écrire :

$$s^l_A = s^{l_{2\delta}}_{A_{2\delta}} + \sum_0^{\delta-1} [\varphi(h_{2i+1} - l) + \varphi(k_{2i+1} - l)].$$

D'après la proposition précédente :

$$s^{l_{2\delta}}_{A_{2\delta}} = s^{l_{2\delta}-\nu_{2\delta}}_{A''_{2\delta}} + a^{l_{2\delta}}_{\mu_{2\delta},\nu_{2\delta}}.$$

On sait que :

$$a^{l_{2\delta}}_{\mu_{2\delta}\nu_{2\delta}} = \varphi(\mu_{2\delta} + \nu_{2\delta} - l_{2\delta}) - \varphi(\mu_{2\delta} - l_{2\delta}).$$

$A_{2\delta+2}$ est l'adjoint de $A''_{2\delta}$; on obtient aisément :

$$s^{l_{2\delta}-\nu_{2\delta}}_{A''_{2\delta}} = s^{l_{2\delta+2}}_{A_{2\delta+2}} + \varphi(\mu_{2\delta} + n''_{2\delta} - l_{2\delta} + \nu_{2\delta}).$$

$A_{2\delta+2}$ est régulier de spécialité $\sigma - 2\delta - 2$. D'après l'expression de h_C $l \geqslant h_C$ entraîne $l_{2\delta+2} > h_C^{2\delta+2}$,

$$s^{l_{2\delta+2}}_{A_{2\delta+2}} = \sum_{0}^{v-\delta-1} \left[\varphi\left(h^{2\delta+2}_{2i+1} - l_{2\delta+2}\right) + \varphi\left(k^{2\delta+2}_{2i+1} - l_{2\delta+2}\right)\right]$$

où les h et k avec l'exposant $2\delta + 2$ sont les caractéristiques de $A_{2\delta+2}$, v le plus grand entier inférieur à $\frac{\sigma - 1}{2}$.

Remarquons les identités suivantes dont nous avons vu un cas particulier déjà.

$$h^{2\delta+2}_{2i+1} - l_{2\delta+2} = h_{2i+2\delta+3} - l, \qquad k^{2\delta+2}_{2i+1} - l_{2\delta+2} = k_{2i+2\delta+3} - l.$$
$$\mu_{2\delta} + \nu_{2\delta} - l_{2\delta} = h_{2\delta+1} - l, \qquad \mu_{2\delta} - l_{2\delta} = k_{2\delta} - l.$$

Ajoutons membre à membre ces égalités. On obtient :

$$l \geqslant h_C, \qquad s^l_A = \sum_{0}^{v} [\varphi(h_{2i+1} - l) + \varphi(k_{2i+1} - l)] - \varphi(k_{2\delta} - l).$$

Supposons $l < h_C$.

Nous suivrons la méthode. Nous avons d'abord :

$$s^l_A - A + \frac{(l+1)(l+2)}{2} = s^{l_{2\delta}}_{A_{2\delta}} - A_{2\delta} + \frac{(l_{2\delta}+1)(l_{2\delta}+2)}{2} + \sum_{0}^{\delta-1} [\psi(h_{2i} - l) + \psi(k_{2i} - l)].$$

puis

$$s^{l_{2\delta}}_{A_{2\delta}} = s^{l_{2\delta}-\nu_{2\delta}}_{A''_{2\delta}} + a^{l_{2\delta}}_{\mu_{2\delta},\nu_{2\delta}},$$

$$a^{l_{2\delta}}_{\mu_{2\delta}.\nu_{2\delta}} = \frac{(\mu_{2\delta} + \nu_{2\delta} - l_{2\delta} - 1)(\mu_{2\delta} + \nu_{2\delta} - l_{2\delta} - 2)}{2} - \frac{(\mu_{2\delta} - l_{2\delta} - 1)(\mu_{2\delta} - l_{2\delta} - 2)}{2}$$

car $l_{2\delta}$ est toujours inférieur à $\mu_{2\delta}$.

$A_{2\delta+2}$ est l'adjoint de $A''_{2\delta}$, et on obtient :

$$s^{l_{2\delta}-\nu_{2\delta}}_{A''_{2\delta}} - A''_{2\delta} + \frac{(l_{2\delta} - \nu_{2\delta} + 1)(l_{2\delta} - \nu_{2\delta} + 2)}{2} = s^{l_{2\delta+2}}_{A_{2\delta+2}} - A_{2\delta+2} + \frac{(l_{2\delta+2}+1)(l_{2\delta+2}+2)}{2} + \psi(n''_{2\delta} + \nu_{2\delta} - l_{2\delta}).$$

$A_{2\delta+2}$ est régulier de spécialité $\sigma - 2\delta - 2$, et $l_{2\delta+2} < h_C^{2\delta+2}$:

$$s^{l_{2\delta+2}}_{A_{2\delta+2}} - A_{2\delta+2} + \frac{(l_{2\delta+2}+1)(l_{2\delta+2}+2)}{2} = \sum_{0}^{u-\delta-1} \left[\psi\left(h^{2\delta+2}_{2i} - l_{2\delta+2}\right) + \psi\left(k^{2\delta+2}_{2i} - l_{2\delta+2}\right)\right]$$

ou u est le plus grand entier inférieur à $\frac{\sigma}{2}$.

Or on a les identités :

$$h_{2i}^{2\delta+2} - l_{2\delta+2} = h_{2i+2\delta+2} - l, \qquad k_{2i}^{2\delta+2} - l_{2\delta+2} = k_{2i+2\delta+2} - l.$$

Et en se reportant à l'identité 2 du chapitre 1, on obtient en ajoutant membre à membre ces égalités :

$$l < h_{c}, \qquad s^{l}_{A} - A + \frac{(l+1)(l+2)}{2} = \sum_{0}^{u} [\psi(h_{2i} - l) + \psi(k_{2i} - l)].$$

Remarquons que $\psi(k_{2\delta} - l) \equiv 0$, puisque $l < h_{c} < k_{2\delta}$.

B) *Le système* A *ne possède qu'une irrégularité. Elle est impaire et stable.*

L'inégalité qui exprime que l'irrégularité est stable s'écrit avec les notations employées

$$k_{2\gamma-1} < k_{2\gamma}$$

si $A_{2\gamma-1}$ est le réduit où elle se trouve.

Comme la première courbe minima de $A_{2\gamma}$ est confondue avec $C_{n''_{2\gamma-1}}$ on a $h_{2\gamma} + \nu_{2\gamma-1} = k_{2\gamma-1}$.

$$k_{2\gamma-1} > h_{2\gamma}.$$

En prenant la même méthode, on voit que le seul nouveau problème est celui de connaître l'expression de la singularité de $A_{2\gamma-2}$ en fonction de celle de $A_{2\gamma}$. En suivant la méthode du chapitre précédent, on obtient :

$$\text{si } l \geqslant h_{c}, \qquad s^{l_{2\gamma-2}}_{A_{2\gamma-2}} = s^{l_{2\gamma}}_{A_{2\gamma}} + \varphi(M_{2\gamma-2} - n''_{2\gamma-1} - \nu_{2\gamma-1} - l_{2\gamma-2})$$

$$\text{si } l < h_{c}, \qquad s^{l_{2\gamma-2}}_{A_{2\gamma-2}} - A_{2\gamma-2} + \frac{(l_{2\gamma-2}+1)(l_{2\gamma-2}+2)}{2} = s^{l_{2\gamma}}_{A_{2\gamma}} - A_{2\gamma} + \frac{(l_{2\gamma}+1)(l_{2\gamma}+2)}{2}$$
$$+ \psi(m_{2\gamma-2} - l_{2\gamma-2}) + \psi(n_{2\gamma-2} - l_{2\gamma-2}) + \psi(M_{2\gamma-2} - \mu_{2\gamma-1} - l_{2\gamma-2}).$$

De sorte que l'on peut en conclure pour le système A.

$$\text{si } l \geqslant h_{c}, \qquad s^{l}_{A} = \sum_{0}^{v} [\varphi(h_{2i+1} - l) + \varphi(k_{2i+1} - l)],$$

$$\text{si } l < h_{c}, \qquad s^{l}_{A} = A - \frac{(l+1)(l+2)}{2} + \sum_{0}^{u} [\psi(h_{2i} - l) + \psi(k_{2i} - l)] - \psi(k_{2\gamma-1} - l).$$

Il faut d'ailleurs remarquer que dans la première formule $\varphi(k_{2\gamma_1-1}-l)\equiv 0$.

C) *Cas général.*

En se servant d'un raisonnement de proche en proche on arrive au résultat général suivant :

Soit un système A qui possède :

p irrégularités paires stables.

$$h_{2\delta_1+1}=\nu_{2\delta_1}+k_{2\delta_1}\ldots,\qquad h_{2\delta_p+1}=\nu_{2\delta_p}+k_{2\delta_p},$$
$$k_{2\delta_1}>k_{2\delta_1+1}\ldots;\qquad k_{2\delta_p}>k_{2\delta_p+1}.$$

q irrégularités impaires stables.

$$k_{2\gamma_1-1}=\nu_{2\gamma_1-1}+h_{2\gamma_1}\ldots,\qquad k_{2\gamma_q-1}=\nu_{2\gamma_q-1}+h_{2\gamma_q},$$
$$k_{2\gamma_1-1}<k_{2\gamma_1}\ldots,\qquad k_{2\gamma_q-1}<k_{2\gamma_q}.$$

$$\text{Si } l\geqslant h_C,\qquad s^l_A=\sum_0^v[\varphi(h_{2i+1}-l)+\varphi(k_{2i+1}-l)]-\sum_1^p\varphi(k_{2\delta_i}-l).$$

$$\text{Si } l<h_C,\qquad s^l_A=A-\frac{(l+1)(l+2)}{2}+\sum_0^u[\psi(h_{2i}-l)+\psi(k_{2i}-l)]-\sum_0^q\psi(k_{2\gamma_i-1}-l).$$

$$\frac{\sigma-2}{2}\leqslant u<\frac{\sigma}{2},\qquad \frac{\sigma-3}{2}\leqslant v<\frac{\sigma-1}{2}.$$

$$h_{2i}=M-M_1\ldots+n_{2i},\qquad k_{2i}=M-M_1\ldots+m_{2i},$$
$$h_{2i+1}=M-M_1\ldots-n_{2i+1},\qquad k_{2i+1}=M-M_1\ldots-m_{2i+1}.$$
$$h_C=M-M_1\ldots+n_{2u+2}.$$

Les courbes minima de $A_{2\delta_i}$ sont $n_{2\delta_i}=n''_{2\delta_i}+\nu_{2\delta_i}$, $m_{2\delta_i}=\mu_{2\delta_i}$.

Les courbes minima de $A_{2\gamma_i-1}$ sont $n_{2\gamma_i-1}=n''_{2\gamma_i-1}+\nu_{2\gamma_i-1}$, $m_{2\gamma_i-1}=\mu_{2\gamma_i-1}$.

Remarque. — Une irrégularité stable introduit un terme soustractif dans l'une des expressions de la singularité.

12. Soit B le système déduit du système A analogue au précédent par l'intermédiaire de deux courbes C_z et C_t. Nous allons calculer la singularité de B en tenant compte de la manière dont on l'a déduit de A. Reprenons pour cela le procédé utilisé dans le premier chapitre pour calculer la singularité d'un système régulier.

Supposons $l>h^B_C$ en posant $h^B_C=z+t-M+h^{A_1}_C$, $h^{A_1}_C$ est la caractéristique centrale de A_1.

Sans insister sur les détails du calcul, écrivons seulement les deux égalités analogues aux égalités (10) et (11) du précédent chapitre.

$$nl_1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \varphi(n-l_1) - (A_1 - s_{A_1}^{l_1}) = n\lambda - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \varphi(n-\lambda) - \delta,$$

$$t\lambda - \frac{(t-1)(t-2)}{2} + \varphi(t-\lambda) - \delta = tl - \frac{(t-1)(t-2)}{2} + \varphi(t-l) - (B - s'_B),$$

où l, λ et l_1 sont les degrés des courbes correspondantes passant par B, le système où C_t recoupe C_{n_1} et A_1. Ajoutons membre à membre ces deux égalités :

$$s'_B = s_{A_1}^{l_1} + \varphi(z+t-n-l) + \varphi(z+t-m-l) - \varphi(t-l) - \varphi(z-l).$$

Puisque $l > h_C^B$, l_1 est supérieur à $h_C^{A_1}$:

$$s_{A_1}^{l_1} = \sum_0^{v} [\varphi(h'_{2i+1} - l_1) + \varphi(k'_{2i+1} - l_1)] - \sum_1^{p} \varphi(k'_{2\delta^i} - l_1).$$

Remarquons que :

$$h'_{2i+1} = -h_{2i+2} + m + n; \qquad l = z + t - m - n + l_1,$$

et que par suite :

$$h'_{2i+1} - l_1 = z + t - h_{2i+2} - l, \quad k'_{2i+1} - l_1 = z + t - k_{2i+2} - l, \quad h_C^B = z + t - h_C.$$

On obtient alors :

$$l \geqslant h_C^B, \quad s'_B = \sum_0^{v+1} [\varphi(z+t-h_{2i+2}-l) + \varphi(z+t-k_{2i+2}-l)] - \varphi(z-l) - \varphi(t-l)$$
$$- \sum_1^{p} \varphi(z+t-k_{2\delta^i+1}-l).$$

Si au contraire $l < h_C^B$ la méthode donnerait les 2 égalités.

$$\frac{(l_1+1)(l_1+2)}{2} - \psi(n-l_1) - (A_1 - s_{A_1}^{l_1}) = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} - \psi(n-\lambda) - \delta,$$

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} - \psi(t-\lambda) - \delta = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - \psi(t-l) - (B - s'_B).$$

En substituant à $s^{l_1}_{A_1}$ sa valeur on obtient ainsi :

$$l < h^{B}_{C}, \qquad s^{l}_{B} = B - \frac{(l+1)(l+2)}{2} + \sum_{0}^{u+1} [\psi(z+t-h_{2i+1}-l) + \psi(z+t-k_{2i+1}-l)]$$
$$+ \psi(z-l) + \psi(t-l) - \sum_{1}^{q} \psi(z+t-k_{2\gamma^i}-l).$$

Ces expressions sont intéressantes car elles permettent de vérifier plusieurs théorèmes que nous avons démontrés précédemment.

Remarquons d'abord que la réduction de B ne peut pas avoir d'autres irrégularités stables que celles qui proviennent des irrégularités de A et des valeurs de z et t, puisque toute irrégularité stable introduit un terme soustractif dans l'une ou l'autre des expressions de la singularité.

Si $z < h_C$ t est supérieur à h^{B}_{C} puisque $z + t = h_C + h^{B}_{C}$. $\psi(t-l) \equiv 0$. La présence de $\varphi(t-l)$ montre que C_z a provoqué une irrégularité dans la réduction de B.

Si $z > h_C$ t est inférieur à h^{B}_{C}. $\varphi(t-l) \equiv 0$. C_z n'a donc pas provoqué d'irrégularité stable dans la réduction de B. La présence de $\psi(t-l)$ montre que C_t *est une courbe caractéristique paire de* B.

Si $z = h_{2i+2}$ les termes $\varphi(z+t-h_{2i+2}-l)$ et $\varphi(t-l)$ se détruisent. C_z n'introduit aucune irrégularité stable. Si en outre t est aussi une caractéristique paire de A, $\varphi(z-l)$ détruit un nouveau terme de la somme : *Le système* B *a sa spécialité inférieure d'une unité à celle de* A.

Si $z = k_{2\gamma^i}$ les termes $\psi(t-l)$ et $\psi(z+t-k_{2\gamma^i}-l)$ se détruisent. L'irrégularité correspondante à celle de A n'est pas stable, on sait qu'en général elle n'existe pas.

Dans un autre ordre d'idée l'identification des expressions de la singularité que nous venons d'obtenir dans le paragraphe précédent et celui-ci permet d'établir des relations entre les caractéristiques de A et de B.

Application. — On peut déduire de ces formules la proposition suivante :

Soient deux systèmes A et B formant l'intersection totale de deux courbes C_z et C_t.

Le nombre des courbes linéairement indépendantes de degré t *passant par* B *est égal à la singularité de* A *pour les courbes de degré* $z-3$ *augmentée de* $1 + \psi(z-t)$, *si* t *est différent de* $h^{B}_{C} - 1$ *et* $h^{B}_{C} - 2$.

Démontrons-le par exemple lorsque $t < h^{B}_{C}$. Les formules précédentes donnent :

$$\frac{(t+1)(t+2)}{2} - (B - s^{t}_{B}) = \sum_{0}^{u+1} [\psi(z-h_{2i+1}) + \psi(z-k_{2i+1})] + 1 + \psi(z-t) - \sum_{1}^{q} \psi(z-k_{2\gamma^i}).$$
$$= \sum_{0}^{u+1} \big[\varphi[h_{2i+1}-(z-3)] + \varphi[k_{2i+1}-(z-3)]\big] + 1 + \psi(z-t) - \sum_{1}^{q} \varphi[k_{2\gamma^i}-(z-3)].$$

car on a l'identité :

$$\psi(z-a) \equiv \varphi[a-(z-3)].$$

En tenant compte de la valeur de s_A^{z-3} on obtient puisque $z-3 \geqslant h_C$.

$$\frac{(t+1)(t+2)}{2}-(B-s_B^t)=s_A^{z-3}+1+\psi(z-t).$$

La démonstration serait la même si $t \geqslant h_C''$.

Considérons une courbe C_z sans point multiple. Un système A de cette courbe détermine une série complète. Menons par A une courbe arbitraire C_t qui recoupe C_z en B. Les courbes C_t passant par B découpent sur C_z cette série. Supposons $t > z$. La dimension de cette série sera $N_t - 1 - \frac{(t-z+1)(t-z+2)}{2}$ si N_t est le nombre de courbes C_t indépendantes passant par B. Or cette expression est égale à s_A^{z-3}

Théorème. — *Sur une courbe C_z sans point multiple, la dimension de la série complète déterminée par un système de points est égale à sa singularité pour les courbes C_{z-3}*

On peut en déduire le théorème de Riemann Roch [1] dans ce cas particulier. On a

$$r=s_A^{z-3}=A-\frac{(z-1)(z-2)}{2}-\delta,$$

d'où

$$-\delta=\frac{z(z-3)}{2}-(A-s_A^{z-3})+1=N_{z-3}.$$

On obtient l'expression arithmétique du théorème :

$$r=A-\frac{(z-1)(z-2)}{2}+N_{z-3}\,[2].$$

13. *Propriétés des caractéristiques.*

Nous avons eu déjà l'occasion de les définir. Les paragraphes précédents ont montré qu'à toute irrégularité paire stable correspondait une caractéristique paire supérieure à la caractéristique centrale, et qu'à toute irrégularité impaire stable correspondait une caractéristique impaire inférieure à la caractéristique centrale. Nous appellerons les premières *caractéristiques paires mixtes*, les secondes *caractéristiques impaires mixtes*.

---

(1) Picart et Simart, tome II, p. 32.

(2) La méthode employée dans la note de la page 33 permet de démontrer le théorème dans le cas où la courbe présente des points doubles.

Résumons les propriétés principales des caractéristiques.

1. Une courbe de degré supérieur à la caractéristique centrale et différente des caractéristiques paires mixtes laisse constante l'irrégularité du nouveau système.

2. Une courbe caractéristique paire mixte diminue l'irrégularité de une unité.

3. Une courbe d'ordre inférieur à la caractéristique centrale et différente d'une caractéristique paire augmente de une unité l'irrégularité.

4. Une courbe caractéristique paire laisse constante l'irrégularité et diminue la spécialité de une unité.

5. L'opération qui déduit un système d'un autre par un couple de courbes augmente la spécialité d'une unité.

Remarque. — Les résultats relatifs à l'irrégularité ne sont exacts que si on considère des courbes arbitraires du degré indiqué. Nous verrons en effet dans le chapitre suivant que si certaines particularités se présentent dans la réduction du premier système, certaines courbes de degrés déterminés peuvent provoquer des irrégularités d'ailleurs non stables dans la réduction du système déduit.

6. Les deux systèmes déduits l'un de l'autre par deux courbes de degré égal à leur caractéristique centrale sont de même spécialité.

Ces propriétés ont été établies dans des cas particuliers. Les démonstrations sont aussi exactes dans le cas général.

7. Les courbes caractéristiques centrales jouissent d'une propriété qui va éclaircir la relation qui existe entre les systèmes réductibles à une intersection totale non générale et les systèmes réductibles à un système général.

Faisons passer par A, système de spécialité σ, réductible à un système général, deux courbes $C^1_t\, C^2_t$ de degré égal à la caractéristique centrale de A. Si u est le plus grand entier inférieur à $\frac{\sigma}{2}$, B_{2u} se déduit de A_{2u} par l'intermédiaire de $C^1_{t_{2u}}$ et $C^2_{t_{2u}}$. Ce sont les courbes de plus petit degré qui passent par A_{2u} sans contenir nécessairement A_{2u+1}. A_{2u+2} est un système général.

Si A_{2u+2} n'est pas une intersection totale générale, B_{2u+2} se déduira de A_{2u+2} par l'intermédiaire des courbes $C^1_{n_{2u+2}}$ et $C^2_{n_{2u+2}}$. De sorte que B_{2u+2} pourra être considéré comme le premier réduit de A_{2u+2}. Le système B se réduit à un système général.

Si A_{2u+2} est une intersection totale générale, on prévoit que B_{2u+2} n'existe pas, et qu'il est le système nul. Examinons de plus près ce cas.

Pour cela reprenons la figure 4 en y changeant convenablement les lettres et les degrés des courbes. Supposons que A_{2u+2} est un point. L'adjoint β_{2u} de B_{2u} se déduit de l'adjoint α_{2u} de A_{2u} par l'intermédiaire des deux courbes $C^1_{n_{2u}-m_{2u+1}+1}$ et $C^2_{n_{2u}-m_{2u+1}+1}$.

Comme les courbes minima de α_{2u} et de son réduit α_{2u+1} sont respectivement $C_{n_{2u+1}} C_{n_{2u}-m_{2u+1}+1}$ et $C_1 C_{n_{2u+1}-1}$, celles de β_{2u} auront pour degré :

$$2[n_{2u} - m_{2u+1} + 1] - [n_{2u} - m_{2u+1} + 1 + n_{2u+1}] + 1 = n_{2u} - M_{2u+1} + 2,$$
$$2[n_{2u} - m_{2u+1} + 1] - [n_{2u} - m_{2u+1} + 1 + n_{2u+1}] + n_{2u+1} - 1 = n_{2u} - m_{2u+1}.$$

Calculons le degré de la première courbe minima de β_{2u+1}; par le même procédé on obtient :

$$(n_{2u} - M_{2u+1} + 2) + (n_{2u} - m_{2u+1}) - 2[n_{2u} - m_{2u+1} + 1] + n_{2u+1} = 0.$$

β_{2u} est l'intersection totale de $C_{n_{2u}-M_{2u+1}+2}$ et $C_{n_{2u}-m_{2u+1}}$. Par suite on peut écrire :

$$B_{2u+1} = C_{n_{2u}-M_{2u+1}+2} \cdot C_{m_{2u}-M_{2u+1}+2}$$

ou, en employant les caractéristiques :

$$B_{2u+1} = C_{h_C-k_{2u}+1} \cdot C_{h_C-h_{2u}+1}.$$

On peut ainsi énoncer la proposition suivante.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse déduire d'un système A réductible à un système général, par l'intermédiaire d'un seul couple de courbes, un système réductible à une intersection totale non générale est que le premier réduit pair de A soit une intersection totale générale et que :*

$$h_C - h_{2u} + n_{2u+1} > 2,$$
$$h_C - k_{2u} + n_{2u+1} > 1.$$

On peut toujours déduire de A un pareil système en utilisant un nombre suffisant de couples de courbes.

Reportons-nous en effet au cas général. B_{2u+2} est un premier réduit de A_{2u+2}. Déduisons B' de B, comme B de A. B'_{2u+2} est un deuxième réduit de A_{2u+2}. En continuant ainsi on arrivera après x opérations à ce que B^x_{2u+2} soit une intersection totale générale à laquelle se réduit A. Dans ces conditions B^{x+1} se réduit à l'intersection totale B^{x+1}_{2u+1}. Elle n'est pas générale ordinairement. Dans le cas contraire on voit facilement, en se servant d'une proposition suivante, comment on peut en déduire une intersection totale non générale.

Réciproquement, on peut toujours déduire d'un système se réduisant à une intersection totale, un système se réduisant à un système général.

Soit A un tel système dont le réduit $A_{\sigma-1}$ est l'intersection totale

$$C_{n_{\sigma-1}} \cdot C_{m_{\sigma-1}} \cdot (n_{\sigma-1} \leqslant m_{\sigma-1}).$$

Faisons passer par A deux courbes C_t et C_z qui se recoupent suivant le système B. Pour que B soit réductible à un système général, il est nécessaire que la réduction de B ne vienne pas se confondre avec celle de A. On peut toujours réaliser cette condition en choisissant convenablement t et z.

Supposons σ impair : $B_{\sigma-1}$ se déduit de $A_{\sigma-1}$ par l'intermédiaire des courbes $C_{t_{\sigma-1}}, C_{z_{\sigma-1}} \cdot (t_{\sigma-1} \leqslant z_{\sigma-1} < m_{\sigma-1} + n_{\sigma-1})$. Soit $\beta_{\sigma-1}$ le système où $C_{n_{\sigma-1}}$ recoupe $C_{t_{\sigma-1}}$ (*fig.* 14), c'est l'intersection totale de $C_{n_{\sigma-1}}$ et $C_{t_{\sigma-1}-m_{\sigma-1}}$. $B_{\sigma-1}$ et $\beta_{\sigma-1}$ sont corésiduels sur $C_{t_{\sigma-1}}$. $C_{t_{\sigma-1}+z_{\sigma-1}-M_{\sigma-1}}$, courbe de plus petit degré passant par $B_{\sigma-1}$ extérieure à $C_{t_{\sigma-1}}$ correspond sur cette courbe à $C_{t_{\sigma-1}-m_{\sigma-1}}$, première courbe minima de $\beta_{\sigma-1}$ puisque $t_{\sigma-1} - m_{\sigma-1} < n_{\sigma-1}$. Comme $t_{\sigma-1} + z_{\sigma-1} - M_{\sigma-1} < t_{\sigma-1}$, les deux courbes minima de $B_{\sigma-1}$ sont $C_{t_{\sigma-1}+z_{\sigma-1}-M_{\sigma-1}}$ et C_{t_σ}. B_σ *est l'intersection totale de* $C_{t_{\sigma-1}-m_{\sigma-1}}$ et $C_{t_{\sigma-1}-n_{\sigma-1}}$.

Posons $t_{\sigma-1} = m_{\sigma-1} + 1$. B_σ est constitué par $m_{\sigma-1} - n_{\sigma-1} + 1$ points en ligne droite, système dont on peut déduire un point.

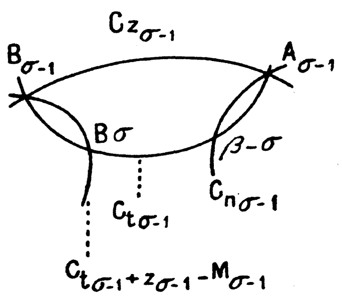


FIG. 14.

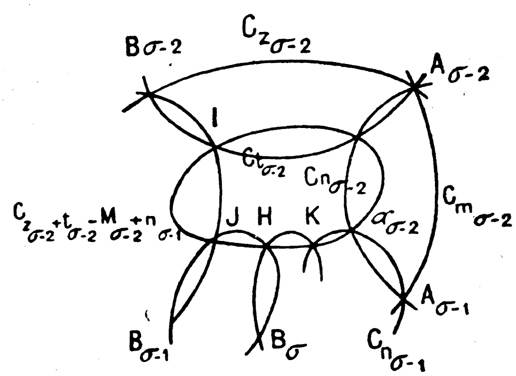


FIG. 15.

Supposons σ pair : $B_{\sigma-2}$ se déduit de $A_{\sigma-2}$ par l'intermédiaire des courbes $C_{t_{\sigma-2}}$ et $C_{z_{\sigma-2}} \cdot (t_{\sigma-2} \leqslant z_{\sigma-2} \leqslant M_{\sigma-2} - n_{\sigma-1})$. Les deux courbes minima de $B_{\sigma-2}$ ont pour degré respectif : $z_{\sigma-2} + t_{\sigma-2} - M_{\sigma-2} + n_{\sigma-1}$ et $z_{\sigma-2} + t_{\sigma-2} - M_{\sigma-2} + m_{\sigma-1}$. La première recoupe $C_{t_{\sigma-2}}$ suivant le système I (*fig.* 15). La première courbe minima de I $C_{t_{\sigma-2}+n_{\sigma-1}-m_{\sigma-2}}$ correspond sur la première courbe minima de $B_{\sigma-2}$, à celle de $B_{\sigma-1}$ dont le degré est $t_{\sigma-2} + z_{\sigma-2} - m_{\sigma-2} - M_{\sigma-2} + n_{\sigma-1}$. Cette dernière après être passée par le système J recoupe en H $C_{t_{\sigma-2}+n_{\sigma-1}-m_{\sigma-2}}$. Pour avoir B_σ il suffit de mener la première courbe minima de H.

On a successivement :

$$\alpha_{\sigma-2} = C_{n_{\sigma-1}} . C_{n_{\sigma-2}-m_{\sigma-1}},$$
$$K = C_{n_{\sigma-1}} . C_{t_{\sigma-2}+M_{\sigma-1}-M_{\sigma-2}},$$
$$H = C_{t_{\sigma-2}+M_{\sigma-1}-M_{\sigma-2}} . C_{t_{\sigma-2}-m_{\sigma-2}},$$
$$B_{\sigma} = C_{t_{\sigma-2}+M_{\sigma-1}-M_{\sigma-2}} . C_{z_{\sigma-2}+M_{\sigma-1}-M_{\sigma-2}}.$$

Pour que l'intersection totale B_{σ} soit générale il suffit de prendre t et z vérifiant les inégalités :

$$h_{c} \leqslant t \leqslant z < h_{c} + 2.$$

14. Nous finirons ce chapitre en étudiant la détermination des systèmes que nous venons d'étudier. Donnons-nous $2\sigma + 1$ nombres positifs $h_0 k_0 \ldots$ tels que :

$$k_{2\delta+1} < k_{2\delta} < h_{2\delta+1} \ldots, \qquad k_{2\delta^{p}+1} < k_{2\delta^{p}} < h_{2\delta^{p}+1},$$
$$h_{2\gamma} < k_{2\gamma-1} < k_{2\gamma} \ldots, \qquad h_{2\gamma^{q}} < k_{2\gamma^{q}-1} < k_{2\gamma^{q}}.$$

Supposons en outre que l'on ait la suite croissante :

$$h_0 k_0 \ldots h_{2\gamma} k_{2\gamma-1} . k_{2\gamma} \ldots h_{2u+2} \ldots k_{2\delta+1} . k_{2\delta} h_{2\delta+1} \ldots k_1 h_1.$$

A quelles conditions existe-t-il un système A de A points les admettant pour caractéristiques?

Supposons que $A_{2\gamma^{q}-1}$ soit le dernier réduit de A contenant une irrégularité. Il est d'abord nécessaire que $A_{2\gamma^{q}}$ existe. C'est un système régulier. Les expressions des caractéristiques nous donnent les degrés de ses diverses réduites. Nous avons vu au chapitre précédent les conditions d'existence de $A_{2\gamma^{q}}$.

Ces conditions suffisent pour que A existe.

En effet, il faut que :

1° $n_{2\gamma^{q}-1}$ soit minima pour $A''_{2\gamma^{q}-1}$ ce qui est car $h_{2\gamma^{q}-1} > h_{2\gamma^{q}+1}$

2° $A'_{2\gamma^{q}-1}$ est l'intersection totale de $C_{n_{2\gamma^{q}-1}}$ et $C_{k_{2\gamma^{q}-1}-h_{2\gamma^{q}}}$.

3° $C_{n_{2\gamma^{q}-2}}$ est courbe minima pour $A_{2\gamma^{q}-2}$ car $h_{2\gamma^{q}-2} < k_{2\gamma^{q}-2} < h_{2\gamma^{q}}$.

On peut par suite construire le système jusqu'à l'irrégularité suivante. La même méthode permet de la construire sans introduire de nouvelles conditions. En continuant ainsi on obtient le système A.

CHAPITRE III

II. — Irrégularités instables; Irrégularités apparentes.

1. Nous avons étudié dans le chapitre précédent les systèmes de points qui se déduisent des systèmes réguliers par l'intermédiaire de courbes arbitraires. Cette hypothèse nous a permis de supposer en particulier les deux faits suivants :

a) Tous les systèmes de points sur lesquels nous avons raisonné satisfont en chacun de leurs points aux conditions d'application du théorème de Nœther, et pour préciser les idées ne sont constitués que par des points simples distincts.

b) Aucune courbe $C_{t_{2i}}$, $C_{z_{2i}}$ correspondant à C_t, C_z, qui permettent de déduire B_{2i} de A_{2i} ne se décompose en une courbe arbitraire $C_{\nu_{2i}}$ ne *passant par aucun point de* A_{2i} et une autre courbe *sans y être obligée par son degré.*

Nous conserverons toujours la première restriction, nous supprimerons désormais la seconde. Il est alors aisé de voir que la réduction du système déduit peut présenter des irrégularités qui ne satisfont pas à la condition de stabilité. Nous les appellerons *irrégularités instables.*

Soit B le système déduit de A par l'intermédiaire des deux courbes $C_t . C_z$ $(t \leqslant z)$. Si $h_{2\delta} < t < h_{2\delta+1}$, $B_{2\delta}$ se déduit de $A_{2\delta}$ par l'intermédiaire de $C_{t_{2\delta}}$ et C_x (C_x étant suivant la valeur de z, $C_{z_{2\delta}}$ ou $C_{n_{2\delta-1}}$). Supposons que $C_{t_{2\delta}}$ se décompose suivant la courbe $C_{\nu_{2\delta}}$ ne passant par aucun point de $A_{2\delta}$ et $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$. Le système $B_{2\delta}$ se compose de l'intersection totale $B'_{2\delta}$ de $C_{\nu_{2\delta}}$ et C_x, et du système $B''_{2\delta}$ déduit de $A_{2\delta}$ par l'intermédiaire des deux courbes C_x et $C_{t_{2\delta}-\nu_{2\delta}}$. La première courbe minima de $B''_{2\delta}$ est de degré $t_{2\delta} - \nu_{2\delta} + z_{2\delta} - h_1^{A_{2\delta}}$. Par suite si on a :

$$x > \nu_{2\delta} + (t_{2\delta} - \nu_{2\delta} + z_{2\delta} - h_1^{A_{2\delta}}) \quad \text{ou} \quad t < h_{2\delta+1},$$

$B_{2\delta}$ présente une irrégularité. Elle est d'ailleurs instable car l'inégalité, condition de la stabilité, s'écrit :

$$\nu_{2\delta} - z_{2\delta} + (z_{2\delta} + t_{2\delta} - \nu_{2\delta} - n_{2\delta}) < 0.$$

Elle n'est jamais vérifiée puisque $t > h_{2\delta}$.

On voit en outre aisément que la réduction continue normalement après l'irrégularité.

On peut faire les mêmes observations si la courbe correspondante à C_t qui per-

met de déduire $\beta_{2\delta}$ de $\alpha_{2\delta}$ se décomposait de la manière indiquée. $\beta_{2\delta}$ peut ainsi présenter une irrégularité instable et nous verrons plus loin (paragraphe 3) que dans des conditions bien déterminées $B_{2\delta+2}$ contient aussi une irrégularité instable.

Nous nous proposons dans la première partie du chapitre d'étudier à quelles conditions ces irrégularités doivent être soumises pour qu'elles aient une influence dans la réduction des systèmes déduits.

2. Il nous faut d'abord approfondir certaines notions déjà entrevues.

A) Soit un système $A = A' + A''$ contenant l'intersection totale $A' = C_{\nu_A} . C_{\mu_A}$ et le système A'' situé sur C_{μ_A}. L'inégalité caractéristique de la présence d'une irrégularité dans le système A est :

$$J_A = \nu_A - \mu_A + h_0^{A''} < 0.$$

Elle exprime en effet que la première courbe minima de A se compose de C_{ν_A} et de la première courbe minima de A''.

Reprenons la figure 5 du chapitre précédent et exprimons J_B du système B corésiduel à A sur $C_n + C_{\nu_A}$ en fonction de J_A. Nous supposerons comme précédemment $t_B \leqslant t_A$.

α) C_n est première courbe minima pour A'' et B''.

$$J_A = \nu_A - \mu_A + n, \qquad J_B = \nu_B - \mu_B + n,$$

et par suite :

$$J_A + t_A = J_B + t_B.$$

Remarquons que $h_1^{\alpha''} = n + t_A - k_0^{A''}$. Puisque C_n est première courbe minima pour B'', il faut que t_B soit supérieur à $h_1^{\alpha''}$ ou

$$t_A - t_B \leqslant k_0^{A''} - h_0^{A''}$$

On peut donc écrire :

$$J_B = J_A + (\chi_0^{A''} - h_0^{A''}), \qquad h_0^{A''} < \chi_0^{A''} \leqslant k_0^{A''}.$$

β) C_n est première courbe minima de A'' seulement :

La première courbe minima $C_{n_{B''}}$ de B'' correspond à la deuxième courbe minima $C_{m_{A''}}$ de A''.

$$J_A = \nu_A - \mu_A + n, \qquad J_B = \nu_B - \mu_B + n_{B''}, \qquad \mu_B - n_{B''} = \mu_A - m_{A''}.$$

Par suite en prenant la notation des caractéristiques :

$$J_B = J_A + (k_0^{A''} - h_0^{A''}).$$

γ) C_n n'est première courbe minima ni de A'' ni de B''.

Les premières courbes minima de B'' et A'' se correspondent et on peut écrire :

$$J_B = J_A.$$

D'une façon générale si $l_B \leqslant l_A$, $J_B \geqslant J_A$. Rappelons que l'on a aussi $I_B \leqslant I_A$.

B) Soit un système A sur une courbe C_n. Construisons un système B corésiduel à A sur C_n. Nous dirons que *deux caractéristiques de* A *et* B *se correspondent* si deux courbes ayant ces nombres pour degré peuvent être correspondantes sur C_n. En identifiant les deux expressions de la dimension de la série déterminée sur C_n par deux courbes C_{l_A} C_{l_B} correspondantes, on obtient la correspondance qui existe entre les caractéristiques de A et B. Résumons simplement les résultats :

1° Les caractéristiques centrales se correspondent.

2° Si C_n n'est pas caractéristique paire de A.

a) $n \geqslant h_C^B$ les caractéristiques paires de B correspondent à celles de A.

b) $n < h_C^B$ idem, mais en outre C_n caractéristique paire de B ne correspond à rien pour A.

Si C_n est caractéristique paire de A.

a) $n \geqslant h_C^B$ les caractéristiques paires de B correspondent à celles de A sauf à C_n.

b) $n < h_C^B$ idem, mais C_n caractéristique paire de B ne correspond à rien pour A.

3° Si C_n considérée comme passant par B ne correspond pas à une caractéristique impaire de A.

a) $n < h_C^A$ les caractéristiques impaires de B correspondent à celles de A.

b) $n \geqslant h_C^A$ idem, mais $C_{n+l_B-l_A}$ caractéristique impaire de B ne correspond à rien pour A.

Si C_n considérée comme passant par B correspond à une caractéristique impaire de A.

a) $n < h_C^A$ les caractéristiques impaires de B correspondent à celles de A sauf à $C_{n+l_A-'_B}$.

b) $n \geqslant h_C^A$ idem, mais $C_{n\;l_B-l_A}$ caractéristique impaire de B ne correspond à rien pour A.

Remarquons enfin que la différence de deux caractéristiques est égale à celle de leurs correspondantes.

3. **Considérons les systèmes de points que l'on peut déduire par un seul couple de courbes de ceux qui admettent dans leur réduction une seule irrégularité, impaire.**

Nous savons effectuer la réduction d'un tel système B déduit de A jusqu'au système réduit de A qui précède celui qui contient l'irrégularité. Deux cas peuvent alors se présenter : ou la réduction de B est déjà venue se confondre avec celle de A et l'irrégularité impaire de A devient une irrégularité paire de B, ou cette éventualité n'est pas encore arrivée. Pour examiner ce dernier cas, il suffit de considérer un système A dont le premier réduit A_1 contient une irrégularité et d'étudier le système B déduit de A par les courbes C_t et C_z $(t \leqslant z)$.

Pour abréger, nous supposerons que C_t et C_z ne passent pas nécessairement par A_1.

Rappelons que C_t et C_z si $z \geqslant t \geqslant h_t^A$ sont des caractéristiques paires de B. (Nous excluons le cas très particulier où il n'en est pas ainsi pour simplifier l'exposé.)

A) *La première courbe minima de* A *ne contient pas* $C_{v_{A_1}}$.

1° C_t n'est pas minima pour B.

Soit b_1 le système où C_{n_B}, première courbe minima de B recoupe C_t. La première courbe minima de b_1 correspond sur C_t à C_{n_A} et sur C_{n_A} à la première courbe minima de $A_1 C_{v_{A_1}} + C_{n_{A''_1}}$. Cette dernière recoupe la première suivant le premier réduit de b_1 : $b_2 = b'_2 + b''_2$ (*fig. 16*). b_2 et A_1 sont corésiduels sur $C_{v_{A_1}} + C_{n_{A''_1}}$. Comme $C_{n_{A''_1}}$ est minima pour A''_1 et que le degré de la première courbe minima de b_1 est inférieur à n_A puisque $z > n_B$, on peut écrire en ayant égard au paragraphe 2.

$$J_{b_2} = J_{A_1} + (k_0^{A''_1} - h_0^{A''_1}), \qquad I_{b_2} \leqslant I_{A_1}.$$

L'égalité dernière ayant lieu si C_t n'est pas la caractéristique h_2 de A.

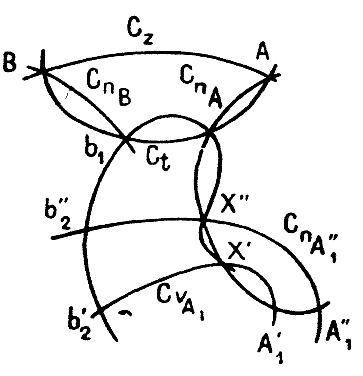


FIG. 16.

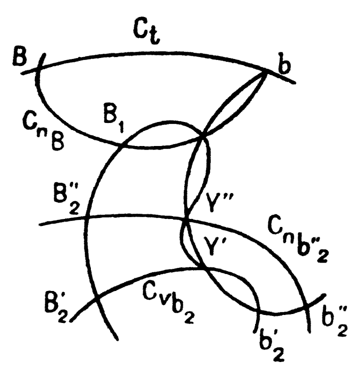


FIG. 17.

Considérons maintenant la figure 17. La deuxième courbe minima de B recoupe C_{n_B} en B_1. Sa construction ainsi que celle de son réduit B_2 sont les mêmes que celles de b_1 et b_2. On utilise ainsi la première courbe minima de b_2.

Si $J_{b_2} \geqslant 0$ l'irrégularité de b_2 n'existe pas, l'irrégularité correspondante à A_1 dans la réduction de B non plus.

Si $J_{b_2} < 0$ on obtient le système $B_2 = B'_2 + B''_2$.

B_2 et b_2 sont corésiduels sur la première courbe minima de $b_1 C_{l_{b_2}} + C_{n b''_2}$. On peut écrire :

$$J_{B_2} = J_{b_2} + (\chi_0^{b''_2} - h_0^{b''_2}), \qquad h_0^{b''_2} < \chi_0^{b''_2} \leqslant k_0^{b''_2},$$

l'égalité ayant lieu si C_l n'est pas la caractéristique h_2^B, car dans ces conditions $C_{n b''_2}$ n'est pas minima pour B''_2.

$$I_{B_2} \leqslant I_{b_2},$$

l'égalité ayant lieu si C_l n'est pas la caractéristique h_2^A. car dans ces conditions C_{n_B} n'est pas 3e caractéristique paire pour b_1, et la première courbe minima de B_1 n'est pas la deuxième courbe minima de $Y' + Y''$ et donc de Y''.

On peut ainsi écrire :

$$\begin{cases} J_{B_2} = J_{A_1} + (k_0^{A''_1} - h_0^{A''_1}) + (\chi_0^{b''_2} - h_0^{b''_2}) \\ I_{B_2} \leqslant I_{A_1} \end{cases}$$

b''_2 et A''_1 sont corésiduels sur $C_{n_{A''_1}}$. En ayant égard au paragraphe 2, on voit que $h_0^{b''_2}$ et $k_0^{b''_2}$ correspondent à $k_0^{A''_1}$ et $h_2^{A''_1}$. De sorte que

$$J_{B_2} = J_{A''_1} + (\chi_0^{A''_1} - h_0^{A''_1}), \qquad k_0^{A''_1} < \chi_0^{A''_1} \leqslant h_2^{A''_1},$$

où $\chi_0^{A''_1}$ correspond à $\chi_0^{b''_1}$ et est égal à $h_2^{A''_1}$ si C_l et C_2 ne sont pas des courbes $C_{h_2^B}$.

$$I_{B_2} \leqslant I_{A_2},$$

l'égalité ayant lieu si C_l et C_2 ne sont pas des courbes $C_{h_2^A}$.

2° C_l est minima pour B sans que C_2 le soit.

La première partie de l'exposé suffit, on voit que $\chi_0^{A''_1} = k_0^{A''_1}$.

3° C_l et C_2 sont minima pour B.

B_1 coïncide avec A et $\chi_0^{A''_1} = h_0^{A''_1}$.

D'une façon générale on obtient donc les résultats suivants :

$$J_{B_2} = J_{A_1} + (\chi_0^{A_1''} - h_0^{A_1''}), \qquad h_0^{A_1''} \leqslant \chi_0^{A_1''} \leqslant h_2^{A_1''},$$
$$I_{B_2} \leqslant I_{A_1}.$$

Si J_{B_2} est positif l'irrégularité A_1 n'a pas de correspondante dans la réduction de B.

Si J_{B_2} est négatif, B_2 contient l'irrégularité correspondante à celle de A_1.

Dans le premier cas, les courbes C_t et C_z considérées comme issues de A sont *arbitraires*, il est aisé de voir que considérées comme issues de B elles sont *particulières*. Il suffit de reconstruire la figure en sens inverse. On peut donc conclure.

THÉORÈME. — *Le système* A *déduit d'un système* B *régulier par un couple de courbes arbitraires ne présente pas dans sa réduction d'irrégularité impaire.*

C'est une partie de la proposition générale que nous avons invoquée au chapitre précédent.

B) *La première courbe de* A *contient* $C_{\prime_{A_1}}$.

Les raisonnements précédents sont alors en défaut et pour arriver aux mêmes résultats il nous faut employer un autre procédé. Faisons deux remarques préliminaires.

Appelons *adjoint d'un système* B *sur une courbe* C_t passant par B le plus petit système corésiduel à B sur C_t.

1° *Soit un système* B *dont l'adjoint* γ *sur la courbe* C_t *contient une irrégularité. Que peut-on dire de son adjoint* β?

La première courbe minima C_{n_B} de B correspond à la première courbe minima de $\gamma\, C_{t} + C_{n_{\gamma''}}$. Cette dernière rencontre à nouveau C_t en $D = D' + D''$ qui l'admet pour première courbe minima puisque γ est adjoint. Elle recoupe C_{n_B} suivant l'adjoint de B, $\beta = \beta' + \beta''$. β et γ sont corésiduels sur cette courbe.

Comme $C_{n_{\gamma''}}$ n'est pas minima pour β'' :

$$J_\beta = J_\gamma + (k_0^{\gamma''} - h_0^{\gamma''}).$$

D'ailleurs ni C_t ni C_B ne sont minima pour D'' et :

$$I_\beta = I_\gamma.$$

2° Reportons-nous au paragraphe 4 du chapitre précédent. Supposons que l'adjoint β de B présente une irrégularité qui ne soit pas assujettie à être stable. Les systèmes β et B_2 sont corésiduels sur la première courbe minima de $\beta\, C_{\gamma_2} + C_{n_{\beta''}}$.

Comme $C_{n_{\beta''}}$ n'est pas minima pour B''_2 :

$$J_{B_2} = J_\beta + (k_0^{\beta''} - h_0^{\beta''}).$$

Comme C_{n_B} n'est pas minima pour B''_1

$$I_{B_2} = I_\beta + (k_1^{\beta''} - h_1^{\beta''}).$$

On voit en particulier que si $J_\beta + (k_0^{\beta''} - h_0^{\beta''})$ est négatif, B_2 présente encore une irrégularité. Nous nous sommes servis de cette remarque au début du chapitre. Nous pouvons maintenant résoudre le problème.

1° C_t n'est pas minima pour B.

L'adjoint γ de B sur C_t est corésiduel de A_1 sur la première courbe minima de A $C_{\nu_{A_1}} + C_{n_A - \nu_{A_1}}$. Comme $C_{n_A - \nu_{A_1}}$ n'est minima ni pour γ'' ni pour A''_1.

$$J_\gamma = J_{A_1}.$$

D'ailleurs C_t n'est pas minima pour A'' et :

$$I_{A_1} = I_\gamma + (k_1^{\gamma''} - h_1^{\gamma''}).$$

D'après la première remarque, si β est l'adjoint de B on peut écrire :

$$J_\beta = J_\gamma + (k_0^{\gamma''} - h_0^{\gamma''}),$$
$$I_\beta = I_\gamma.$$

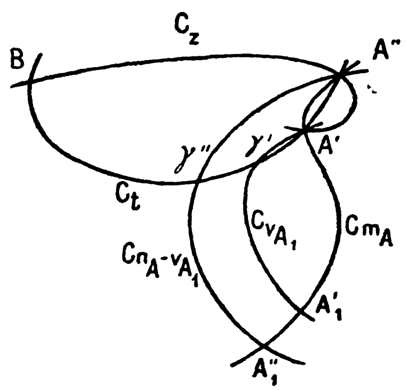


FIG. 18

Si J_β est positif, β ne présente pas d'irrégularité, B_2 non plus.

Supposons J_β négatif ; la seconde remarque permet d'écrire :

$$J_{B_2} = J_\beta + (k_0^{\beta''} - h_0^{\beta''}),$$
$$I_{B_2} = I_\beta + (k_1^{\beta''} - h_1^{\beta''}).$$

En comparant ces diverses égalités, on obtient :

$$J_{B_2} = J_{A_1} + (k_0^{\beta''} - h_0^{\beta''}) + (k_0^{\gamma''} - h_0^{\gamma''}),$$
$$I_{B_2} = I_{A_1} + (k_1^{\beta''} - h_1^{\beta''}) - (k_1^{\gamma''} - h_1^{\gamma''}).$$

Si z et t ne sont pas égaux à h_s on voit immédiatement que $I_{B_2} = I_{A_1}$. Et en raisonnant comme précédemment on obtient aussi :

$$J_{B_2} = J_{A_1} + (\chi_0^{A_1''} - h_0^{A_1''}), \qquad k_0^{A_1''} \leqq \chi_0^{A_1''} \leqslant h_s^{A_1''},$$

l'égalité ayant lieu si t et z sont différents de h_s^{B}.

2° C_t est minima pour B sans que C_z le soit.

On vérifie aisément que $\chi_0^{A_1''} = k_0^{A_1''}$.

Remarque. — Si I_{A_1} est négatif, I_{B_2} qui est inférieur ou égal à I_{A_1} est négatif aussi. La proposition que nous avions énoncée paragraphe 9 du chapitre II est donc établie.

Supposons $I_{A_1} > 0$. Si B_1 est irrégulier nous pouvons recommencer avec B_1 ce que nous avons fait avec A : nous obtiendrons un nouveau système C qui pourra présenter, ou non, dans son réduit C_2 une irrégularité *Arriverons-nous ainsi à un système n'ayant pas d'irrégularité correspondante à celle de A_1?*

Pour uniformiser les notations, soit A^1 le système irrégulier à partir duquel nous commençons. $A^2 \ldots A^i$ seront les divers systèmes que nous obtiendrons après $1, \ldots i-1$ opérations.

Le système A^2 contient, le cas échéant, l'irrégularité correspondante à celle de A^1 :

$$J_{A^2} = J_{A^1} + \chi_0^{A''^1} - h_0^{A''^1} \text{ où } \chi_0^{A''^1} \text{ correspond à } h_0^{A''^2},$$
$$I_{A^2} \leqslant I_{A^1}.$$

Si $J_{A^2} > 0$ A^2 ne contient pas d'irrégularité.

Supposons $J_{A^2} < 0$, construisons le système $A^3 \ldots$. Les J successifs ne peuvent pas décroître.

D'autre part dans l'égalité :

$$J_{A^{i+1}} = J_{A^i} + \chi_i^{A''^i} - h_0^{A''^i}.$$

$\chi_i^{A''^i}$ correspond à $h_0^{A''^{i-1}}$. Comme les caractéristiques centrales se correspondent, $\chi_i^{A''^i}$ est inférieur ou égal à la caractéristique centrale $h_C^{A''^i}$ de A''^i. On peut donc dire.

Théorème. — *Si l'irrégularité vérifie l'inégalité :*

$$J^C_{A^1} = J_{A^1} + h_C^{A''^1} - h_0^{A''^1} < 0,$$

aucun système A^1 *n'aura perdu l'irrégularité correspondante à celle de* A^1.

D'autre part $l_1^{A''^1}$ atteint sa limite supérieure $h_C^{A''^1}$. Il suffit de s'astreindre à ne pas prendre pour passer du système A^1 au système $A^{1\,1}$ des courbes de degré égal à la troisième caractéristique paire du système dont A^1 est le premier réduit.

Théorème. — *Si l'irrégularité vérifie l'inégalité :*

$$J^C_{A^1} = J_{A^1} + h_C^{A''^1} - h_0^{A''^1} \geqslant 0,$$

on peut toujours trouver un système A^1 *qui aura perdu l'irrégularité correspondante à celle de* A.

Les irrégularités qui satisfont à l'inégalité $J^C_{A^1} \geqslant 0$ sont dites *apparentes*. Nous les retrouverons dans le paragraphe suivant.

Remarque. — Dans l'hypothèse où $J^C_{A^1} < 0$, lorsque J_{A^i} aura atteint son maximum, comme il ne peut pas décroître, il restera constant. Les caractéristiques paires de A''^i sont toutes égales.

4. Étudions maintenant les systèmes de points que l'on peut déduire par un seul couple de courbes de ceux qui possèdent dans leur réduction une seule irrégularité paire.

La réduction d'un tel système se poursuit normalement jusqu'au réduit pair qui contient l'irrégularité si les deux courbes correspondant à ce réduit et qui servent à faire la déduction n'ont pas une partie commune.

A) Considérons d'abord le cas particulier où le système $A = A' + A''$ contient une irrégularité, le système B étant déduit de A par l'intermédiaire de C_z et de la première courbe minima de A, $C_{l_A} + C_{n_{A''}}$.

1° $z > k_1^A$.

La courbe $C_{l_A} + C_{n_{A''}}$ est aussi minima pour $B = B' + B''$ (*fig. 19*). Menons l'autre courbe minima de B, minima aussi de B'' comme nous savons. On obtient ainsi B_1. B_1 et A sont corésiduels sur $C_{l_A} + C_{n_{A''}}$, d'ailleurs B_1 est l'adjoint de A. On peut donc écrire :

$$J_{B_1} = J_A + (k_0^{A''} - h_0^{A''}),$$

$$I_{B_1} = I_A + (k_1^{A''} - h_1^{A''}).$$

Si J_{α_1} est négatif, B_1 contient une irrégularité correspondant à celle de A. Sinon cette dernière n'a pas de correspondante dans la réduction de B. D'ailleurs la réduction de B est facile à concevoir puisque B''_1 est l'adjoint de A''.

2° $z < k_1^A$.

La courbe $C_{v_A} + C_{n_{A''}}$ n'est pas minima pour B. Reprenons la figure 19 en substituant aux lettres B_1, α^1 pour exprimer le premier adjoint de A.

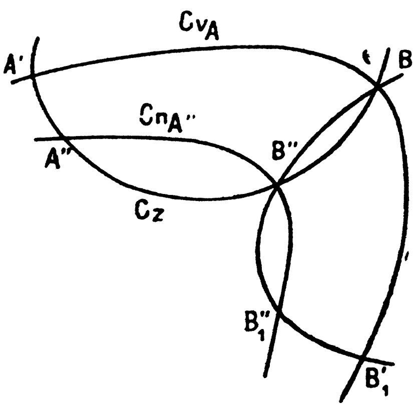


FIG. 19.

On voit aisément que l'adjoint β^1 de B se déduit de α^1 par l'intermédiaire de la première courbe minima de α^1 et de C_{z_1} correspondante à C_z. Si J_α est positif, α n'est pas irrégulier, β^1 non plus et B n'a pas dans sa réduction d'irrégularité correspondante à celle de A. Si J_α est négatif, β^1 se déduit de α^1 comme B de A. Il se compose de l'intersection totale B'^1 confondue avec B' et d'un système β''^1. On peut donc raisonner sur le premier réduit β'_1 de β^1 comme dans le cas précédent sur B_1.

Prenons le cas général : Appelons α^i et β^i les $i^{\text{èmes}}$ adjoints de A et B, C_{z_i} la courbe passant par α_i correspondante à C_z.

Si $h^A_{2i+3} < z < k^A_{2i+1}$, on voit aisément que $k_1^{\alpha^{2i+1}} < z_{2i+1} < h_1^{\alpha^{2i+1}}$. Si $J_{\alpha^{2i+1}}$ ou l'un des J des adjoints précédents est positif, l'irrégularité de A n'a pas son correspondant dans la réduction de B. Si $J_{\alpha^{2i+1}}$ est négatif, β^{2i+1} se déduit de α^{2i+1} par l'intermédiaire de la première courbe minima de α^{2i+1} et de $C_{z_{2i+1}}$. Son premier réduit est α^{2i+2} [β^{2i+1} joue le rôle de B, α^{2i+1} de A]. Or β_1^{2i+1} est l'adjoint de B_{2i+1}, par suite B_{2i+3} *est confondu avec* α_{2i+3}.

Si $k^A_{2i+3} < z < h^A_{2i+3}$, ce qui donne $k_1^{\alpha^{2i+2}} < z_{2i+2} < h_1^{2i+2}$, on peut raisonner de même. En particulier si $J_{\alpha^{2i+2}}$ est négatif, le premier réduit β_1^{2i+2} de β^{2i+2} se confond avec α^{2i+3}, or β_1^{2i+2} est précisément B_{2i+3} : les conclusions sont donc les mêmes.

Remarquons que α''^{2i+3} est le $2i+3^e$ adjoint de A''; on peut écrire :

$$J_{B_{2i+3}} = J_A + (k_{2i+2}^{A''} - h_0^{A''}),$$
$$I_{B_{2i+3}} = I_A + (k_{2i+3}^{A''} - h_1^{A''}).$$

THÉORÈME — *Si* $k^{A}_{2i+3} < z < k^{A}_{2i+1}$, *l'irrégularité correspondante à celle de* A *n'existe pas dans la réduction si* $J_A + (k^{A''}_{2i+2} - h_0^{A''})$ *est positif. Dans le cas contraire, elle existe dans le réduit* B_{2i+3}.

B''_{2i+3} est d'ailleurs le $2i+3^e$ adjoint de A'', sa réduction se poursuit normalement.

REMARQUE — Les adjoints successifs de B jusqu'à β^{2i+2} inclusivement contiennent l'intersection totale B''.

B) Supposons que B se déduit du système A précédent par deux courbes C_t, C_z : $z \geqslant t > \mu_A$.

Soit a le système où la première courbe minima C_{n_A} de A recoupe C_t (C_{n_A} est composée comme précédemment de C_{ν_A} et $C_{n_{A''}}$) a_1 est le premier réduit de a (*fig.* 20). La première courbe minima de B_1 passe par a_1 de sorte que B_2 se déduit de a_1 par l'intermédiaire de cette courbe et de la première courbe minima de a_1.

Les passages de A à a, de a_1 à B_2 sont de ceux étudiés dans le cas A.

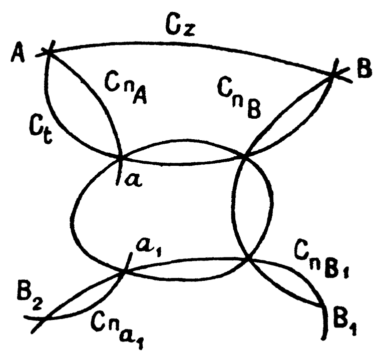


FIG. 20.

Si $k^{A}_{2i+3} < t < k^{A}_{2i+1}$, la réduction de a présentera une irrégularité dans a_{2i+3} si

$$J_A + (k^{A''}_{2i+2} - h_0^{A''}) < 0.$$

B_{2i+4} se déduit de a_{2i+3} par l'intermédiaire de la première courbe minima de a_{2i+3} et suivant les valeurs de z, de $C_{z_{2i+3}}$ ou de la première courbe minima de a_{2i+2}. Dans les deux cas B_{2i+5} est confondu avec a_{2i+4}

Théorème. — *Si* $k^{A}_{2i+3} < t < k^{A}_{2i+1}$, *l'irrégularité correspondante à celle de* A *n'existe pas dans la réduction de* B *si* $J_A + h^{A''}_{2i+4} - h^{A''}_{0} \geqslant 0$. *Dans le cas contraire elle se trouve dans* B_{2i+5} *et elle satisfait aux égalités :*

$$J_{B_{2i+5}} = J_A + (h^{A''}_{2i+4} - h^{A''}_{0}), \qquad I_{B_{2i+5}} = I_A + (h^{A''}_{2i+5} - h^{A''}_{1}).$$

Si en outre $k^{A}_{2j+3} < z < k^{A}_{2j+1}$, à partir de B_{2j+4} inclusivement les réduits pairs de B et leurs adjoints ont une partie commune, intersection totale.

C) Si $t < \mu_A < z$, C_t se décompose suivant C_{μ_A} et $C_{t-\mu_A}$. Les raisonnements seraient tout à fait analogues à ceux faits dans le cas A. Les conclusions relatives à l'existence dans la réduction de B d'une irrégularité correspondante à celle de A sont identiques.

D) Enfin si $t \leqslant z < \mu_A$, il suffit de reprendre la méthode du paragraphe 3, en allant en sens inverse : B contient toujours une irrégularité correspondante à celle de A.

Remarquons enfin le cas $z = \mu$ qui fait toujours disparaître dans la réduction de B l'irrégularité correspondante à celle de A.

On peut donc conclure.

Théorème. — *Si une irrégularité* A *satisfait à l'inégalité* $J^{A}_{C} = J_A + h^{A''}_{C} - h^{A''}_{0} < 0$ *elle aura toujours sa correspondante dans la réduction d'un système dérivé par un seul couple de courbe, sauf si le degré de l'une d'elle est* μ_A.

Comme les caractéristiques centrales se correspondent, la quantité J_C est la même pour les deux irrégularités correspondantes. On peut ainsi étendre le théorème précédent à un système déduit quelconque.

Tout ce que nous avons dit dans les paragraphes 3 et 4 se généralise aisément si le système A possède plusieurs irrégularités dans sa réduction,

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une irrégularité de* A *ait sa correspondante dans la réduction d'un système déduit* B *est qu'elle ne soit pas apparente.*

On peut observer d'ailleurs qu'elles seules ont une influence sur l'expression de la singularité.

Remarquons que I ne peut que diminuer lorsqu'on passe d'un système à son déduit, par un seul couple de courbes, ou rester constant.

Les irrégularités instables tendent, à mesure que le nombre des déductions augmente à avoir des irrégularités correspondantes stables.

C'est la justification de leur nom.

Considérons le cas où l'irrégularité A n'a pas de correspondante dans la réduction de B. Les courbes C_l et C_2 qui sont arbitraires considérées comme passant par A, sont particulières considérées comme issues de B. On le voit aisément en construisant la figure 20 en sens inverse. On peut donc conclure.

THÉORÈME. — *Le système* A *déduit d'un système* B *régulier par un couple de courbes arbitraires ne présente pas dans sa réduction d'autres irrégularités que celles dues aux degrés des courbes qui servent à faire la déduction.*

Cette propriété, ajoutée à celle analogue du paragraphe 3, justifie la proposition générale que nous avons invoquée au chapitre II.

II. — Systèmes symétriques et dissymétriques. Systèmes complets et incomplets.

5. Soit A un système de points appartenant à l'ensemble de ceux que nous avons étudiés jusqu'à présent. Faisons passer par A et a^2_1 points du premier réduit $A_1 = a^1_1 + a^2_1$ deux courbes C_l et C_2 qui se recoupent en b^1. Soit B le système composé de b^1 et de $b^2 \equiv a^2_1$. Les deux systèmes A et $A + a^2_1$ ont mêmes courbes minima. Si l est supérieur aux caractéristiques centrales de b^1 et de B, on peut écrire :

$$s^l_{b^1} = H + s^{l_1}_{a^1_1},$$

$$s^l_B = H + s^{l_1}_{A_1}, \qquad (l = z + t - M + l_1),$$

où H désigne la même fonction de l dans les deux égalités.

Si l est assez grand pour que $s^{l_1}_{a^1_1}$ et $s^{l_1}_{A_1}$ soient nuls, les singularités de B et de b^1 seront égales. Les points b^2 sont indépendants pour les courbes C_l passant par b^1, ou encore, les points b^1 présentent la même singularité pour les courbes générales C_l et pour celles qui sont assujetties à passer par b^2.

Cette particularité n'existe pas dans le cas général précédemment étudié.

Soit en effet un système $B = b^1 + b^2$ tel que $s^l_B = s^l_{b^1}$ pour des valeurs de l qui n'annulent pas les deux membres de cette égalité. Il est nécessaire que B et b^1 aient la même caractéristique h_1. Cela exige que B_1 et le système $b^2 + B_1$ aient des premières courbes minima de même degré. Si la première courbe minima de B_1 est déterminée, il faudra que b^2 se trouve dessus. Si elle est variable, et cela exige $h^B_1 = k^B_1$, il sera nécessaire que b^2 soit formé de points appartenant à B_2. Si enfin B_2 est luimême variable, et cela exige en outre $k^B_1 = h^B_3$, lorsque $s^{l_1}_{a^1_1}$ et $s^{l_1}_{A_1}$ s'annulent, H s'annule aussi et par suite s^l_B et $s^l_{b^1}$.

Nous dirons que les systèmes étudiés précédemment sont *symétriques* et que ceux que nous venons de construire sont *dissymétriques*. Les b^2 points seront dits former un *groupe indépendant* pour les courbes C_l de degrés convenables. Le système B_1 du début du paragraphe possède un groupe indépendant b^2 pour les valeurs de l supérieures à h_3^B. On peut construire des systèmes admettant un groupe indépendant pour des valeurs de l supérieures à une caractéristique impaire. En effet supposons que A_1 admette le groupe $a^2_1 \equiv b^2$, comme groupe indépendant pour l_1 supérieur à $h_3^{A_1}$. On voit aisément que B admet ce même groupe indépendant quand l est supérieur à h_5^B.

Théorème. — *Soit un système* B *dissymétrique, admettant le groupe indépendant* b^2 *pour* $l > h^B_{2i+1}$. *Les réduits pairs de* B *jusqu'à* B_{2i-2} *inclusivement sont dissymétriques et admettent le groupe indépendant* b^2 *pour des valeurs convenables de* l.

Puisque B présente le groupe indépendant b^2 pour $l > h_3^B$, B_2 contient b_2 groupe indépendant pour les valeurs de l_2 supérieures à $h^{B_2}_{2i-1}$. On recommence ainsi le raisonnement jusqu'à B_{2i-2} inclusivement. B_{2i} contient d'une façon symétrique b^2.

On peut avoir des dissymétries plus compliquées. Supposons le réduit A_1 décomposé en 3 groupes $a^1_1 a^2_1 a^3_1$, a^3_1 étant groupe indépendant pour $l_1 > h^{A_1}_{2i-1}$. Faisons passer les courbes C_l et C_2 par $A a^2_1 a^3_1$. Elles se recoupent en b^1 et posons $B = b^1 + a^2_1 + a^3_1$.

Écrivons comme précédemment :

$$s^l_{b^1+a^2_1} = H + s^{l_1}_{a^1_1+a^2_1},$$

$$s^l_B = H + s^{l_1}_{A_1},$$

$$s^l_{b^1} = H + s^{l_1}_{a^1_1}.$$

Comme par hypothèse $s^{l_1}_{A_1} = s^{l_1}_{a^1_1+a^2_1}$ pour $l_1 > h^{A_1}_{2i-1}$,

$$s^l_B = s^l_{b_1+a^2_1} \text{ pour } l > h^B_{2i+1}.$$

a^3_1 est groupe indépendant de B pour $l > h^B_{2i+1}$; on a d'ailleurs toujours :

$$s^l_B = s^l_{b_1} \text{ pour } l > h^B_3.$$

$a^2_1 + a^3_1$ est groupe indépendant de B pour $l > h^B_3$.

On peut représenter ces résultats par le schéma suivant qui s'explique de lui-même.

$$B = b^1 + \left[a^2_1 + [a^3_1]^{h_{2i+1}}\right]^{h_3}.$$

D'une façon générale, on obtient des systèmes représentables par le schéma :

$$B = b + \left[b_1 + \left[b_2 + \ldots + b_\nu + [b_{\nu+1}]^{l_0}\right]^{l_1} \ldots\right]^{l_\nu},$$

où $l_0 < l_1 < l_2 \ldots < l_\nu$; $l_\nu \ldots l_0$ étant des caractéristiques impaires de B.

La réduction de ces systèmes se fait aisément. Nous n'insisterons pas.

REMARQUE. — On peut concevoir d'autres systèmes dissymétriques. Ainsi le système formé par la somme de plusieurs systèmes ayant les uns par rapport aux autres des positions arbitraires. Nous ne les étudierons pas ici.

6. Soit A un système dissymétrique dont le schéma est :

$$A = a + \left[a_1 + \left[a_2 + \ldots + a_\nu + [a_{\nu+1}]^{l_0}\right]^{l_1} \ldots\right]^{l_\nu}.$$

Faisons passer par A deux courbes C_l et C_z qui se recoupent suivant le système B.

Supposons $l_\nu = h_{2i+1}$ et appelons α_ν le système $a_1 + a_2 + \ldots + a_{\nu+1}$: A admet α_ν pour groupe indépendant quand $l > h_{2i+1}$. Les réduits pairs de A jusqu'à A_{2i} inclusivement possèdent le groupe α_ν. Les courbes minima des réduits impairs de A jusqu'à A_{2i-1} inclusivement passent par α_ν. Par suite les courbes C_{l_1} passant par A_1 de degré inférieur à $h_{2i}^{A_1}$ contiennent nécessairement α_ν. Il en est donc de même des courbes C_l passant par B de degré inférieur à la caractéristique paire de B $z + t - M + h_{2i}^{A_1}$.

Si $l_{\nu-1} = h_{2i+2j+1}$ et $\alpha_{\nu-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$ les courbes C_l passant par B de degré inférieur à $z + t - M + h_{2i+2j}^{A_1}$ contiennent nécessairement $\alpha_{\nu-1}$, etc.

On peut ainsi rattacher au système B une suite de *systèmes complémentaires* B_1, α_ν, $\alpha_{\nu-1}$. α_0.

B_1 est le complémentaire de B quand $l < h_2^B$.

α_ν est le complémentaire de B quand $l < h_{2i_\nu}^B$ . . etc.

B sera dit système incomplet lorsqu'il admet des systèmes complémentaires pour $l \geqslant h_2^B$. Dans le cas contraire, il sera dit complet.

Tous les systèmes étudiés dans les chapitres précédents sont complets.

7. Nous finirons cette étude géométrique par l'établissement d'une proposition qui montrera la généralité des systèmes de points étudiés. Considérons un système A et construisons sa réduction. Le seul fait qui puisse empêcher de pousser la réduction de A jusqu'au système général est celui où *deux réduits consécutifs admettent les mêmes courbes minima*. Nous allons montrer que *cette éventualité est impossible.*

Soient A et B deux systèmes dont l'ensemble forme l'intersection totale des deux courbes C_n et C_m $(m \geqslant n)$. Nous pouvons toujours supposer C_m indécomposable.

C_n pourra être composée de courbes $C_{n_1} C_{n_2} \ldots C_{n_\alpha}$. Supposons que C_m et C_n soient minima pour A et B. Puisque C_m est deuxième courbe de A, on ne peut pas faire passer par A une C_{m-1} indécomposable. D'après le paragraphe 3 du chapitre I.

$$A > (m-1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{1}$$

Comme C_m est aussi deuxième courbe minima de B,

$$B > (m-1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Ou en ajoutant :

$$mn > 2(m-1)n - (n-1)(n-2),$$

$$m < n - 1 + \frac{2}{n}, \qquad (n > 2)$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse $m \geqslant n$.

C_n *n'est sûrement pas première courbe minima de* B, car de l'inégalité (1) on déduit :

$$\frac{(n-1)}{2} = \frac{n^2-n+2}{2} < \frac{n^2+n-2}{2} \qquad B < \frac{(n-1)(n+2)}{2}. \qquad (n > 2)$$

Si C_n *est deuxième courbe minima de* B, *elle ne sera pas minima pour son premier réduit* B_1 Soit en effet $C_{m'}$ la première courbe minima de B. Elle est minima pour B, puisque B_1 et A sont corésiduels sur C_n: B et B_1 admettraient alors les mêmes courbes minima si C_n était minima pour B_1

Nous avons ainsi étudié tous les systèmes dont les divers réduits sont constitués par des points simples distincts Ces restrictions sont trop grandes et les résultats obtenus peuvent s'étendre à beaucoup d'autres systèmes. Nous n'insisterons pas sur ces considérations dans ce travail.

III. — Équation générale des courbes d'un degré donné passant par un système de points déterminé.

8. Soit A un système de points que nous avons construit dans les chapitres précédents. Nous nous proposons de trouver l'équation générale des courbes passant par ce système Reprenons pour cela la figure 2 du chapitre I, convenablement modifiée.

Les courbes C_{l_2} passant par A_2 de degré inférieur à $h_2^{A_2}$ contiennent nécessairement le réduit A_1. Si on représente par C_u le premier membre de l'équation de la courbe C_u, on peut écrire d'après le théorème de Nœther :

$$C_{l_2} = \alpha_2 C_{n_2} + \beta_2 C_{m_2}$$

où α_2 et β_2 sont deux polynômes de degré $l_2 - n_2$ et $l_2 - m_2$.

Soit C_λ la courbe passant par α et correspondante sur C_{n_1} à C_{l_2}. La courbe composée $C_\lambda + C_{m_1}$ passe par l'intersection totale de C_{n_1} et de $C_{l_2} + C_n$. Par suite :

$$(1) \qquad C_\lambda C_{m_1} = AC_{n_1} + aC_{l_2} . C_n,$$

où a est une constante. Si $C_{n_2+n-m_1}$ et $C_{m_2+n-m_1}$ sont les courbes passant par α et correspondantes à C_{n_2} et C_{m_2}, on a de même :

$$(2) \qquad C_{n+n_2-m_1} C_{m_1} = A'C_{n_1} + a'C_{n_2} C_n.$$

$$(3) \qquad C_{n+m_2-m_1} C_{m_1} = A''C_{n_1} + a''C_{m_2} C_n.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par $\frac{1}{a}$, de l'égalité (2) par $-\frac{\alpha_2}{a'}$, de l'égalité (3) par $-\frac{\beta_2}{a''}$ et en additionnant membre à membre on obtient :

$$C_{m_1}\left[\frac{1}{a}C_\lambda - \frac{\alpha_2}{a'}C_{n+n_2-m_1} - \frac{\beta_2}{a''}C_{n+m_2-m_1}\right] = \left[\frac{A}{a} - \frac{A'}{a'}\alpha_2 - \frac{A''}{a''}\beta_2\right]C_{n_1}.$$

Le degré du polynôme $\frac{A}{a} - \frac{A'}{a'}\alpha_2 - \frac{A''}{a''}\beta_2$ est égal à $\lambda + m_1 - n_1$. Or ce nombre est supérieur à m_1 puisque C_{n_1} est courbe minima pour α. De sorte que l'on doit conclure :

$$\frac{A}{a} - \frac{A'}{a'}\alpha_2 - \frac{A''}{a''}\beta_2 = \frac{\gamma}{a}C_{m_1},$$

$$C_\lambda = \alpha C_{n+n_2-m_1} + \beta C_{n+m_2-m_1} + \gamma C_{n_1}.$$

Cette équation représente toutes les courbes C_λ passant par α lorsque :

$$\gamma < n + h_2^{A_2} - m_1.$$

On peut reprendre la même méthode pour passer de α à A. On a ainsi successivement :

$$C_l \cdot C_{n_1} = BC_n + bC_m[\alpha C_{n+n_2-m_1} + \beta C_{n+m_2-m_1} + \gamma C_{n_1}].$$

(4) $$C_{h_2} C_{n_1} = B' C_n + b' C_m C_{n+n_2-m_1}.$$

(5) $$C_{k_2} C_{n_1} = B'' C_n + b'' C_m C_{n+m_2-m_1}.$$

Puis en ajoutant membre à membre ces égalités après les avoir multiplées par des constantes convenables :

$$C_{n_1}\left[\frac{1}{b}C_l - \frac{\alpha}{b'}C_{h_2} - \frac{\beta}{b''}C_{k_2}\right] = \left(\frac{B}{b} - \alpha\frac{B'}{b'} - \beta\frac{B''}{b''}\right)C_n + \gamma C_m \cdot C_{n_1}$$

ou

$$C_{n_1}\left[\frac{1}{b}C_l - \frac{\alpha}{b'}C_{h_2} - \frac{\beta}{b''}C_{k_2} - \gamma C_m\right] = \left(\frac{B}{b} - \alpha\frac{B'}{b'} - \beta\frac{B''}{b''}\right)C_n.$$

Le degré du polynôme $\frac{B}{b} - \alpha\frac{B'}{b'} - \beta\frac{B''}{b''}$ est égal à $l + n_1 - n$. Il est supérieur à n_1 car C_n est courbe minima de A. Il faut donc en conclure :

$$\frac{B}{b} - \alpha\frac{B'}{b'} - \beta\frac{B''}{b''} = \frac{u_0}{b}C_{n_1}.$$

De sorte que, avec la notation des caractéristiques.

$$C_l = u_0 C_{h_0} + v_0 C_{k_0} + u_2 C_{h_2} + v_2 C_{k_2}.$$

C'est l'équation générale des courbes C_l passant par A quand $l < h_4$.

Théorème. — *D'une manière générale, si* A *est un système régulier, admettant les caractéristiques paires* $h_0 k_0 \ldots h_{2u} k_{2u}$, *l'équation générale des courbes* C_l *de degré inférieur à la caractéristique centrale* h_c^k, *passant par* A *est*

$$C_l = \sum_0^u (u_{2i} C_{h_{2i}} + v_{2i} C_{k_{2i}}).$$

Si $l < h_{2j}$ *son équation peut se mettre sous la forme :*

$$C_l = \sum_0^{j-1} (u_{2i} C_{h_{2i}} + v_{2i} C_{k_{2i}}),$$

les polynômes u et v d'indice supérieur à $2j - 2$ *sont nuls.*

Ce théorème se démontre aisément de proche en proche.

Nous avons vu que tout système de points, de l'ensemble étudié, peut se déduire d'un système régulier. Considérons par exemple le système A déduit du système régulier A_1 par l'intermédiaire de deux courbes C_n et C_m qui ne sont pas minima pour A. En suivant la même méthode, et en prenant les mêmes notations, on arrive d'abord à l'égalité

$$C_{m_1}\left[\frac{1}{a}C_l - \sum\left(\frac{u_{2i}}{a_{2i}}C_{k''_{2i}} + \frac{v_{2i}}{a'_{2i}}C_{k^\alpha_{2i}}\right)\right] = \left[\frac{A}{a} - \sum\left(\frac{A_{2i}}{a_{2i}}u_{2i} + \frac{A'_{2i}}{a'_{2i}}v_{2i}\right)\right]C_{n_1},$$

les $\sum$ étant étendues aux caractéristiques paires convenables de α. Le degré du polynôme $\frac{A}{a} - \sum\left(\frac{A_{2i}}{a_{2i}}u_{2i} + \frac{A'_{2i}}{a'_{2i}}v_{2i}\right)$ est égal à $\lambda + m_1 - n_1$. Or $\lambda < h_c^\alpha = n - m_1 + h_c^{A_2}$.

Si $m_1 > n - n_1 + h_c^{A_2}$ ou $n < n_1 + m_1 - h_c^{A_2}$ le polynôme en A sera toujours identiquement nul. Or cela signifie que n_1 *est supérieur à la caractéristique centrale de* α. C_{n_1} est une courbe caractéristique paire mixte.

C_λ peut ainsi s'exprimer linéairement en fonction de courbes caractéristiques paires de degré inférieur à λ; d'une façon générale.

THÉORÈME. — *Si* A *est un système de points admettant les caractéristiques paires* $h_0k_0 \ldots h_{2u}h_{2u}$ (*à l'exclusion des caractéristiques paires mixtes*), *l'équation générale des courbes* C_l *d'ordre* l *inférieur à la caractéristique centrale* h_c^A *est*

$$C_l = \sum_0^u (u_{2i}C_{h_{2i}} + v_{2i}C_{k_{2i}}).$$

la suite des indices présentant des lacunes dues aux caractéristiques mixtes.

Si $l < h_{2j}$, *les polynômes* u *et* v *d'indice supérieur à* $2j - 2$ *peuvent être pris nuls.*

REMARQUE. — Cette équation générale ne peut pas s'exprimer linéairement avec des équations de courbes d'ordre différent des caractéristiques. On s'en rend compte aisément. Ainsi il est nécessaire qu'elle contienne C_{h_0}, puis quand $l = k_0$ il faut introduire une C_{k_0}. Tant que l est inférieur à h_2, l'expression obtenue est bien l'équation générale. Mais quand $l = h_2$ il faut de nouveau introduire un terme C_{h_2}, etc.

Application. — On peut retrouver la singularité du système A en utilisant cette équation générale. Pour simplifier les écritures, reprenons le cas précédemment traité.

$$C_l = u_0C_n + v_0C_m + u_2C_{M-M_1+n_2} + v_2C_{M-M_1+m_2}.$$

Nous supposons ainsi que $n, m, \mathrm{M}-\mathrm{M}_1+n_2$, $\mathrm{M}-\mathrm{M}_1+m_2$ sont les quatre premières caractéristiques paires de A, c'est-à-dire $m > n \geqslant m_1+n_1-h_2^{\prime 2}$. Soit ρ_λ le nombre de paramètres dont dépend le système de polynômes $\mathrm{U}_0\mathrm{V}_0\mathrm{U}_2\mathrm{V}_2$ tels que :

(6) $$\mathrm{U}_0\mathrm{C}_n+\mathrm{V}_0\mathrm{C}_m+\mathrm{U}_2\mathrm{C}_{\mathrm{M}-\mathrm{M}_1+n_2}+\mathrm{V}_2\mathrm{C}_{\mathrm{M}-\mathrm{M}_1+m_2}\equiv 0.$$

La dimension du système de courbes C_l est alors :

$$\frac{(l+1)(l+2)}{2}-(\mathrm{A}-s'_\lambda)=\psi(n-l)+\psi(m-l)+\psi(\mathrm{M}-\mathrm{M}_1+n_2-l)+\psi(\mathrm{M}-\mathrm{M}_1+m_2-l)-\rho_\lambda.$$

En considérant les égalités analogues à 4 et 5, et en reportant dans 6 les valeurs que l'on en a tirées pour $\mathrm{C}_{\mathrm{M}-\mathrm{M}_1+n_2}$ et $\mathrm{C}_{\mathrm{M}-\mathrm{M}_1+m_2}$, on obtient :

(7) $$\mathrm{C}_n[\mathrm{U}_0\mathrm{C}_{n_1}+\mathrm{U}_2\mathrm{B}'+\mathrm{V}_2\mathrm{B}'']+\mathrm{C}_m[\mathrm{V}_0\mathrm{C}_{n_1}+b'\mathrm{U}_2\mathrm{C}_{n\ n_2-m_1}+b''\mathrm{V}_2\mathrm{C}_{n\ m_2-m_1}]\equiv 0.$$

a) Si $l-m+n_1$, degré du polynôme facteur de C_m, est inférieur à n, l'identité 7 nécessite :

(8) $$\mathrm{V}_0\mathrm{C}_{n_1}+b'\mathrm{U}_2\mathrm{C}_{n+n_2-m_1}+b''\mathrm{V}_2\mathrm{C}_{n+m_2-m_1}\equiv 0.$$

(9) $$\mathrm{U}_0\mathrm{C}_{n_1}+\mathrm{U}_2\mathrm{B}'+\mathrm{V}_2\mathrm{B}''\equiv 0.$$

Réciproquement si l'identité 8 est vérifiée, il en est de même de (7). En éliminant $b'\mathrm{C}_m\mathrm{C}_{n\ n_2-m_1}$ et $b''\mathrm{C}_m\mathrm{C}_{n\ m_2\ m_1}$ entre 4, 5 et 8 on obtient :

$$\mathrm{V}_0\mathrm{C}_{n_1}\mathrm{C}_m+\mathrm{U}_2\mathrm{C}_{n_1}\mathrm{C}_{\mathrm{M}-\mathrm{M}_1+n_2}+\mathrm{V}_2\mathrm{C}_{n_1}\mathrm{C}_{\mathrm{M}-\mathrm{M}_1+m_2}-(\mathrm{B}'\mathrm{U}_2+\mathrm{B}''\mathrm{V}_2)\,\mathrm{C}_n\equiv 0,$$

ce qui montre que $\mathrm{B}'\mathrm{U}_2+\mathrm{B}''\mathrm{V}_2$ est divisible par C_{n_1}. En remplaçant cette quantité par $-\mathrm{U}_0\mathrm{C}_{n_1}$ et en divisant par C_{n_1} on obtient l'identité 7.

b) Si $l-m+n_1$ est supérieur à n, l'identité 7 nécessite :

(8′) $$\mathrm{V}_0\mathrm{C}_{n_1}+b'\mathrm{U}_2\mathrm{C}_{n+n_2-m_1}+b''\mathrm{V}_2\mathrm{C}_{n+m_2-m_1}\equiv \mathrm{HC}_n.$$

(9′) $$\mathrm{U}_0\mathrm{C}_{n_1}+\mathrm{U}_2\mathrm{B}'+\mathrm{V}_2\mathrm{B}''\equiv -\mathrm{HC}_m.$$

Réciproquement si (8′) est vérifiée, il en est de même de (7).

Comme $l-m+n_1$ est inférieur à la caractéristique centrale de α, puisque $l<h_c^\lambda$, l'identité (8′) s'obtient en prenant pour H un polynôme arbitraire de degré $l-\mathrm{M}+n_1$.

Si ρ_α est le nombre de paramètres dont dépend le système $\mathrm{V}'_0\mathrm{U}'_2\mathrm{V}'_2$ tels que :

$$\mathrm{V}'_0\mathrm{C}_{n_1}+\mathrm{U}'_2\mathrm{C}_{n\ n_2-m_1}+\mathrm{V}'_2\mathrm{C}_{n\ m_2-m_1}\equiv 0,$$

on a

$$\rho_\lambda=\rho_\alpha+\psi(\mathrm{M}-n_1-l).$$

Or on voit aisément que :

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}-(\alpha-s^{\lambda}{}_{\alpha})=\psi(n_1-\lambda)+\psi(n+n_2-m_1-\lambda)+\psi(n+m_2-m_1-\lambda)-\rho_{\alpha}.$$

On obtient donc la formule :

$$\frac{(l+1)(l+2)}{2}-(\mathrm{A}-s^{l}{}_{\mathrm{A}})=\psi(n-l)-\psi(\mathrm{M}-n_1-l)+\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}-(\alpha-s^{\lambda}{}_{\alpha}).$$

C'est l'égalité que donne la considération de la série déterminée sur C_n par les courbes correspondantes C_l et C_λ.

Passons maintenant au cas où l est supérieur à la caractéristique centrale de A.

Théorème I. — *Toute courbe passant par un système général, de courbe minima d'ordre n, a une équation qui peut se mettre sous la forme :*

$$C_l=\sum_{0}^{\tau} u_i C^i{}_n.$$

Les $C^i{}_n$ étant des courbes minima convenables.

La réduction adjointe du système général se termine par une intersection totale générale. L'équation générale des courbes qui passent par cette intersection totale s'exprime linéairement en fonction des équations des deux courbes qui la forment. On voit aisément, par la méthode employée précédemment, que l'équation générale des courbes passant par l'adjoint précédent s'exprime linéairement en fonction des équations de trois courbes minima, et ainsi de suite jusqu'au système donné : Le nombre τ est égal au nombre d'adjoints, nécessaire pour arriver à l'intersection totale générale, augmenté de 2.

Remarque. — Nous verrons plus loin que si l est assez grand, il n'est pas nécessaire d'employer les τ courbes minima pour avoir l'équation générale des C_l passant par le système.

Théorème II. — *Toute courbe passant par un système régulier, a une équation qui peut se mettre sous la forme :*

$$C_l=\sum_{0}^{u}[u_{si}C_{h_{si}}+v_{si}C_{k_{si}}]+\sum_{0}^{\tau} w_i C^i{}_{h_C}.$$

les $C^i{}_{h_C}$ sont τ courbes de degré h_C choisies convenablement.

Le théorème a été démontré quand $l < h_C$, il suffit d'annuler les w_i. Tout système régulier se réduit à un système général. Considérons les τ courbes minima du premier adjoint général, et continuons à appliquer la méthode précédente pour remonter jusqu'au système donné. Les τ courbes minima donneront τ courbes de degré égal à la caractéristique centrale h_C du système. Les passages successifs d'un adjoint à l'autre donneront les courbes caractéristiques paires de l'expression.

Théorème III. — *Toute courbe passant par un système de points, de caractéristiques paires, mixtes ou non, $h_0 k_0 \dots h_{2u} k_{2u}$, a une équation qui peut se mettre sous la forme :*

$$C_l = \sum_0^u [u_{2i} C_{h_{2i}} + v_{2i} C_{k_{2i}}] + \sum_0^{\tau} w_i C^i_{h_C},$$

les polynômes $u_{2i} v_{2i} w_i$ peuvent être pris nuls si les courbes $C_{h_{2i}} C_{k_{2i}} C^i_{h_C}$ sont d'un degré supérieur à l;

En effet tout système irrégulier peut être déduit d'un système régulier. En passant de ce dernier au premier nous aurons l'occasion d'introduire les courbes caractéristiques paires mixtes si l est supérieur à la caractéristique centrale. La proposition est d'ailleurs déjà démontrée si l est inférieur à h_C.

Remarque 1. — On voit aisément que les polynômes $u_{2i} v_{2i} w_i$ peuvent être pris de degrés $l - h_{2i}$, $l - k_{2i}$, $l - h_C$.

Remarque 2. — On doit choisir convenablement les courbes caractéristiques. Ainsi $C_{h_{2i}}$ ne doit pas être fonction linéaire des équations des courbes caractéristiques d'indice inférieur. De même les $C^i_{h_C}$ sont linéairement indépendants entre eux, et ne doivent pas s'exprimer en fonctions linéaires des équations des courbes caractéristiques paires.

9. Lorsque l est suffisamment grand, il est inutile de prendre un aussi grand nombre de courbes pour exprimer linéairement en fonction de leurs équations, l'équation générale des courbes C_l passant par le système donné. Ce qui suit le montrera clairement.

Soient trois courbes $C_{n_1} C_{n_2} C_{n_3}$ qui passent par le système A. *Dans quelles conditions l'équation :*

$$C_l = A_1 C_{n_1} + A_2 C_{n_2} + A_3 C_{n_3}, \qquad (n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3),$$

sera-t-elle l'équation générale des courbes C_l passant par A?

Si ρ désigne le nombre d'arbitraires homogènes dont dépend le système des polynômes $A_1 A_2 A_3$ tels que

$$A_1 C_{n_1} + A_2 C_{n_2} + A_3 C_{n_3} \equiv 0.$$

On doit avoir dans ces conditions l'égalité :

$$\frac{(l+1)(l+2)}{2} - (A - s^l_A) = \frac{(l-n_1+1)(l-n_1+2)}{2} + \frac{(l-n_2+1)(l-n_2+2)}{2} + \frac{(l-n_3+1)(l-n_3+2)}{2} - \rho.$$

Calculons le nombre ρ. On a

$$A_3 C_{n_3} = - A_1 C_{n_1} - A_2 C_{n_2}.$$

Soit B le système suivant lequel C_{n_1} et C_{n_2} se recoupent. A_3 doit être le premier membre de l'équation d'une courbe passant par B

Considérons d'abord le cas où il n'y a pas de courbe de degré $l - n_3$, passant par B. $\rho = 0$, dans ces conditions il est nécessaire que $n_1 n_2 n_3$ soient égaux aux caractéristiques paires $h_0 k_0 h_2$. B admet alors la première courbe minima $C_{h_2+k_0-h_1}$, et par suite il faut avoir l'inégalité

$$l < h_0 + k_0 + h_2 - h_1.$$

On vérifie que cette expression est supérieure à k_2. On peut donc conclure *qu'il est nécessaire d'employer les courbes caractéristiques paires* $C_{h_0} C_{k_0} C_{h_2}$ *pour représenter l'équation générale des courbes d'un degré déterminé* l, *inférieur à* k_2.

S'il existe des courbes C_{l-n_3} passant par B, A_3 dépend de

$$\frac{(l-n_3+1)(l-n_3+2)}{2} - (B - s_B^{l-n_3})$$

paramètres. D'ailleurs si A_3 est déterminé, A_1 et A_2 dépendent comme on le voit aisément de $\psi(n_1 + n_2 - l)$ paramètres :

$$\rho = \frac{(l-n_3+1)(l-n_3+2)}{2} - (B - s_B^{l-n_3}) + \psi(n_1 + n_2 - l).$$

En se servant de l'identité :

$$\frac{(l+1)(l+2)}{2} = \frac{(l-n_1+1)(l-n_1+2)}{2} + \frac{(l-n_2+1)(l-n_2+2)}{2} - \psi(n_1 + n_2 - l) - \varphi(n_1 + n_2 - l) + n_1 n_2,$$

on obtient l'égalité

$$s^l_A + s_B^{l-n_3} = \varphi(n_1 + n_2 - l).$$

Si $l \geqslant n_1 + n_2 - 2$, l'égalité exige que s^l_A et $s_B^{l-n_3}$ soient nuls.

$$l \geqslant h_1^A - 2, \qquad l \geqslant h_1^B + n_3 - 2.$$

Comme $h_1^B = n_1 + n_2 - h_0^A$, ces trois inégalités se réduisent à :

$$l \geqslant n_1 + n_2 + n_3 - h_0^A - 2.$$

Si $l < n_1 + n_2 - 2$, le terme $\varphi(n_1 + n_2 - l)$ n'appartenant sûrement pas à l'expression de s^l_A puisque $n_1 + n_2 > h_1^A$, il est nécessaire que :

$$s^l_A = 0, \qquad s_B^{l-n_3} = \varphi(n_1 + n_2 - l).$$

Il faut donc :

$$l \geqslant h_1^A - 2, \qquad l - n_3 - h_1^B = l - n_1 - n_2, \qquad l - n_1 \geqslant k_1^B - 2.$$

L'égalité exige que n_3 soit le degré h_0^A de la première courbe minima de A. Si χ est la plus petite caractéristique paire de A différente de h_0^A, et à l'occasion de n_1 et n_2

$$k_1^B = n_1 + n_2 - \chi.$$

Les deux inégalités se réduisent à

$$l \geqslant n_1 + n_2 + n_3 - \chi - 2.$$

Théorème. — *L'équation générale des courbes de degré* l *passant par un système* A *peut être mise sous la forme :*

$$C_l = A_1 C_{n_1} + A_2 C_{n_2} + A_3 C_{n_3} \quad \text{si} \quad l \geqslant n_1 + n_2 + n_3 - h_0^A - 2,$$

et sous la forme :

$$C_l = A_1 C_{n_1} + A_2 C_{n_2} + A_3 C_{h_0^A} \quad \text{si} \quad l \geqslant n_1 + n_2 + h_0^A - \chi - 2,$$

étant la plus petite caractéristique paire différente de $h_0 n_1 n_2$.

Le minimum de $n_1 + n_2 + h_0 - \chi$ est $h_0 + k_0 + h_2 - k_2$.

Si $l \geqslant h_0 + k_0 + h_2 - k_2 - 2$, on peut écrire l'équation générale des C_l sous la forme :

$$C_l = u_0 C_{h_0} + v_0 C_{k_0} + u_2 C_{h_2}.$$

Rappelons que c'est aussi l'équation générale quand $l < k_2$.

On peut étendre ces résultats au cas où l'on emploie plus de trois courbes pour former l'équation générale, mais on obtient des propositions moins précises.

Soit un système A dont l'adjoint est α. C_l et C_λ sont les courbes correspondantes sur C_n passant respectivement par A et α. Si λ est supérieur à $h_0^\alpha + k_0^\alpha + h_2^\alpha - k_2^\alpha - 2$, l'équation générale des C_λ contenant α est :

$$C_\lambda \equiv u_0 C_{h_0^\alpha} + v_0 C_{k_0^\alpha} + u_2 C_{h_2^\alpha}.$$

Or, comme précédemment, nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned}
C_l . C_{h_0^\alpha} &\equiv A\, C_n + C_\lambda . C_m, \\
C_m C_{h_0^\alpha} &\equiv \qquad\quad C_{h_0^\alpha} C_m, \\
C_{h_2^A} C_{h_0^\alpha} &\equiv A' C_n + C_{k_0^\alpha} C_m, \\
C_{k_2^A} C_{h_0^\alpha} &\equiv A'' C_n + C_{h_2^\alpha} C_m.
\end{aligned}$$

En multipliant les membres de ces égalités par $-u_0 - v_0 - u_2$ et en ajoutant on obtient

$$C_{h_0^\alpha} [C_l - u_0 C_m - v_0 C_{h_2^A} - u_2 C_{k_2^A}] \equiv C_n [A - v_0 A' - u_2 A''],$$

et puisque $l > n$, on peut écrire en prenant la notation des caractéristiques :

$$\text{(1)} \qquad C_l = A_0 C_{h_0^A} + B_0 C_{k_0^A} + A_2 C_{h_2^A} + B_2 C_{k_2^A}.$$

C'est la formule générale des courbes C_l lorsque :

$$l \geqslant h_0^A + k_0^A + h_2^A + k_2^A - h_4^A - h_1^A - 2.$$

Mais on ne peut pas assurer dans tous les cas que c'est là vraiment la limite inférieure de l. En effet soit une équation de la forme (1), cherchons si c'est l'équation des courbes C_l passant par A. En tenant compte des égalités précédentes on obtient l'identité :

$$C_n [A - A_0 C_{h_0^\alpha} - A_2 A' - B_2 A''] + C_m [C_\lambda - B_0 C_{h_0^\alpha} - A_2 C_{k_0^\alpha} - B_2 C_{h_2^\alpha}] \equiv 0.$$

Le degré du polynôme facteur de C_n est égal à $l + h_0^\alpha - n$:

Si $l + h_0^\alpha - n < m$ ou $l < h_1^A$ l'identité précédente impose :

$$\text{(2)} \qquad C_\lambda - B_0 C_{h_0^\alpha} - A_2 C_{k_0^\alpha} - B_2 C_{h_2^\alpha} = 0.$$

11

Pour que l'équation (1) soit générale, il faut et il suffit que (2) le soit. Dans ce cas la limite précédemment trouvée est bien la limite inférieure Cela exige la condition

$$h_0^\lambda + k_0^\lambda + h_2^\lambda + k_2^\lambda - h_4^\lambda < 2h_1^\lambda \cdot$$

Si $l + h_0^\alpha - n \geqslant m$ ou $l \geqslant h_1^\lambda$ l'identité exige que

$$C_\lambda = B_0 C_{h_0^\alpha} + A_2 C_{k_0^\alpha} + B_2 C_{h_2^\alpha} + q . C_n .$$

Il faut savoir si cette équation représente toutes les courbes C_λ. Nous revenons au problème d'où nous sommes partis

On peut de nouveau reprendre la méthode en considérant l'équation générale des C, comme fonction linéaire de quatre courbes et en déduire à nouveau une limite inférieure de la valeur de l pour laquelle l'équation générale peut être considérée comme fonction linéaire des équations de cinq courbes Cette limite sera la véritable si elle est inférieure à h_1^λ, ce qui s'exprime par la condition :

$$h_0^\lambda + k_0^\lambda + h_2^\lambda + k_2^\lambda + h_4^\lambda - k_4^\lambda - h_1^\lambda - k_1^\lambda < h_1^\lambda$$

si l'on veut que l'équation générale soit :

$$C_l = A_0 C_{h_0^\lambda} + B_0 C_{k_0^\lambda} + A_2 C_{h_2^\lambda} + B_2 C_{k_2^\lambda} + A_4 C_{h_4^\lambda} .$$

Il faut en outre que le système α satisfasse à la condition trouvée précédemment

$$h'_0 + k''_0 + h''_2 + k''_2 - h''_4 < 2h''_1 ,$$

ce qui s'exprime facilement à l'aide des caractéristiques de A.

On généralise aisément. On obtient des limites inférieures exactes pour les systèmes satisfaisant à certaines conditions, et des limites inférieures approchées pour les systèmes arbitraires.

CHAPITRE IV

Application à l'étude des courbes gauches.

1. Énonçons quelques définitions et propriétés qui vont nous servir dans ce chapitre. Nous désignerons par F_m ou Φ_m une surface d'ordre m. Nous réserverons spécialement la lettre Φ au cas où cette surface est variable. Nous aurons souvent l'occasion de considérer le système linéaire de courbes déterminées sur F_m par toutes les surfaces Φ_l de l'espace. Une de ces courbes sera représentée par φ_l, le système linéaire par $|\varphi_l|$. Nous prendrons d'ailleurs les notations classiques de cette théorie, que l'on pourra trouver dans les premiers chapitres du tome II des Fonctions algébriques de deux variables, de MM. Picard et Simart.

Une courbe C de la surface F_m étant donnée, elle détermine un système linéaire $|C|$ complet, pourvu que l'on se donne au préalable le système de points-base que l'on veut imposer au système $|C|$. Il est possible que $|C|$ admette d'autres points-base. On les considère dans cette théorie comme *virtuellement inexistants. Le genre virtuel* du système $|C|$ est le genre d'une courbe générale C, en ne tenant pas compte, à l'occasion, des points-base multiples inexistants virtuellement On appelle aussi *degré virtuel* de $|C|$, le nombre des points d'intersection de deux courbes générales C, en dehors des points-base préalablement fixés. En particulier, le genre virtuel du système $|\varphi_l|$ est égal au genre propre d'une courbe générale φ_l puisque le système n'admet pas de points-base. Son degré virtuel est ml^2.

Dans ces conditions nous donnerons à r_l, dimension de $|\varphi_l|$ l'expression suivante :

$$r_l = P_a + ml^2 - \Pi_l + 1 - \delta'_l,$$

où P_a désigne le genre arithmétique de la surface F_m, Π_l le genre virtuel ou propre de $|\varphi_l|$, δ'_l un terme complémentaire dont il est inutile, ici, d'approfondir le sens.

Le théorème de Nœther (¹) dont nous nous sommes servi dans le plan se généralise dans l'espace et s'applique aux surfaces. On peut comme dans le plan en déduire la conséquence suivante :

Théorème. — *Si on fait passer par l'intersection totale générale de deux surfaces* F_n *et* F_m, *une* Φ_l *elle recoupe* F_m *suivant l'intersection totale de* F_m *et d'une* F_{l-n}.

(¹) Picart et Simart, tome II, p. 17.

2. *Dimension de la série déterminée par les surfaces de degré l sur l'intersection totale* $F_n . F_m$

Soit C_{mn} ($m \geqslant n$) une telle courbe de genre p. Faisons passer par C_{mn} les surfaces Φ_l, et cherchons deux expressions différentes de la dimension du système $|\varphi_l - C_{mn}|$ determiné par les Φ_l sur F_m.

Si $mnl - p - \delta_l$ est la dimension de la série déterminée par les Φ_l de l'espace sur la courbe C_{mn}, une première expression de la dimension de $|\varphi_l - C_{mn}|$ est :

$$P_a + ml^2 - \Pi_l + 1 - \delta'_l - [mnl - p - \delta_l + 1].$$

D'autre part ce système peut être découpé sur F_m par les Φ_{l-n}. On peut donc écrire :

$$P_a + ml^2 - \Pi_l + 1 - \delta'_l - [mnl - p - \delta_l + 1] = P_a + m(l-n)^2 - \Pi_{l-n} + 1 - \delta'_{l-n}.$$

Or on connaît le résultat suivant[1] :

$$\Pi_l = \Pi_{l-n} + p + mnl - mn^2 - 1.$$

En reportant cette valeur de Π_l dans l'égalité précédente, on obtient :

$$(1) \qquad \delta_l = \delta'_l - \delta'_{l-n}.$$

Théorème. — *Le terme complémentaire δ_l de la série déterminée sur C_{mn} par Φ_l est égal à la différence des termes complémentaires $\delta'_l \delta'_{l-n}$ des systèmes déterminés sur F_m par les Φ_l et Φ_{l-n}.*

Cette proposition va nous permettre de trouver la valeur de δ_l. On peut en effet écrire :

$$\delta_l = (\delta'_l - \delta'_{l-1}) + (\delta'_{l-1} - \delta'_{l-2}) + \ldots + (\delta'_{l-n+1} - \delta'_{l-n}).$$

Et en appelant d_u le terme complémentaire de la série déterminée sur une section plane de F_n par les Φ_u.

$$\delta_l = d_l + d_{l-1} + \ldots + d_{l-n+1}.$$

Or nous connaissons la valeur de d_u [Chapitre I, paragraphe 3].

Si $l - n + 1 \geqslant m - 2$ ou $l \geqslant m + n - 3$, tous les d sont égaux à $\Pi_{1.m} - p_{1m}$, Π_{1m} étant le genre maximum d'une courbe plane de degré m, p_{1m} le genre de la section plane générale de F_m

$$\delta_l = n[\Pi_{1m} - p_{1m}].$$

---

[1] Picart et Simart, tome II, p. 107.

Or $C_{m\,n}$ est une courbe du système $|n\,.\,C_{1\,m}|$, $C_{1.m}$ étant une section plane de F_m. Son genre virtuel[1], qui est égal à son genre propre comme on l'a déjà remarqué, est égal à :

$$(2)\qquad p_{m\,n} = n\,.\,p_{1\,m} + \frac{n(n-1)}{2}m - (n-1).$$

D'ailleurs le genre maximum $\Pi_{m\,n}$ d'une $C_{m\,n}$ est donné aussi par l'expression :

$$\Pi_{m\,n} = n\,.\,\Pi_{1\,m} + \frac{n(n-1)}{2}m - (n-1).$$

On peut donc écrire :

$$\delta_l = \Pi_{m\,n} - p_{m\,n}.$$

Théorème. — *Si $l \geqslant m + n - 3$, le terme complémentaire de la série déterminée sur $C_{m\,n}$ par les Φ_l est égal à l'excès du genre maximum d'une telle courbe sur son genre propre.*

Supposons $0 < l - n + 1 < m - 2$ ou $n \leqslant l < m + n - 3$.

$$\delta_l = n[\Pi_{1\,m} - p_{1.m}] - \sum_{i=l-n+1}^{l} \varphi(m-i)$$

$$= \Pi_{m\,n} - p_{m\,n} - \sum_{i=l-n+1}^{m-2} \varphi(m-i) + \sum_{i=l+1}^{m-2} \varphi(m-i).$$

Or on a l'identité :

$$\frac{(u-l-1)(u-l-2)(u-l-3)}{6} - \frac{(u-l-2)(u-l-3)(u-l-4)}{6} = \frac{(u-l-2)(u-l-3)}{2}.$$

Un calcul facile donne :

$$\delta_l = \Pi_{m\,n} - p_{m\,n} - \varphi_3(m+n-l) + \varphi_3(m-l).$$

En posant :

$$\varphi_3(u-l) = \frac{(u-l-1)(u-l-2)(u-l-3)}{6} \text{ si } l < u-3 \text{ et } \varphi_3(u-l) = 0 \text{ si } l \geqslant u-3.$$

Cette méthode ne peut pas nous donner δ_l lorsque l est inférieur à n. Considérons d'abord la section plane générale de $C_{m\,n}$. Pour qu'une Φ_n passe par ce sys-

[1] Picart et Simart, tome II, page 107.

tème de points, il faut qu'elle contienne la section plane correspondante de F_n. Φ_n recoupe F_n suivant une courbe $C_{n\,n-1}$ intersection totale de F_n et F_{n-1}. En particulier le nouveau système de points où Φ_n recoupe $C_{m\,n}$ est l'intersection totale de $C_{m.n}$ et de Φ_{n-1}. On peut par suite écrire l'égalité :

$$mn^2 - p - \delta_n - \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right] = mn(n-1) - p - \delta_{n-1}$$

ou

$$\delta_{n-1} = \delta_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - mn - 1.$$

Supposons maintenant qu'on veuille faire passer par une section plane de $C_{m.n}$ une Φ_l de degré l, inférieur à $n-1$. Il est nécessaire que cette surface contienne le plan. En raisonnant comme plus haut, on a aussi l'égalité :

$$mnl - p - \delta_l - \frac{(l+1)(l+2)}{2} = mn(l-1) - p - \delta_{l-1}$$

ou

$$\delta_{l-1} = \delta_l + \frac{(l+1)(l+2)}{2} - mn.$$

Ces deux remarques permettent de calculer δ_l quand l est inférieur à n. On peut ainsi donner le résultat général suivant :

$$\delta_l = \Pi_{mn} - p_{mn} - \varphi_3(m+n-l) + \varphi_3(m-l) + \varphi_3(n-l).$$

Rappelons d'ailleurs que :

$$2\Pi_{mn} - 2 = mn(m+n-4).$$

3. *Singularité du système de points, intersection totale de trois surfaces.*

Rappelons la proposition suivante(¹) :

Les surfaces qui passent par l'intersection totale des trois surfaces $F_{n_1} F_{n_2} F_{n_3}$ *ont des équations qui peuvent se mettre sous la forme :*

$$F_l = A_1 F_{n_1} + A_2 F_{n_2} + A_3 F_{n_3}, \qquad n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3,$$

où F_{n_i} est le premier membre de l'équation de F_{n_i} et A_i un polynôme de degré $l - n_i$.

Considérons la courbe $C_{n_1 n_2}$, intersection totale de F_{n_1} et F_{n_2}. Coupons par la surface F_{n_3}. Faisons passer par ce système de points A une F_l. Elle recoupe $C_{n_1 n_2}$ aux mêmes points que la surface dont l'équation est $A_3 = 0$.

(¹) Rendiconti... dei Lincei, XVIII₁. Severi.

Théorème. — *Si une surface F_l coupe $C_{n_1 n_2}$ en ses points d'intersection avec F_{n_3}, elle recoupe cette courbe en ses points d'intersection avec une F_{l-n_1}.*

Cette proposition va nous permettre de trouver la singularité du système de points A, intersection totale des trois surfaces $F_{n_1} F_{n_2} F_{n_3}$ $(n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3)$. Exprimons de deux manières différentes la dimension de la série déterminée sur $C_{n_1 n_2}$ par les Φ_l passant par A. Si $l \geqslant n_3$ on a l'égalité :

$$n_1 n_2 l - p - \delta_l - (n_1 n_2 n_3 - a^l_{n_1 n_2 n_3}) = n_1 n_2 (l - n_3) - p - \delta_{l-n_3}$$

ou

$$a^l_{n_1 n_2 n_3} = \delta_l - \delta_{l-n_3}$$

$$a^l_{n_1 n_2 n_3} = \varphi_3(n_1 + n_2 + n_3 - l) - \sum_{\substack{(ij)\\ 1\,2\,3.}} \varphi_3(n_i + n_j - l) + \varphi_3(n_1 - l) + \varphi_3(n_2 - l);$$

4. Considérons maintenant les courbes gauches que l'on ne peut pas considérer comme intersection totale de deux surfaces. La surface de plus petit degré F_n qui peut contenir une telle courbe C, sera appelée *première surface minima*. Elle peut, suivant les circonstances, être unique ou dépendre de paramètres. La surface de plus petit degré F_m qui peut passer par C sans se décomposer en la précédente et une surface arbitraire de degré convenable, sera dite *deuxième surface minima*. Elle n'est jamais unique.

Considérons une section plane arbitraire A de C. Le système A admet deux courbes minima. *Nous supposerons essentiellement, à moins d'avis contraire, que* A *admet aussi des courbes minima de degré* n *et* m. Cette condition restrictive exclut par exemple la quartique de Steiner. On sait en effet que cette courbe admet pour surfaces minima, une surface du 2e degré et une du 3e, tandis que sa section plane a pour courbes minima les coniques.

Les deux surfaces F_n et F_m se recoupent suivant la courbe C_1, appelée *première réduite* de C. La première réduite de C_1 est la *deuxième réduite* de C. L'ensemble des réduites de C constitue sa *réduction*. Nous faisons sur les réduites $C_1 . C_2 \ldots$ la même restriction que sur C, de sorte que si on coupe la figure par un plan, les différentes sections $A_1 A_2 \ldots$ seront les réduits successifs de A.

Pour faciliter les raisonnements nous utiliserons encore des figures schématiques. Nous représenterons une courbe par un point, une surface passant par cette courbe, par une courbe passant par le point image de la courbe. Deux surfaces qui se coupent suivant deux courbes distinctes seront ainsi représentées par deux arcs de courbe convexes qui se rencontrent en deux points. Enfin la lettre qui représente la courbe donnera aussi son degré.

Soit une surface F_n sur laquelle se trouve la courbe A. Faisons passer par A deux surfaces F_x et F_y qui recoupent la surface F_n suivant les courbes B et C. Ces courbes B et C sont dites *corésiduelles* sur la surface F_n. Si on fait passer par B une surface $F_{x'}$, on voit aisément, grâce au théorème de Nœther, qu'il existe une surface $F_{y'}$ passant par C et découpant sur F_n en dehors de C la même courbe que $F_{x'}$ en dehors de B. On a d'ailleurs la relation :

$$y' - y = x' - x. \tag{3}$$

$F_{x'}$ et $F_{y'}$ sont dites *deux surfaces correspondantes*; $F_{x'}$ et $F_{y'}$ se correspondent sur F_n.

Nous appellerons *courbe générale* une courbe dont la section plane est un système général. Nous verrons un peu plus loin comment on peut construire de telles courbes.

Soit une courbe C, de degré C, générale, de surface minima F_n, de première réduite C_1, courbe générale aussi à cause de la restriction énoncée plus haut. Faisons passer par C, deux surfaces F_l et F_z $(z \geqslant l)$ qui se recoupent suivant la courbe Γ de degré Γ. Les surfaces F_l et F_n se rencontrent à nouveau suivant la courbe γ, de degré γ. Appliquons à cette figure une méthode calquée sur celle que nous avons employée dans le plan.

Les courbes γ et C_1 sont corésiduelles sur F_n. Soient Φ_λ et Φ_{l_1} deux surfaces correpondantes sur F_n et passant respectivement par γ et C_1. Elles déterminent sur F_n le même système de courbes dont nous allons exprimer de deux façons différentes la dimension. Si $C_1 l_1 - p_{C_1} - \delta_{l_1}^{C_1}$ est la dimension de la série déterminée sur C_1 par les Φ_{l_1}, une première expression de la dimension du système précédent est :

$$P''_a + nl_1^2 - p_{l_1} + 1 - \delta'_{l_1} - [C_1 l_1 - p_{C_1} - \delta_{l_1}^{C_1} + 1],$$

où P''_a est le genre arithmétique de F_n, p_{l_1} le genre de φ_{l_1} sur F_n.

Si Δ est le nombre de conditions imposées à Φ_λ pour contenir γ, une deuxième expression de la dimension est :

$$P''_a + n\lambda^2 - p_\lambda + 1 - \delta'_\lambda - \Delta.$$

On peut donc écrire l'égalité :

$$P''_a + nl_1^2 - p_{l_1} + 1 - \delta'_{l_1} - [C_1 l_1 - p_{C_1} - \delta_{l_1}^{C_1} + 1] = P''_a + n\lambda^2 - p_\lambda + 1 - \delta'_\lambda - \Delta. \tag{4}$$

La formule 2 permet d'écrire, en appelant p_1 le genre de la section plane de F_n.

$$p_\lambda - p_{l_1} = (\lambda - l_1)p_1 + n\left[\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \frac{l_1(l_1-1)}{2}\right] - (\lambda - l_1). \tag{5}$$

D'autre part, d'après l'égalité (1) :

$$\delta'_\lambda - \delta'_{l_1} = d_\lambda + d_{\lambda-1} + \ldots + d_{l_1+1},$$

où les d_i sont les termes complémentaires des séries déterminées sur une section plane de F_n par les Φ_i. Si n_1 est le degré de la surface minima de C_1, $l_1 + 1$ est supérieur à $n_1 + 1$ et comme $n_1 \geqslant n - 2$, tous les d sont égaux à leur valeur maximum $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p_1$.

$$(6) \qquad \delta'_\lambda - \delta'_{l_1} = (\lambda - l_1)\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p_1\right].$$

L'égalité 4 en tenant compte de 5 et 6 devient :

$$(7) \qquad \frac{n}{2}(\lambda - l_1)(n - 4 - l_1 - \lambda) = C_1 l_1 - p_{c_1} - \delta_{l_1}^{C_1} + 1 - \Delta.$$

Aux surfaces Φ_λ passant par γ correspondent sur F_t les Φ_l passant par Γ. On peut encore écrire de deux façons différentes la dimension du système de courbes découpées par ces surfaces sur F_t. On obtient symétriquement :

$$(8) \qquad \frac{t}{2}(\lambda - l)(t - 4 - l - \lambda) = \Gamma l - p_\Gamma - \delta_l^\Gamma + 1 - \Delta.$$

Retranchons membre à membre 8 de 7.

$$(9) \quad \frac{n}{2}(\lambda - l_1)(n - 4 - l_1 - \lambda) + \frac{t}{2}(l - \lambda)(t - 4 - l - \lambda) = [C_1 l_1 - p_{c_1} - \delta_{l_1}^{C_1}] - [\Gamma l - p_\Gamma - \delta_l^\Gamma].$$

La différence $\delta_l^\Gamma - \delta_{l_1}^{C_1}$ *ne dépend pas de* l. En effet on a :

$$C_1 l_1 - \Gamma l = C(l - l_1) + n^2 l_1 - ztl.$$

L'égalité 9 s'écrit alors en tenant compte des relations qui expriment la correspondance entre Φ_{l_1}, Φ_λ et Φ_l.

$$\lambda - l_1 = t - n, \qquad l - \lambda = z - n.$$

$$(t-n)(2z - 2n \quad 2l - 4 + t) + \frac{t}{2}(z-n)(z + t - n - 4 - 2l) - n^2(l - z - t + 2n) + ztl = C(l - l_1) - (p_{c_1} + \delta_{l_1}^{C_1}) + (p_\Gamma + \delta_l^\Gamma).$$

On vérifie aisément que le premier membre est indépendant de l. Par conséquent δ_l^Γ ne dépend de l que par l'intermédiaire de $\delta_{l_1}^{C_1}$. Posons :

$$\delta_{l_1}^{C_1} = (n_1 - 1) C_1 + 1 - \frac{n_1(n_1+1)(n_1+2)}{6} - p_{c_1}.$$

Cherchons l'expression de δ_l^{Γ}. Elle ne dépend pas de l, de sorte qu'on peut faire le calcul en posant $l_1 = n_1$, $l = u = {}_1z + t - 2n + n_1$. L'égalité 9 devient :

$$\delta_l^{\Gamma} + p_{\Gamma} - (u-1)\Gamma - 1 = \frac{n}{2}(\lambda - l_1)(n - 4 - l_1 - \lambda) + \frac{1}{2}(u-\lambda)(t - 4 - \lambda - u) - n^2 + zt - \frac{n_1(n_1+1)(n_1+2)}{6}.$$

Or le deuxième membre peut se mettre sous la forme :

$$\frac{(u-t)(u-t+1)(u-t+2)}{6} + \frac{(u-z)(u-z+1)(u-z+2)}{6} - \frac{u(u+1)(u+2)}{6} - \frac{(n_1-n)(n_1-n+1)(n_1-n+2)}{3}.$$

(Pour le vérifier, le plus simple est d'exprimer u λ et l_1 en fonction des quantités indépendantes z t n et n_1).

Si nous voulons que Γ soit une courbe générale, il faut astreindre t et z à satisfaire aux inégalités $n \leqslant t \leqslant z \leqslant 2n - n_1$, $t \leqslant z < 2n - n_1$; par conséquent les termes en $u - t$ et $u - z$ sont nuls. Comme d'ailleurs $n_1 \geqslant n - 2$, on peut écrire :

$$\delta_l^{\Gamma} = \Gamma(u-1) + 1 - \frac{u(u+1)(u+2)}{6} - p_{\Gamma}.$$

Remarquons que u est le degré de la surface minima de Γ. *Cette expression est donc de la même forme que celle de* $\delta_{l_1}^{C_1}$.

Effectuons la réduction de la courbe C. Comme le système A se réduit à une intersection totale générale, la courbe C se réduit à une courbe générale, intersection totale de deux surfaces. Ce ne peut être, d'après ce que nous avons vu dans le chapitre I, qu'une droite, une conique ou une biquadratique. Dans les trois cas *l'expression précédente donne le maximum de la valeur que peut atteindre* δ_l. Cette remarque est évidente dans le cas de la droite ou de la conique. Pour la biquadratique, le résultat du paragraphe 2 donne :

$$\delta_2^{\Gamma} + \Pi_{2,2} - p_{\Gamma} = 1 - p_{\Gamma}.$$

C'est précisément la valeur trouvée par l'autre formule. On peut donc conclure.

THÉORÈME. — *Le maximum du terme complémentaire de la série déterminée par les Φ_l sur une courbe générale C, de degré C, de genre p, de surface minima F_n est :*

$$\delta_l = C(n-1) + 1 - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - p.$$

D'après ce qui précède on voit que δ_l est constant quand $l \geqslant n$.

REMARQUE. — La construction d'une courbe générale est aisée. La courbe Γ, comme C, satisfait à la condition restrictive puisque la formule qui donne l en fonction de l_1 est la même que celle analogue dans une section plane. Il suffit par suite, de faire passer par une courbe générale (droite, conique, biquadratique) deux surfaces de degrés convenables qui se recoupent suivant une autre courbe générale. On peut recommencer l'opération autant de fois que l'on veut.

THÉORÈME. — *En général, le maximum du terme complémentaire* δ_t *est egal à l'excès du genre maximum* H_1 *d'une courbe ayant même réduction que* Γ *sur le genre de* Γ.

$$\delta_t = H_\Gamma - p_\Gamma .$$

Rappelons que la dimension de la série déterminée sur Γ par les $\Phi_{z\ t-4}$ contenant la courbe C et les points multiples de Γ est égale à $p_\Gamma - 1$ [1]. La dimension de la série découpée sur Γ par les $\Phi_{z\ t\ 4}$ passant par C est égale à :

$$(t + z - 4)\Gamma - p_\Gamma - h - d^\Gamma_{z+t-4}$$

où h est le nombre de points communs à C et Γ et d^Γ_{z+t-4} un terme complémentaire. D'ailleurs comme C et Γ forment l'intersection totale des surfaces F_t et F_z, on peut écrire d'après le paragraphe 2.

$$d^\Gamma_{z+t-4} + \delta^C_{z+t-4} = H_{zt} - p_{zt} - 1 .$$

Si k' représente le nombre de conditions imposées aux $\Phi_{z\ t-4}$ passant par C pour contenir convenablement les points multiples de Γ, on obtient l'égalité :

$$(10)\quad (z + t - 4)\Gamma - p_\Gamma - h - k' - \left[H_{zt} - p_{zt} - 1 - (n-1)C + p_c - 1 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right] = p_\Gamma - 1 .$$

Dans le cas général $n_1 = n - 2$ et $u = z + t - n - 2$. L'égalité (10) s'écrit alors, en remarquant en outre que :

$$\Gamma + C = zt, \qquad 2H_{zt} - 2 = zt(z + t - 4), \qquad p_{zt} = p_\Gamma + p_c + h - 1 .$$
$$H_{zt} - (u - 1)C + C^3_{z\ t-u} = p_\Gamma + k'.$$

Le genre maximum d'une courbe de même réduction que Γ est donc

$$H_\Gamma = H_{zt} - (u - 1)C - C^3_{z\ t-u}$$

en posant

$$C^3_{v-t} = \frac{(v - t)(v - t - 1)(v - t - 2)}{6}.$$

---

[1] NŒTHER. *Matematischen Annalen*, t. VIII, p. 510.

Or on vérifie aisément l'identité suivante :

$$(11) \qquad \Pi_{zt} - (u-1)C - C^3_{z+t-u} = (u-1)\Gamma + 1 - C^3_{u+2} + C^3_{u-t+2} + C^3_{u-z+2}.$$

Dans le cas particulier actuel C^3_{u-t+2} et C^3_{u-z+2} sont nuls et on peut écrire :

$$\Pi_\Gamma = (u-1)\Gamma + 1 - C^3_{u+2}$$

et par conséquent :

$$\delta_t^\Gamma = \Pi_\Gamma - p_\Gamma. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — Si $n_1 = n - 1$, ce qui a lieu si $C = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on voit de la même façon que :

$$\Pi_\Gamma = \Pi_{zt} - (u-2)C - C^3_{z+t-u}$$

ou

$$\Pi_\Gamma = (u-1)\Gamma + C + 1 - C^3_{u+2}$$

et par conséquent :

$$\delta_t^\Gamma = \Pi_\Gamma - p_\Gamma + C.$$

Γ est une courbe générale. En se reportant au premier chapitre on voit que Γ est la courbe de degré maximum ou minimum qui admette F_u comme courbe minima. On a d'ailleurs [1] :

$$\delta_t^\Gamma = \Pi_\Gamma - p_\Gamma - \frac{u(u-1)}{2}.$$

[1] Supposons pour simplifier $p_\Gamma = \Pi_\Gamma$. Dans le raisonnement précédent nous avons fait l'hypothèse implicite que la courbe composée $\Gamma + C$ pouvait être considérée comme la limite d'une courbe C_{zt}, intersection totale de F_t et F_z, sans points multiples. Cela nous a permis d'écrire :

$$p_{zt} = p_\Gamma + p_c + h - 1,$$

où h est bien exactement le nombre des points communs à Γ et C.

Nous avons ainsi retrouvé dans le cas général, une proposition bien connue, établie elle-même en faisant cette hypothèse *Les surfaces d'un degré l suffisamment grand découpent sur Γ une série complète.*

Mais dans le cas très particulier où Γ est la courbe de degré maximum ou minimum qui admet F_u comme surface minima, cette hypothèse nous conduit à un résultat manifestement faux. Le δ_l que nous obtenons est négatif, ce qui est impossible puisque pour les grandes valeurs de l la série correspondante n'est pas spéciale. Cette hypothèse n'est donc pas vérifiée et $C + \Gamma$ n'est plus la limite d'une C_{zt} sans points multiples. Dans ces conditions $h - h'$ des points communs à C et Γ sont les positions limites de ces points multiples et

$$p_{zt} = p_\Gamma + p_c + h' - 1.$$

Comme nous ~~ne~~ savons pas ~~si~~ dans ces conditions les séries découpées sur Γ par les surfaces d'un degré suffisamment grand sont complètes, nous pouvons seulement affirmer que δ_l tend vers une constante positive ou nulle et que par suite

$$h - h' \geqslant C.$$

Nous ne traiterons pas ici cette question.

5. Faisons passer maintenant par C deux surfaces de degré z et t tels que $z \geqslant t > 2n - n_1$. La section plane de Γ est un système de spécialité un. Nous dirons aussi que Γ est de spécialité un. En nous reportant au calcul précédent, on obtient si $l \geqslant h_2$

$$\delta_l^1 = \Gamma(h_2 - 1) + 1 - C^3_{h_2+2} + C^3_{h_2-h_0+2} + C^3_{h_2-k_0+2} - p_\Gamma$$

en appelant $h_0 k_0 h_2$ les caractéristiques de la section plane B de Γ. Nous dirons simplement que ce sont les caractéristiques de Γ. Le raisonnement précédent montre aussi que dans le cas général *le genre maximum d'une courbe de spécialité 1 est :*

$$\Pi_1 = \Gamma(h_2 - 1) + 1 - C^3_{h_2+2} + C^3_{h_2-h_0+2} + C^3_{h_2-k_0+2}$$

Mais si $C = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

$$\Pi_\Gamma = \Gamma(h_2 - 1) + 1 - C^3_{h_2+2} + C^3_{h_2-h_0+2} + C^3_{h_2-k_0+2} + C^3_{h_1-h_0-k_0+1}.$$

Dans le premier cas, on a toujours :

$$\delta_l^1 = \Pi_\Gamma - p_\Gamma$$

et dans le cas particulier (¹) :

$$\delta_l^\Gamma = \Pi_1 - p_\Gamma - C^3_{h_1-h_0-k_0+1}.$$

Remarque. — M. Castelnuovo a démontré que si une courbe C est sur une surface du 2ᵉ degré, son genre maximum est égal à

$$\chi(C - 2 - \chi) \quad \text{ou} \quad \frac{C-1}{2} - 1 \leqslant \chi < \frac{C-1}{2}.$$

Il est aisé de voir que nous obtenons le même résultat. Dans ce cas particulier on a $h_0 = 2$, $h_2 = k_0$ et

$$\Pi_\Gamma = \Gamma(h_2 - 1) + 1 - C^3_{h_2+2} + C^3_{h_2} = \Gamma(h_2 - 1) + 1 - h_2^2.$$

Si Γ est pair $h_2 = \dfrac{\Gamma}{2}$ et $\Pi_1 = \dfrac{(\Gamma-2)^2}{4}$. Or $\chi = \dfrac{\Gamma - 2}{2}$ et la formule de M. Castelnuovo donne le même résultat. De même si Γ est impair on trouve

$$\Pi_\Gamma = \frac{(\Gamma-1)(\Gamma-3)}{4}.$$

(¹) Voir la note de la page 116.

6. Considérons le problème plus général suivant : Soit C une courbe de surfaces minima F_n et F_m. C_1 est sa première réduite. Faisons passer par C deux surfaces F_t et F_z telles que $z \geqslant t \geqslant m+n-n_1$. Elles se recoupent suivant la courbe Γ dont elles sont surfaces minima. Reprenons la méthode du paragraphe 4. Signalons seulement les modifications. On a encore l'égalité

$$\delta'_\lambda - \delta'_{l_1} = d_\lambda + d_{\lambda-1} + \ldots + d_{l_1+1}.$$

Mais ici les d ne sont pas tous égaux à leur valeur maximum, de sorte que l'égalité 6 devient :

$$\delta'_\lambda - \delta'_{l_1} = (\lambda - l_1)\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p_1\right] - \varphi_3(n - l_1).$$

On obtient ainsi à la place de l'égalité 7.

$$\frac{n}{2}(\lambda - l_1)(n - 4 - l_1 - \lambda) - \varphi_3(n - l_1) = C_1 l_1 - p_{C_1} - \delta_{l_1}^{C_1} + 1 - \Delta.$$

De même l'égalité 8 devient :

$$\frac{t}{2}(\lambda - l)(t - 4 - l - \lambda) + \varphi_3(t - \lambda) = \Gamma l - p_\Gamma - \delta_l^\Gamma + 1 - \Delta.$$

Et en retranchant membre à membre :

$$\frac{n}{2}(\lambda - l_1)(n - 4 - l_1 - \lambda) + \frac{t}{2}(l - \lambda)(t - 4 - l - \lambda) - \varphi_3(n - l_1) - \varphi_3(t - \lambda) = [C_1 l_1 - p_{C_1} - \delta_{l_1}^{C_1}] - [\Gamma l - p_C - \delta_l^\Gamma].$$

Remarquons en outre les égalités suivantes qui expriment la correspondance des surfaces Φ_l, Φ_λ, Φ_{l_1}.

$$\lambda - l_1 = t - m, \qquad l - \lambda = z - n.$$

On a d'ailleurs :

$$C_1 l_1 - \Gamma l \doteq C(l - l_1) + mnl_1 - ztl.$$

On peut vérifier comme précédemment que l'expression suivante est indépendante de l.

$$\frac{n}{2}(\lambda - l_1)(n - 4 - l_1 - \lambda) + \frac{t}{2}(l - \lambda)(t - 4 - l - \lambda) - mnl_1 + ztl.$$

δ_l^Γ est par suite fonction de l par l'intermédiaire de $\delta_{l_1}^{C_1}$ et de $\varphi_3(h_1 - l)$, $\varphi_3(k_1 - l)$. Supposons que si ω_1 est la caractéristique centrale de C_1 on ait :

$$\delta_{l_1}^{C_1} = (\omega_1 - 1)C_1 + 1 - C^2_{\omega_1+2} - p_{C_1} + H_{1,1}.$$

Pour calculer δ_l^{I} on peut remplacer l par la caractéristique centrale ω de Γ sauf dans les termes $\varphi_3(h_1 - l)$ et $\varphi_3(k_1 - l)$ On obtient ainsi :

$$\delta_l^{\mathrm{I}} - p_\Gamma + \Gamma(\omega - 1) - 1 = \overline{\frac{n}{2}(\lambda - \omega_1)(n - 4 - \omega_1 - \lambda) + \frac{t}{2}(\omega - \lambda)(t - 4 - \omega - \lambda) - mn + zt - C^3_{\omega_1+2}} + H_{C_1}$$
$$- \varphi_3(h_1 - l) - \varphi_3(k_1 - l).$$

Or la partie surlignée s'écrit comme on peut le vérifier en remplaçant ω et λ en fonction des quantités indépendantes $ztmn\omega_1$,

$$C^3_{\omega-t+2} + C^3_{\omega-z+2} - C^3_{\omega+2} - C^3_{\omega_1-n+2} - C^3_{\omega_1-m+2}.$$

Par suite en remplaçant t et z par h_0 et k_0 en se servant de la notation des caractéristiques

$$\delta_l^{\mathrm{I}} = \Gamma(\omega - 1) + 1 - C^3_{\omega+2} + C^3_{\omega-h_0+2} + C^3_{\omega-k_0+2} - C^3_{\omega-h_1+2} - C^3_{\omega-k_1+2} - p_{\mathrm{I}} + H_C$$
$$- \varphi_3(h_1 - l) - \varphi_3(k_1 - l)$$

Supposons que C_1 soit une courbe générale. Quand l_1 est supérieur à n_1, $H_{C_1} \equiv 0$.

La formule précédente, où l'on fait $H_{C_1} = 0$, donne l'expression du δ_l^Γ d'une courbe Γ régulière de spécialité 2, quand l est supérieur à la caractéristique centrale de Γ (Nous disons que Γ est régulière parce que sa section plane est un système régulier).

Si C_1 est une courbe régulière de spécialité 1, le paragraphe 5 montre que

$$\text{si} \quad l_1 \geqslant \omega_1, \qquad H_{C_1} = C^3_{\omega_1-h^1_0+2} + C^3_{\omega_1-k^1_0+2}$$

où h^1_0 et k^1_0 sont des caractéristiques de C_1. Or :

$$\omega - h_2 = \omega_1 - h^1_0, \qquad \omega - k_2 = \omega_1 - k^1_0.$$

Le terme complémentaire δ_l^Γ d'une courbe Γ régulière de spécialité 3, quand $l \geqslant \omega$ est donné par :

$$\delta_l^\Gamma = \Gamma(\omega - 1) + 1 - C^3_{\omega+2} + \sum_{i=0}^{1} [C^3_{\omega-h_{2i}+2} + C^3_{\omega-k_{2i}+2}] - C^3_{\omega-h_1+2} - C^3_{\omega-k_1+2} - p_\Gamma$$
$$- \varphi_3(h_1 - l) - \varphi_3(k_1 - l).$$

D'une façon générale, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Le terme complémentaire de la série déterminée par les Φ_l sur une* *courbe Γ régulière, de spécialité σ, quand l est supérieur à la caractéristique centrale ω est donné par l'expression :*

$$\delta_l^{\Gamma} = \Gamma(\omega - 1) + 1 - C^3_{\omega+2} + \sum_0^u \left[C^3_{\omega-h_{2i}+2} + C^3_{\omega-k_{2i}+2}\right] - \sum_0^v \left[C^3_{\omega-h_{2i+1}+2} + C^3_{\omega-k_{2i+1}+2}\right] - p_\Gamma$$

$$- \sum_0^v \left[\varphi_3(h_{2i+1} - l) + \varphi_3(k_{2i+1} - l)\right],$$

où u et v sont les plus grands entiers inférieurs respectivement à $\frac{\sigma}{2}$ et $\frac{\sigma - 1}{2}$.

Quand l croît, δ_l croît. Son maximum est atteint pour les valeurs de l supérieures à $h_1 - 4$.

Reprenons le raisonnement qui nous a donné précédemment le genre maximum d'une courbe Γ régulière. Soient ω et ω' les caractéristiques centrales de Γ et C. On voit aisément que si C_j et C_{j+1} sont les deux premières courbes générales de la réduction de C :

$$\omega + \omega' = z + t - n_j + n_{j+1}.$$

Dans le cas général $n_{j+1} = n_j - 2$ et

$$\omega + \omega' = z + t - 2.$$

Posons pour simplifier puisque $z + t > h_1^C$

$$\delta^C_{z+t-4} = (\omega' - 1)C + 1 - C^3_{\omega'+2} + H_C$$

où H_C ne contient pas $z + t$.

On obtient, en faisant les mêmes calculs que précédemment :

$$\Pi_{zt} - (\omega - 1)C - C^3_{z+t-\omega} + H_C = p_\Gamma + k'.$$

Le genre maximum d'une courbe de même réduction que Γ est donc :

$$\Pi_\Gamma = (\omega - 1)\Gamma + 1 - C^3_{\omega+2} + C^3_{\omega-h_0+2} + C^3_{\omega-k_0+2} + H_C.$$

La transformation de H_C se fait aisément, à l'aide des identités connues :

$$h_{2i+1} = z + t - h^C_{2i}, \qquad k_{2i+1} = z + t - k^C_{2i+1}.$$

Et on obtient :

$$\Pi_\Gamma = (\omega - 1)\Gamma + 1 - C^3_{\omega+2} + \sum_0^u \left[C^3_{\omega-h_{2i}+2} + C^3_{\omega-k_{2i}+2}\right] - \sum_0^v \left[C^3_{\omega-h_{2i+1}+2} + C^3_{\omega-k_{2i+1}+2}\right].$$

Et on peut aussi conclure,

$$\delta_t^{\max} = \Pi_\Gamma - p_\Gamma .$$

Théorème. — *Le maximum du terme complémentaire δ_t, dans le cas général, est égal à l'excès du genre maximum Π_Γ d'une courbe de même réduction que Γ sur le genre de Γ.*

Remarque. — Si $C_j = \dfrac{n_j(n_j+1)}{2}$, $\quad n_{j+1} = n_j - 1$ et on obtient :

$$\omega + \omega' = z + t - 1 .$$

La valeur de Π_Γ devient :

$$\Pi_\Gamma = (\omega - 1)\Gamma + C + 1 - C^3_{\omega+2} + C^3_{\omega - h_0 + 2} + C^3_{\omega - k_0 + 2} + H_C .$$

La transformation de H_C est un peu plus compliquée. On a par exemple :

$$C^3_{\omega - h_{2t}^C + 2} = C^3_{h_{2t+1} - \omega + 1} = -C^3_{\omega - h_{2t+1} + 1} = -C^3_{\omega - h_{2t+1} + 2} + C^2_{\omega - h_{2t+1} + 1} .$$

De sorte que

$$\Pi_\Gamma = (\omega - 1)\Gamma + 1 - C^3_{\omega+2} + \sum_0^u [C^3_{\omega - h_{2t}+2} + C^3_{\omega - k_{2t}+2}] - \sum_0^v [C^3_{\omega - h_{2t+1}+2} + C^3_{\omega - k_{2t+1}+2}]$$

$$- \sum_0^u [C^2_{\omega - h_{2t}+1} + C^2_{\omega - k_{2t}+1}] + \sum_0^v [C^2_{\omega - h_{2t+1}+1} + C^2_{\omega - k_{2t+1}+1}] + (h_0 k_0 - \Gamma) .$$

Et l'expression qui donne le maximum de δ_t devient ([1]) :

$$\delta_t^{\max} = \Pi_1 - p_1 + \sum_0^u [C^2_{\omega - h_{2t}+1} + C^2_{\omega - k_{2t}+1}] - \sum_0^v [C^2_{\omega - h_{2t+1}+1} + C^2_{\omega - k_{2t+1}+1}] - [h_0 k_0 - \Gamma] .$$

7. Considérons enfin le cas le plus général que peuvent présenter les courbes satisfaisant à la condition restrictive énoncée précédemment. Une telle courbe peut se déduire d'une courbe régulière par l'intermédiaire d'un certain nombre de couples de surfaces F_t et F_ω, puisque cette propriété existe pour sa section plane.

Supposons d'abord qu'elle se déduise d'une telle courbe C par un seul couple de surfaces F_t et F_ω. La méthode déjà employée peut de nouveau être appliquée. La

([1]) Voir la note de la page 116.

seule modification introduite est due au calcul de $\delta'_\lambda - \delta'_{l_1}$. On a en effet dans ce cas :

$$\delta'_\lambda - \delta'_{l_1} = (\lambda - l_1)\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p_1\right] - \varphi_3(k_1 - l) + \varphi_3(z - l).$$

La modification analogue a lieu sur la surface F_t, de sorte que si $l \geqslant \omega$, on obtient :

$$\delta_t^\Gamma = \Gamma(\omega - 1) + 1 - C^3_{\omega+1} + \sum_0^u [C^3_{\omega - h_{2i}+2} + C^3_{\omega - k_{2i}+2}] - \sum_0^v [C^3_{\omega - h_{2i+1}+2} + C^3_{\omega - k_{2i+1}+2}] - p_\Gamma$$
$$- \sum_0^v [\varphi_3(h_{2i+1} - l) + \varphi_3(k_{2i+1} - l)] + \varphi_3(t - l) + \varphi_3(z - l).$$

Remarque. — z et t sont des caractéristiques paires, mixtes ou non, de Γ. Dans les deux cas z et t interviennent, sous la notation des caractéristiques, dans la somme $\sum_0^u [C^3_{\omega - h_{2i}+2} + C^3_{\omega - k_{2i}+2}]$. Les termes $\varphi_3(t - l)$ et $\varphi_3(z - l)$ sont identiquement nuls si z et t sont des caractéristiques paires.

On trouve de même la valeur maxima du genre d'une courbe ayant la même réduction que Γ. L'expression est la même que précédemment, mais les $h_{2i} k_{2i}$ sont des caractéristiques paires, mixtes ou non.

En utilisant un raisonnement de proche en proche, on peut étudier le cas général où Γ se déduit d'une courbe régulière par l'intermédiaire d'un nombre arbitraire de couples de surfaces. On obtient ainsi la proposition suivante :

Théorème. — *Dans le cas général, le terme complémentaire de la série déterminée par les Φ_l sur une courbe Γ de spécialité σ, quand l est supérieur à la caractéristique centrale ω, est donnée par l'expression :*

$$\delta_t^\Gamma = \Pi_\Gamma - p_\Gamma - \sum_0^v [\varphi_3(h_{2i+1} - l) + \varphi_3(k_{2i+1} - l)] + \sum_0^p \varphi_3(k_{2\delta'} - l),$$

$$\Pi_\Gamma = (\omega - 1)\Gamma + 1 - C^3_{\omega+1} + \sum_0^u [C^3_{\omega - h_{2i}+2} + C^3_{\omega - k_{2i}+2}] - \sum_0^v [C^3_{\omega - h_{2i+1}+2} + C^3_{\omega - k_{2i+1}+2}];$$

les h et les k sont les caractéristiques paires et impaires, mixtes ou non de Γ, u et v les deux nombres maxima inférieurs à $\frac{\sigma}{2}$ et $\frac{\sigma - 1}{2}$.

Il serait aisé de donner l'expression de δ_t, dans le cas particulier que nous avons signalé à la fin du paragraphe 6 et de faire la même remarque.

8. Proposons-nous de calculer le terme complémentaire $\delta_l\Gamma$, lorsque l est inférieur à la caractéristique centrale de Γ.

Il nous faut d'abord trouver la dimension ρ_l du système des courbes $|\varphi_l|$ découpées sur la surface F_m par les Φ_l de l'espace. Elle est égale à celle de la série caractéristique(¹) de ce système augmentée de un. Cette dernière n'est autre que celle déterminée par les Φ_l sur la courbe φ_l intersection totale de F_m et de F_l. On a par suite

$$\rho_l = ml^2 - p_l - \delta_l + 1 .$$

Or le paragraphe 2 donne :

$$\delta_l = \Pi_{ml} - p_l + \varphi_3(m-l) - C^3_{m-1} .$$

Et par conséquent :

$$\rho_l = ml^2 + 1 - \Pi_{ml} - \varphi_3(m-l) + C^3_{m-1} .$$

On vérifie aisément que cette expression est égale à

$$\rho_l = C^3_{l\;\;3} + \psi_3(m-l) - 1 ,$$

où

$$\psi_3(m-l) = \frac{(m-l-1)(m-l-2)(m-l-3)}{6} \text{ si } l \geqslant m \text{ et } \psi_3(m-l) = 0 \text{ si } l < m.$$

Reprenons la figure habituelle, en supposant que C_1 est une courbe régulière de spécialité 1, de caractéristique centrale ω_1. Si $n_1 \leqslant l_1 < m_1$ les Φ_{l_1} passant par C_1 doivent se décomposer suivant la première surface minima F_{n_1} et une $\Phi_{l_1-n_1}$. La dimension du système déterminé par ces Φ_{l_1} est donc $C^3_{l_1-n_1\;\;3} - 1$. Si $m_1 \leqslant l_1 < \omega_1$, Φ_{l_1} est assujettie à passer par l'intersection totale de F_{n_1} et de F_{m_1}. Le terme complémentaire de la série déterminée sur cette courbe par les Φ_{l_1} de l'espace est :

$$\delta_{l_1} = \Pi_{m_1 n_1} - p_{m_1 n_1} - \varphi_3(m_1 + n_1 - l) + \varphi_3(m_1 - l) + \varphi_3(n_1 - l) .$$

En utilisant l'identité :

$$\Pi_{u,v}\Pi_{u_1 v} - C^3_{u\;\;l\;\;l\;\;1} + \varphi_3(u-l) + \varphi_3(v-l) = uvl + 1 - C^3_{l\;\;3} - \psi_3(u-l) - \psi_3(v-l),$$

on peut aussi écrire :

$$\delta_{l_1} = m_1 n_1 l + 1 - C^3_{l_1+3} - \psi_3(n_1 - l_1) - \psi_3(m_1 - l_1) - p_{m_1 n_1} .$$

(¹) PICARD et SIMART, t. II, p. 97.

Comme $l_1 < n_1$ la dimension du système découpé sur F_n par les Φ_{l_1} précédentes est égale à

$$C^3_{l_1+3} - 1 - [m_1 n_1 l - p_{m_1 n_1} - \delta_{l_1} + 1] = - \psi_3(n_1 - l_1) - \psi_3(m_1 - l_1) - 1 .$$

Cette formule est valable aussi lorsque $n_1 \leqslant l_1 < m_1$.

Les deux égalités ordinaires qui expriment de deux façons différentes la dimension du système découpé sur F_n et F_t par les surfaces correspondantes $\Phi_\lambda \Phi_{l_1}$, $\Phi_t \Phi_\lambda$ sont .

$$- \psi_3(n_1 - l_1) - \psi_3(m_1 - l_1) - 1 = C^3_{\lambda+3} + \psi_1(n - \lambda) - 1 - \Delta .$$

$$C^3_{\lambda+3} - 1 - \Delta = C^3_{l+3} + \psi_1(t - l) - 1 - [\Gamma l - p_\Gamma \delta_l^\Gamma + 1] .$$

En ajoutant membre à membre :

$$\Gamma l - p_\Gamma - \delta_l^\Gamma + 1 = C^3_{l+3} + \psi_1(t - l) + \psi_3(z - l) + \psi_1(n_1 - l_1) + \psi_3(m_1 - l_1) .$$

z et t sont des caractéristiques paires, mixtes ou non Les termes correspondant existent que si elles ne sont pas mixtes. $n_1 - l_1$ et $m_1 - l_1$ sont égaux à l'excès d'une caractéristique paire de Γ sur l.

Faisons passer par Γ deux surfaces $F_{z'} F_{t'}$. Elles se recoupent suivant la courbe Γ', qui peut avoir, comme on l'a vu, des irrégularités impaires. La méthode montre qu'elles interviennent dans l'expression de δ_l. On obtient en effet :

$$\Gamma' l - p_{\Gamma'} - \delta_l^{\Gamma'} + 1 = C^3_{l+3} + \psi_1(h_0 - l) + \psi_1(k_0 - l) + \psi_1(h_2 - l) + \psi_1(k_2 - l) - \psi_3(z' + t' - t - l) - \psi_3(z' + t' - z - l).$$

Si l est inférieur au degré de la première surface minima de Γ, il suffit de reprendre la méthode déjà employée dans ce cas pour les courbes, intersections totales de deux surfaces. On obtient ainsi :

$$\delta_l = \Gamma l - p_\Gamma + 1 - C^3_{l+3} .$$

On peut ainsi énoncer la proposition générale suivante :

Théorème. — *Le terme complémentaire de la série déterminée par les Φ_l sur une courbe Γ, de spécialité σ, quand l est inférieur à la caractéristique centrale ω est donnée par l'expression :*

$$\delta_l^\Gamma = \Gamma l - p_\Gamma + 1 - C^3_{l+3} - \sum_0^u [\psi_1(h_{2i} - l) + \psi_1(k_{2i} - l)] + \sum_1^q \psi_3(k_{2i'-1} - l) ;$$

les h et k sont des caractéristiques paires de Γ, certaines lacunes pouvant exister dans les indices à cause des caractéristiques paires mixtes. Les $k_{2i'-1}$ sont les caractéristiques impaires mixtes.

9. Tout ce que nous avons dit sur les systèmes de points dans les chapitres II et III peut être redit pour les courbes précédentes. On énoncera, en particulier, facilement les théorèmes relatifs à l'équation générale des surfaces passant par une telle courbe. Nous dirons que ces *courbes sont congrues au plan*. Comme nous l'avons déjà remarqué à propos de la construction des courbes générales, *toute courbe déduite d'une courbe congrue au plan est congrue au plan*. Considérons une courbe quelconque, nous pouvons toujours effectuer sa réduction à moins que deux réduites successives aient mêmes surfaces minima. Excluons d'abord ce cas. Comme les réduites paires ont leurs degrés qui décroissent quand l'indice croît, on arrivera certainement à une réduite, intersection totale, générale ou non, de deux surfaces. Or cette dernière courbe est congrue au plan, par suite les courbes admettant une telle réduction sont aussi congrues au plan. *L'existence de courbes non congrues au plan dépend de celle de la figure formée par deux courbes* C *et* Γ *dont l'ensemble forme l'intersection totale de deux surfaces* $F_n F_m$, *qui sont minima pour* C *et* Γ.

Bornons-nous à en donner un exemple. Soient m génératrices d'une même famille d'une quadrique F_2. Faisons passer par ces m droites C, une surface F_m qui recoupe F_2 suivant la courbe Γ. La courbe Γ est constituée par m génératrices de l'autre famille. Faisons en effet passer par un point de Γ la génératrice de cette 2ᵉ famille; elle rencontre F_m en $m+1$ points et par suite est tout entière sur F_m. *Les courbes* C *et* Γ *admettent* F_2 *et* F_m *pour surfaces minima.* Si en effet on fait passer une $F_{m'}(m' < m)$ par C, elle contiendra la quadrique F_2, puisque les génératrices de la 2ᵉ famille la rencontrent en plus de m' points.

Théorème. — *Les courbes qui peuvent se déduire de* m *génératrices d'une même famille d'une quadrique ne sont pas congrues au plan.*

Il est à remarquer que les raisonnements faits dans le cas où la courbe est congrue au plan, peuvent encore partiellement s'appliquer au cas général. Ainsi, tant que la surface Φ_l n'aura pas de correspondantes passant par la réduite qui forme avec la suivante la figure précédente, on aura la même expression pour la valeur de δ_l (fin du paragraphe 8). Les quantités $h_{2l} k_{2l}$ n'étant plus les caractéristiques du système de points, section plane de la courbe, mais les caractéristiques propres à la courbe. De même, si on connaît l'expression de δ_l pour cette réduite, par la même méthode on trouvera la valeur de δ_l pour une courbe qui s'en déduit.

10. Montrons rapidement quelles sont les difficultés qui se présentent dans l'étude des systèmes de points de l'espace. Soit A un tel système. La surface de plus petit degré F_p qui peut passer par A sera dite *première surface minima*. La surface de plus petit degré F_q qui peut passer par A sans nécessairement se décomposer en la précédente et une surface arbitraire de degré convenable sera la *deuxième surface minima*. La surface de plus petit degré F_r qui passant par A ne contient pas

nécessairement la courbe intersection totale des deux surfaces minima précédentes sera la *troisième surface minima*. Ces trois surfaces se recoupent suivant le système A_1, premier réduit de A. Le premier réduit A_2 de A_1 est le deuxième réduit de A, etc. Toutes les conventions de langage dont nous nous sommes servis dans le plan peuvent être employées dans l'espace.

Calculons la singularité de A en fonction de celle de A_2. Soient $F_{p_1} F_{q_1} F_{r_1}$ les surfaces minima de A_1. La courbe C_{pq}, intersection totale de F_p et de F_q est recoupée par F_{p_1} suivant le système α. La courbe C_{pp_1}, intersection totale de F_p et de F_{p_1} est recoupée par F_{q_1} suivant le système β. Enfin $C_{p_1 q_1}$ est recoupée par F_{r_1} suivant A_2.

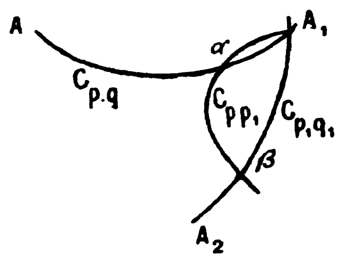


FIG. 21.

Nous avons vu au paragraphe 3, pour les courbes intersections totales de deux surfaces, le théorème analogue de celui qui nous a servi pour les courbes planes. Nous pouvons en tirer les mêmes conséquences. Les systèmes A et α, α et β, β et A_2 sont corésiduels respectivement sur C_{pq}, C_{pp_1}, $C_{p_1 q_1}$. Soient $\Phi_l \Phi_\lambda \Phi_\mu \Phi_{l_2}$ les surfaces correspondantes passant par A, α, β, A_2. Ecrivons de deux façons la dimension de la série déterminée par ces Φ_l et Φ_λ sur C_{pq} en remarquant que $l \geqslant q > p$.

$$pql - \mathrm{P} - [\Pi - \mathrm{P} - \varphi_3(p+q-l)] - (\mathrm{A} - s^l_{\mathrm{A}}) = pq\lambda - \mathrm{P} - [\Pi - \mathrm{P} - \varphi_3(p+q-\lambda) + \varphi_3(p-\lambda) + \varphi_3(q-\lambda)],$$

où P est le genre de C_{pq}. Comme d'ailleurs $l - r = \lambda - p_1$, on peut écrire :

$$s^l_{\mathrm{A}} = s^\lambda_\alpha + \varphi_3(p+q+r-p_1-l) - \varphi_3(p+r-p_1-l) - \varphi_3(q+r-p_1-l) - \varphi_3(p+q-l).$$

De même la série déterminée sur C_{pp_1} par les Φ_λ et Φ_μ donne :

$$s^\lambda_\alpha = s^\mu_\beta + \varphi_3(p+q+r-q_1-l) - \varphi_3(p+q+r-p_1-q_1-l) - \varphi_3(p+r-l) - \varphi_3(q+r-q_1-l) + \varphi_3(p+r-p_1-l).$$

La série sur $C_{p_1 q_1}$ donne aussi :

$$s^\mu_\beta = s^{l_2}_{\mathrm{A}_2} + \varphi_3(p+q+r-r_1-l) - \varphi_3(p+q+r-q_1-r_1-l) - \varphi_3(p+q+r-p_1-r_1-l) - \varphi_3(q+r-l)$$
$$+ \varphi_3(q+r-q_1-l) + \varphi_3(q+r-p_1-l).$$

En ajoutant membre à membre ces trois égalités :

$$s'_A = s^{l_2}_{A_2} + \varphi_3(p+q+r-p_1-l) + \ldots - \varphi_3(p+q+r-p_1-q_1-l) - \ldots - \varphi_3(p+q-l) - \ldots .$$
$$l = p+q+r-p_1-q_1-r_1+l_2.$$

Comme dans le plan, on peut mettre cette relation sous la forme :

$$C^3_{l+3} - (A - s^l_A) = C^3_{l_2+3} - (A_2 - s^{l_2}_{A_2}) + \psi_3(p+q+r-p_1-q_1-l) + \ldots - \psi_3(p+q+r-p_1-l) - \ldots$$
$$+ \psi_3(p+q-l) + \ldots - \psi_3(p-l) - \ldots .$$

Remarquons simplement que pour que $F_pF_qF_r$ soient surfaces minima de A, il faut et il suffit qu'ils vérifient les inégalités :

$$p+q > p_1+q_1+r_1-p_2, \quad q+r > p_1+q_1+r_1-p_2, \quad r+p > p_1+q_1+r_1-p_2.$$

Cela nous permet de construire des systèmes de points se réduisant à un système général (c'est-à-dire un système dont la singularité est nulle pour sa première surface minima), ou à une intersection totale de trois surfaces. La singularité de tels systèmes est facile à exprimer. Nous n'insisterons pas. Qu'il nous suffise d'indiquer seulement les deux différences fondamentales que cette théorie présente avec sa correspondante dans le plan.

1° *Il existe des figures formées par deux systèmes de points* A *et* B *dont l'ensemble forme l'intersection totale de trois surfaces* $F_pF_qF_r$ *qui sont minima pour* A et B.

Pour le voir simplement, il suffit de considérer deux courbes C et Γ dont l'ensemble forme l'intersection totale de F_p et F_q surfaces minima respectivement pour C et Γ, et de les couper par F_r $r \geqslant q \geqslant p$. Les deux systèmes A et B sections de C et Γ par F_r admettent $F_pF_qF_r$ comme surfaces minima.

2° *La correspondance que nous avons établie au chapitre II entre les réduits pairs de deux systèmes de points déduits l'un de l'autre par un nombre arbitraire de couples de courbes n'a pas son analogue dans l'espace.*

Il suffit de calculer le nombre de points du deuxième réduit B_2 du système B déduit de A par l'intermédiaire des trois surfaces $F_3F_4F_2$, pour voir que le nombre $A_2 + B_2$ n'est pas le produit de trois entiers.

Terminons ce sujet en faisant une remarque qui va nous servir plus loin.

Si le système A, intersection totale d'une courbe C et de la surface F_r, admet les mêmes surfaces minima F_p et F_q que C, son premier réduit A_1 est l'intersection totale de C_1 première réduite de C avec F_r. Il peut arriver que tous les réduits de A soient les intersections totales de F_r avec toutes les réduites de C (en particulier si $r \geqslant q \geqslant p$). La réduction de A se fera ainsi tout entière sur F_r. Les formules précédentes sont applicables en y faisant $r = r_1$. En particulier :

$$l = p + q - p_1 - q_1 - l_2.$$

Cette relation est identique à celle qui lie les degrés des surfaces correspondantes passant par C et C_2. Par suite la condition qui exprime que F_p est surface minima de C est la même que celle qui dit que F_p est surface minima de A.

Nous dirons que *la courbe* C *est congrue à la surface* F_r, lorsque la réduction de l'intersection totale de F_r et de C se fait de la manière indiquée précédemment.

Une courbe est congrue aux surfaces de degré supérieur à sa deuxième surface minima. Car le système A admet alors les surfaces minima $F_p F_q F_r$. Comme A_1 est aussi l'intersection totale de C_1 et de F_r et que $q_1 \leqslant q < r$, A_1 admet comme surfaèes minima $F_{p_1} F_{q_1} F_r$, etc.

La remarque précédente montre en outre que *toutes les courbes déduites d'une courbe congrue aux surfaces* F_r *est aussi congrue aux surfaces* F_r.

Par conséquent, pour savoir à quelles surfaces est congrue une courbe, il suffit de savoir à quelles surfaces est congrue sa dernière réduite. En particulier :

Une courbe est congrue aux surfaces de degré supérieur à la deuxième surface minima de sa dernière réduite.

On peut donner une limite inférieure du degré des surfaces auxquelles est congrue une courbe. Il suffit pour cela de considérer sa dernière courbe réduite. Nous excluons le cas déjà étudié, ou c'est une droite, une conique ou une biquadratique. Supposons donc que C et Γ forment l'intersection totale des deux surfaces F_p et F_q ($p \leqslant q$) qui sont minima pour C et Γ. Coupons la figure par la surface F_x de degré x inférieur à q. Les systèmes A et B admettent F_p et F_x comme surfaces minima. Pour que C et Γ soient congrues à F_x, il faut en outre que A et B admettent F_q comme surface minima.

1. Supposons $x \leqslant q - p + 2$.

Puisque les surfaces F_{q-1}, passant par A ou B doivent contenir la courbe C_{px}, intersection totale de F_x et F_p, on doit avoir les deux inégalités :

$$A > px(q-1) - \mathrm{H}_{px},$$
$$B > px(q-1) - \mathrm{H}_{px}.$$

Et comme $A + B = pqx$, il faut et il suffit que :

$$px(q-1) - \mathrm{H}_{px} < A \leqslant px + \mathrm{H}_{px}.$$

La condition de possibilité s'écrit :

$$px(q-1) - \mathrm{II}_{px} < px + \mathrm{II}_{p.x}.$$

ou

$$x > q - p + 2 - \frac{2}{px}.$$

Il est donc nécessaire que $x = q - p + 2$. Dans ces conditions, il faut :

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \frac{px(p+x-2)}{2}.$$

Un exemple de ce cas est celui de C et Γ sont constituées par q génératrices des deux familles d'une quadrique.

2. Supposons $x > q - p + 2$.

La même remarque permet d'écrire :

$$(1) \quad p(q-1)x - \mathrm{II}_{p\,x} + \varphi_3(p+x-q+1) < \mathrm{A} < px + \mathrm{II}_{p.x} - \varphi_3(p+x-q+1).$$

La condition de possibilité s'écrit :

$$f(x) = p(q-2)x - px(p+x-4) - 2 + \frac{(p+x-q)(p+x-q-1)(p+x-q-2)}{3} < 0.$$

On vérifie aisément que :

$$f(0) < 0, \quad f(q-p) > 0, \quad f(q-p+2) < 0, \quad f(q) < 0, \quad f(+\infty) > 0.$$

La condition de possibilité est donc toujours vérifiée quand $q - p + 2 < x < q$.

Théorème. — *Une limite inférieure des degrés des surfaces auxquelles une courbe est congrue est égale à l'excès du degré de la deuxième surface minima de sa dernière réduite sur celui de sa première surface minima augmentée de deux.*

Soit x_0 une valeur de x pour laquelle les inégalités (1) sont vérifiées. On voit facilement que, lorsque x est compris entre $q - p + 2$ et q, le premier membre de la première inégalité est fonction décroissante de x, et le deuxième membre est fonction croissante de x. Par suite les inégalités (1) seront vérifiées *à fortiori* quand x est supérieur à x_0.

Théorème. — *Si une courbe est congrue aux surfaces de degré x_0, elle est congrue aux surfaces de degré supérieur.*

11. Soit la courbe C, coupée par la surface F_x suivant le système A. La dimension du système de courbes φ_l découpées sur F_x par les Φ_l passant par C est :

$$\varphi_l - \omega_l^x = C^3_{l+3} + \psi_3(x-l) - 1 - [Cx - s^l_A] - \omega_l^x$$

en appelant ω_l^x le défaut de ce système par rapport à celui déterminé sur F_n par les Φ_l passant par A. D'autre part si r_l et r_{l-x} sont les dimensions des Φ_l et Φ_{l-x} passant par C, on a l'égalité :

$$r_{l-x} = r_l - (\varphi_l - \omega_l^x + 1),$$

d'où

$$C^3_{l-x+3} - 1 - [C(l-x) - p - \delta_{l-x} + 1] = C^3_{l+3} - 1 - [Cl - p - \delta_l + 1] - [C^3_{l+3} + \psi_3(x-l) - 1 - (Cx - s^l_A) - \omega_l^x]$$

ou comme $l > x$,

$$\delta_l - \delta_{l-x} = s^l_A - \omega_l^x.$$

Cette relation va nous permettre d'étendre, dans une certaine mesure, aux courbes gauches, le théorème démontré pour les courbes intersections totales de deux surfaces au paragraphe 3.

Reprenons la figure qui nous a servi pendant tout le chapitre, et supposons, pour simplifier, que F_x et F_l soient surfaces minima de Γ.

Théorème. — *Si $l_1 > x$, le défaut ω_l^x relatif à la courbe Γ est égal au défaut $\omega^x_{l_1}$ relatif à la courbe C_1.*

Reprenons les calculs faits au paragraphe 6. Avec les mêmes notations on a :

$$\frac{n}{2}(\lambda - l_1)(n - 4 - l_1 - \lambda) + \frac{l}{2}(l - \lambda)(l - 4 - l - \lambda) - \varphi_3(n - l_1) - \varphi_3(l - \lambda) = [C_1 l_1 - p_{C_1} - \delta^{C_1}_{l_1}] - [\Gamma l - p_\Gamma - \delta^\Gamma_l]$$

D'autre part, J étant une fonction convenable indépendante de l, on a vu que

$$\frac{n}{2}(\lambda - l_1)(n - 4 - l_1 - \lambda) + \frac{l}{2}(l - \lambda)(l - 4 - l - \lambda) = J + mnl_1 - zll.$$

Et par suite en remplaçant l par ω, l_1 par ω_1,

$$\frac{n}{2}(\lambda - \omega_1)(n - 4 - \omega_1 - \lambda) + \frac{l}{2}(\omega - \lambda)(l - 4 - \omega - \lambda) = J + mn\omega_1 - zl\omega.$$

D'ailleurs on a l'identité :

$$\frac{n}{2}(\lambda - \omega_1)(n - 4 - \omega_1 - \lambda) + \frac{l}{2}(\omega - \lambda)(l - 4 - \omega - \lambda) = C^3_{\omega-l+2} + C^3_{\omega-z+2} - C^3_{\omega-2} + C^3_{\omega_1+2} - C^3_{\omega_1-n+2} - C^3_{\omega_1-m+2}$$
$$+ mn - zl.$$

Par suite :

$$J = C^3_{\omega-t+2} + C^3_{\omega-z+2} - C^3_{\omega+2} + C^3_{\omega_1+2} - C^3_{\omega_1-n+2} - C^3_{\omega_1-m+2} + mn - zt + mnl_1 - ztl.$$

On obtient l'égalité :

$$[\Gamma(\omega - 1) - p_\Gamma - \delta_l^{\Gamma}] - [C_1(\omega_r - 1) - p_{C_1} - \delta_{l_1}^{C_1}] = [C^3_{\omega_1-n+2} + C^3_{\omega_1-m+2} - C^3_{\omega_1+2}] - [C^3_{\omega-z+2} + C^3_{\omega-t+2} - C^3_{\omega+2}] + \varphi_1(h_1 - l) + \varphi_2(k_1 - l).$$

On peut alors aisément faire la différence

$$(\delta_l^{\Gamma} - \delta_{l-x}^{\Gamma}) - (\delta_{l_1}^{C_1} - \delta_{l_1-x}^{C_1})$$

ou l'on suppose $l_1 - x > h_2^{C_1}$ pour que Φ_{l_1-x} ne soit pas obligée de passer par C_1. On trouve

$$\delta_l^{\Gamma} - \delta_{l-x}^{\Gamma} - s'_B = \delta_{l_1}^{C_1} - \delta_{l_1-x}^{C_1} - s_{A_1}^{l_1}$$

où B et A_1 sont les sections de Γ et C_1 par F_x. c. q. f. d.

Si $l_1 - x$ est inférieur à $h_2^{C_1}$, on obtient le même résultat en se servant des calculs faits au paragraphe 8.

Soit une courbe C coupée suivant le système A par la surface F_x. La dimension ρ_{l-x} de la série déterminée sur C par les Φ_l passant par A est donnée par l'expression :

$$\rho_{l-x} = Cl - p - \delta_l^{C} - (A - s'_A).$$

La série déterminée par les Φ_{l-x} sur C a pour dimension :

$$r_{l-x} = (l - x)C - p - \delta_{l-x}^{C}.$$

De sorte que :

$$\rho_{l-x} - r_{l-x} = -\delta_l^{C} + \delta_{l-x}^{C} + s^l_A = +\omega_l^x.$$

Théorème. — *Si les* Φ_l *passant par* C *et par* A *découpent sur* F_x *le même système. Une surface* Φ_l *passant par* A *recoupe* C *suivant l'intersection totale de* C *et de* Φ_{l-x}.

Nous pouvons maintenant faire l'extension annoncée. Considérons les courbes congrues à un plan, elles se réduisent à une droite, une conique, une biquadratique. Le ω_l^x de ces trois courbes est nul quelles que soient les valeurs de x et de l.

Théorème. — *Si* F_l *coupe une courbe* C *congrue à un plan suivant son intersection totale avec* F_x, *elle la recoupe suivant une intersection totale avec* F_{l-x}.

Plaçons-nous dans le cas général. Ce qui précède montre qu'il suffit d'étudier le défaut ω_l^r relatif à une courbe dont la première réduite admet les mêmes surfaces minima que la précédente. Quand le théorème sera vrai avec cette dernière courbe pour une surface Φ_l de degré l supérieur à χ_r lorsqu'elle rencontre cette courbe suivant son intersection totale avec F_x, il sera encore vrai pour toutes les courbes l'admettant comme réduite paire, avec une surface Φ_L de degré correspondant à l et la même surface F_x.

On sait que lorsque l est supérieur à un nombre χ_1, le défaut ω'_l des Φ_l passant par par une courbe C sur le plan est nul(¹). On peut donc énoncer :

Théorème. — *Si une Φ_l de degré $l > \chi_1$ coupe une courbe* C *suivant une section plane, elle la recoupe suivant son intersection totale avec* F_{l-1}.

Remarquons que :

$$\delta_l - \delta_{l-x} = (\delta_l - \delta_{l-1}) + (\delta_{l-1} - \delta_{l-2}) + \ldots + \delta_{l-x+1} - \delta_{l-x}.$$

Par conséquent si A et B sont les sections de la courbe C par F_x et F_1 :

$$s^l_A - \omega_l^r = (s^l_B + s_B^{l+1} + \ldots + s_B^{l-x+1}) - (\omega'_l + \omega'_{l-1} + \ldots + \omega'_{l-x+1}).$$

Pour une valeur de l assez grande, le deuxième membre est nul et

$$s^l_A = \omega_l^r.$$

Comme s^l_A est nul quand l est assez grand, il en est de même de ω_l^x.

Théorème. — *Si une Φ_l de degré $l > \chi_r$ coupe une courbe* C *suivant son intersection totale avec une* F_r, *elle la recoupe suivant son intersection totale avec une* F_{l-x}.

Quel est le rôle du nombre x_0, le degré le plus petit d'une surface à laquelle est congrue la courbe C? Je n'ai pu le préciser convenablement. Faisons cependant une remarque qui peut nous en donner une première idée. Si x_0 est de degré inférieur à celui de la deuxième surface minima de C, q. Si l est compris entre x_0 et q, les Φ_l passant par A, contiennent nécessairement la courbe $C_{p\,x_0}$, intersection totale de F_{x_0} et F_p. Elles recoupent donc F_p suivant l'intersection totale de F_p et F_{l-x_0} et par suite C suivant son intersection avec F_{l-x_0}. On peut donc énoncer la proposition suivante *comme probablement exacte* :

Si une courbe C *est congrue à une surface* F_x, *toute surface Φ_l passant par l'intersection de* C *avec* F_r *recoupe* C *suivant son intersection avec une* F_{l-r}.

(¹) Picard et Simart, tome II, p. 72.

TABLE DU MÉMOIRE