

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

ANDRÉ RAZMADZÉ

**Sur les solutions discontinues dans le calcul des variations**

*Thèses de l'entre-deux-guerres, 1925*

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1925\\_\\_54\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1925__54__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**ANDRÉ RAZMADZÉ**

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE TIFLIS

---

1<sup>ÈRE</sup> THÈSE

SUR LES SOLUTIONS DISCONTINUES DANS LE CALCUL  
DES VARIATIONS

2<sup>E</sup> THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

---

SOUTENUES LE

DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

---

MM. CARTAN, PRÉSIDENT

VESSIOT, }  
MONTEL, } EXAMINATEURS

---

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

|                        |   |   |
|------------------------|---|---|
| Doyen                  | MOLLIARD  | Professeur de Physiologie végétale.           |
| Doyen honoraire        | P. APPELL   |   |
| Professeurs honoraires | E. PUISEUX, CH VÉLAIN, BOUSSINESQ, HALLER, JOANNIS. |   |
| Professeurs            | ÉMILE PICARD  | Analyse supérieure et Algèbre supérieure.     |
|                        | KÉNIGS  | Mécanique physique et expérimentale.          |
|                        | GOUSAT  | Calcul différentiel et Calcul intégral.       |
|                        | JANET   | Électrotechnique générale.                    |
|                        | WALLERANT   | Minéralogie.                                  |
|                        | ANDOYER   | Astronomie.                                   |
|                        | PAINLEVÉ  | Mécanique analytique et Mécanique céleste.    |
|                        | HAUG  | Géologie.                                     |
|                        | H. LE CHATELIER                                     | Chimie générale.                              |
|                        | GABRIEL BERTRAND                                    | Chimie biologique.                            |
|                        | M <sup>me</sup> P. CURIE                            | Physique générale et radioactivité.           |
|                        | CAULLERY  | Zoologie (Évolution des êtres organisés).     |
|                        | C. CHABRIÉ  | Chimie appliquée.                             |
|                        | G. URBAIN   | Chimie minérale.                              |
|                        | ÉMILE BOREL   | Calcul des probabilités et Physique mathém.   |
|                        | MARCHIS   | Aviation.                                     |
|                        | JEAN PERRIN   | Chimie physique.                              |
|                        | ABRAHAM   | Physique.                                     |
|                        | CARTAN  | Géométrie supérieure.                         |
|                        | LAPICQUE  | Physiologie.                                  |
|                        | GENTIL  | Géographie physique.                          |
|                        | VESSIOT   | Théorie des groupes et Calcul des variations. |
|                        | COTTON  | Physique générale.                            |
|                        | DRACH   | Application de l'Analyse à la Géométrie.      |
|                        | C. FABRY  | Physique.                                     |
|                        | CHARLES PÉREZ                                       | Zoologie.                                     |
|                        | LÉON BERTRAND                                       | Géologie appliquée et Géologie régionale.     |
|                        | LESPIEAU  | Théories chimiques.                           |
|                        | LEDUC   | Physique théorique et Physique céleste.       |
|                        | RABAUD  | Biologie expérimentale.                       |
|                        | PORTIER   | Physiologie comparée.                         |
|                        | DANGEARD  | Botanique.                                    |
| MONTEL                 | Mécanique rationnelle.                              |   |
| MAURAIN                | Physique du globe.                                  |   |
| WINTREBERT             | Anatomie et Histologie comparées.                   |   |
| DUBOSCQ                | Biologie maritime                                   |   |
| N. . .                 | Mathématiques générales.                            |   |
| HEROUARD               | Zoologie.   |   |
| RÉMY PERRIER           | Zoologie (Enseignement P. C. N.).                   |   |
| SAGNAC                 | Physique théorique et Physique céleste.             |   |
| BLAISE                 | Chimie organique.                                   |   |
| PECHARD                | Chimie (Enseignement P. C. N.)                      |   |
| AUGER                  | Chimie analytique.                                  |   |
| M. GUICHARD            | Chimie minérale.                                    |   |
| GUILLET                | Physique.   |   |
| JULIA                  | Mathématiques générales.                            |   |
| MAUGUIN                | Minéralogie.  |   |
| BLARINGHEM             | Botanique.  |   |
| MICHEL-LEVY            | Pétrographie.                                       |   |
| Secrétaire             | D. TOMBECK.   |   |

2<sup>me</sup> Thèse.

**Propositions données par la Faculté.**

Surfaces minima.

Vu et approuvé:

Paris, le 19 Décembre 1924.

Le Doyen de la Faculté des Sciences

**M. MOLLIARD.**

Vu et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

**P. APPELL.**

---



À

Messieurs

J. HADAMARD et E. VESSIOT

HOMMAGE DE PROFOND RESPECT.



# Première Thèse

## Sur les solutions discontinues dans le calcul des variations.

---

### Introduction.

Soit  $f(x, y, y')$  une fonction des trois variables qui est continue, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à celles du troisième ordre, tant que le point  $(x, y)$  reste dans une région connexe du plan  $R$  et pour toutes les valeurs finies de  $y' = \frac{dy}{dx}$ . Soit encore donné l'ensemble  $\mathfrak{M}$  des courbes continues, joignant les deux points donnés  $P_1(x_1, y_1)$  et  $P_2(x_2, y_2)$ , qui satisfont aux conditions connues de régularité (continuité, existence des dérivées, etc) et qui sont situées à l'intérieur de la région  $R$ .

Le problème général du calcul des variations peut être formulé ainsi:

*Parmi les courbes de l'ensemble  $\mathfrak{M}$  en trouver une telle que l'intégrale*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

*prise le long de cette courbe ait une valeur plus petite ou plus grande que le long de toute autre courbe de cet ensemble.*

On sait que les extrémales satisfont à l'équation d'Euler

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

En outre si la courbe continue cherchée est anguleuse, les directions des tangentes aux points anguleux vérifient les deux relations suivantes:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) &= f(x_0, y_0, \bar{y}'_0) - \bar{y}'_0 f_{y'}(x_0, y_0, \bar{y}'_0) \\ f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) &= f_{y'}(x_0, y_0, \bar{y}'_0), \end{aligned}$$

$y_0$  et  $\bar{y}'_0$  étant les coefficients angulaires des tangentes aux deux arcs d'extrémale au point  $(x_0, y_0)$  où ces arcs se rejoignent.

Mais il y a des problèmes où aucune courbe continue ne rend l'intégrale minimum tandis qu'il existe des courbes discontinues, c'est-à-dire présentant des sauts brusques, qui fournissent un vrai minimum de l'intégrale dans un sens bien déterminé. C'est de ces solutions discontinues que nous allons nous occuper dans ce travail. Pour bien comprendre le problème, prenons l'exemple bien connu de Weierstrass:

Soit à trouver la valeur minimum de l'intégrale

$$J = \int_{-1}^{+1} x^2 y'^2 dx$$

prise le long d'une courbe continue, joignant les deux points  $P_1$  et  $P_2$  de coordonnées  $(-1, a)$ ,  $(1, b)$ ;  $a$  étant distinct de  $b$ . Il n'existe aucune extrémale continue joignant les deux points  $P_1$  et  $P_2$ . Mais la limite inférieure de l'intégrale  $J$  est égale à zéro. En effet, en désignant par  $\xi$  une constante, envisageons la fonction:

$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\xi}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\xi}}.$$

La courbe représentée par cette équation passe par les deux points  $P_1$  et  $P_2$ . Quand on met à la place de  $y$  la fonction précédente, on obtient le résultat suivant:

$$J < \frac{\xi (b-a)^2}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\xi}}.$$

Donc  $J$  sera aussi petit que l'on voudra si  $\xi$  est pris lui-même assez petit. La limite inférieure de l'intégrale est donc bien nulle. Mais d'autre part quelle que soit la courbe continue joignant les deux points  $P_1$  et  $P_2$ ,

la valeur de l'intégrale  $J$  prise suivant cette courbe ne peut être nulle. On en conclut que le problème proposé n'admet pas de solution continue.

Mais quand  $\xi$  tend vers zéro, on a à la limite

$$\begin{aligned} y &= a & x < 0, \\ y &= b & x > 0, \\ y &= \frac{a+b}{2} & x = 0. \end{aligned}$$

C'est cette fonction discontinue qui fournit pour l'intégrale de Weierstrass la valeur minimum zéro. On voit donc que pour le problème de Weierstrass l'extrémale est discontinue et présente un point de discontinuité de première espèce.

En général, quand le problème donné n'admet pas de solution continue, vu la nature de la fonction  $f$ , il y a lieu d'élargir l'énoncé du problème par l'introduction de courbes discontinues ayant des points de discontinuité de première espèce. Ces solutions seront dites solutions discontinues<sup>1)</sup>.

Le but de ce travail est de trouver pour le problème donné l'extrémale discontinue ayant *un* point de discontinuité de première espèce, qui passe par deux points donnés  $P_1$  et  $P_2$  et de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes de l'extremum pour ces solutions. Mais pour que cette généralisation ait un sens et une raison, les extrémales discontinues doivent être d'une nature spéciale:

La courbe discontinue ayant un point de discontinuité de première espèce est la limite d'une suite de courbes continues. Appelons *courbes d'approximation* les courbes continues qui tendent vers l'extrémale discontinue. Comparons l'intégrale  $J$  prise le long de l'extrémale discontinue à la même intégrale prise le long des courbes d'approximation. *Il ne suffit pas de s'assurer que la première intégrale soit plus petite que les dernières, il faut encore que parmi celles-ci il y en ait qui s'approchent autant qu'on veut de la première.* Ce n'est que des courbes de ce genre-là que nous tenons compte comme courbes de comparaison continues. Nous les appelons courbes d'approximation admissibles. Par exemple pour le problème de la moindre distance nous verrons (page 11) qu'il n'existe

<sup>1)</sup> On a l'habitude, dans le calcul des variations, d'appeler discontinues les extrémales continues à points anguleux. Cette dénomination qui a passé dans presque tous les traités ne nous semble plus tenable du moment qu'on introduit de vraies courbes discontinues. C'est pourquoi nous préférons appeler *anguleuses* ces extrémales en réservant le nom de solutions *discontinues* aux nôtres.

pas de courbes d'approximation admissibles et par conséquent pour ce problème les solutions discontinues n'ont pas de sens. Pour le problème de Weierstrass la condition énoncée est satisfaite, c'est pourquoi les solutions discontinues y ont un sens.

Nous diviserons l'exposé en deux parties. Dans la première partie nous développerons les conditions nécessaires pour le minimum. La seconde partie sera consacrée aux conditions suffisantes. A la fin de cet exposé, nous donnerons deux exemples de ce genre de problèmes. Il ne sera question dans la suite que du premier des deux extrema, minimum et maximum.

Je dois à M. E. Vessiot quelques remarques très précieuses au point de vue de la rigueur de certaines notions. Je lui adresse ma reconnaissance respectueuse.

Je suis profondément reconnaissant à M. O. Blumenthal qui a été le premier à s'intéresser à mes recherches exposées dans ce travail. Il m'a donné des conseils très précieux pour le travail. Je suis heureux de lui adresser mes plus affectueux remerciements.

## I. Conditions nécessaires.

### A. Conditions du premier ordre.

1. Nous prenons l'équation générale des courbes discontinues sous la forme

$$y = y(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

où la fonction  $y(x)$  présente dans l'intervalle  $(x_1, x_2)$  un point de discontinuité de première espèce  $x = x_0$ . Dans les intervalles

$$x_1 \leq x < x_0, \quad x_0 < x \leq x_2$$

elle est continue, aucune des tangentes n'est parallèle à l'axe des  $y$ , et le coefficient angulaire  $y'(x)$  reste toujours borné.

La courbe représentée par l'équation  $y = y(x)$  se compose de deux arcs de courbes continues telles que  $P_1 R_0$ ,  $\bar{R}_0 P_2$ , qui ne se rejoignent pas (fig. 1); la valeur de  $y$  qui correspond à l'abscisse  $x_0$  du point de discontinuité peut être quelconque, parce qu'elle n'influe nullement sur la valeur de l'intégrale prise le long de la courbe correspondante. Nous appelons les points où a lieu la rupture de ces courbes continues: *points de rupture*.

L'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx$$

prise le long d'une courbe discontinue est la somme de deux intégrales

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x, y(x), y'(x)) dx + \int_{x_0}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Dans chaque intervalle partiel  $y(x)$  est continue et  $y'(x)$  est bornée; par conséquent l'intégrale a une valeur finie. Nous écrirons cette intégrale  $J_{\mathfrak{C}}$  en indiquant la courbe  $\mathfrak{C}$  le long de laquelle elle est prise.

Dans la théorie figurent en outre des courbes continues dont nous déterminerons la forme dans le n° suivant.

2. Définissons maintenant le voisinage de l'extrémale discontinue, dans lequel doivent être situées toute autre courbe discontinue analogue et toutes les courbes continues de comparaison joignant les deux points donnés  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ .

Soit

$$\mathfrak{C} \quad y = \varphi_0(x) \quad \begin{cases} = y_0(x) & x_1 \leq x < x_0 \\ = \bar{y}_0(x) & x_0 < x \leq x_2 \end{cases}$$

l'équation de l'extrémale discontinue du problème;  $x = x_0$  le point de discontinuité;  $R_0(x_0, y_0), \bar{R}_0(x_0, \bar{y}_0)$  ses points de rupture. Considérons le trait brisé  $P_1 R_0 \bar{R}_0 P_2$  composé des deux arcs continus  $P_1 R_0, \bar{R}_0 P_2$  de notre extrémale et du segment vertical  $R_0 \bar{R}_0$ . Formons un domaine tel qu'à chacun de ses points  $(x, y)$  correspond un point  $(x^0, y^0)$  du trait brisé dont la distance à  $(x, y)$  soit plus petite qu'une quantité donnée  $\rho$ . Ainsi nous formons la région  $R_\rho$  ombrée sur la figure, dans laquelle doit être située toute courbe continue de comparaison et toute courbe discontinue analogue ayant les points de rupture dans les cercles de rayon  $\rho$  décrit autour des points  $R_0, \bar{R}_0$  et joignant les points extrêmes  $P_1, P_2$ .

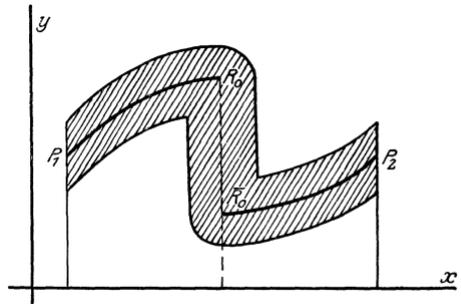


Fig. 1.

Nous pouvons maintenant déterminer la forme des courbes continues de comparaison d'une façon précise.

Soit  $\mathfrak{C}(P_1 K \bar{K} P_2)$  une courbe discontinue quelconque de la région  $R_\rho$  joignant les deux points extrêmes  $P_1, P_2$ .  $K, \bar{K}$  étant ses points de rupture et  $\bar{x}_0$  leur abscisse commune.

La forme des courbes en question est celle des courbes continues de la région  $R_0$  joignant les mêmes points extrêmes et se rapprochant de plus en plus de la ligne brisée  $P_1 K \bar{K} P_2$  de sorte qu'aucune des tangentes ne soit parallèle à l'axe des  $x$ . Nous dirons brièvement que ces courbes *tendent* vers  $\mathfrak{C}$ .

Soit

$$y = \omega_n(x)$$

l'équation d'une courbe pareille  $\lambda_n$ , choisissons une succession de nombres positifs  $\varepsilon_n$  décroissant et tendant vers zéro. Il est facile de voir d'après la définition mentionnée tout à l'heure que la dérivée  $\omega'_n(x)$  n'est pas bornée dans l'intervalle  $(\bar{x}_0 - \varepsilon_n, \bar{x}_0 + \varepsilon_n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

L'arc de la courbe  $\lambda_n$  dans l'intervalle  $(\bar{x}_0 - \varepsilon_n, \bar{x}_0 + \varepsilon_n)$  joue le rôle prépondérant pour la détermination des formes possibles de la fonction  $f$  correspondant au problème à résoudre. Nous appellerons cet arc *la chute* de la courbe  $\lambda_n$ .

**2<sup>bis</sup>.** Les méthodes du calcul des variations ne nous permettent d'admettre comme courbes de comparaison continues que des courbes qui vérifient la condition analogue à celle mentionnée pour les courbes d'approximation dans l'Introduction. C'est-à-dire, soit  $\{\lambda_n\}$  un ensemble de courbes continues de la région  $R_0$  tendant vers une courbe discontinue  $\mathfrak{C}$  quelconque de la même région. (En particulier la courbe  $\mathfrak{C}$  est l'extrémale  $\mathfrak{C}_0$  lorsque  $\{\lambda_n\}$  est un ensemble de courbes d'approximation.) Il s'agit de trouver un minimum dans le champ de tous les ensembles  $\{\lambda_n\}$  et des courbes discontinues correspondantes  $\mathfrak{C}$  telles que l'intégrale  $J$  prise suivant  $\lambda_n$  s'approche autant qu'on veut de la valeur de la même intégrale prise suivant la ligne  $\mathfrak{C}$ . Ce ne sont que des courbes  $\lambda_n$  de ce genre et des courbes discontinues  $\mathfrak{C}$  correspondantes que nous admettons comme courbes de comparaison. Nous les appelons *courbes de comparaison admissibles*.

*Nous dirons donc que la ligne discontinue  $\mathfrak{C}_0$  fournit un minimum relatif de l'intégrale  $J$ , si la valeur de cette intégrale, prise suivant la ligne  $\mathfrak{C}_0$  est plus petite que pour toute autre courbe discontinue analogue admissible ou toute courbe continue admissible joignant les deux points donnés  $P_1$  et  $P_2$  et située tout entière dans la région  $R_0$ .*

De cette définition on déduit la première condition à laquelle doit satisfaire la ligne  $\mathfrak{C}_0$ .

Pour que la ligne  $\mathfrak{C}_0$  donne un minimum relatif de l'intégrale  $J$  il est nécessaire que les arcs  $P_1 R_0, \bar{R}_0 P_2$  soient des courbes extrémales (courbes d'Euler) vérifiant toutes les conditions du minimum ordinaire.

### 3. Nous allons tout d'abord résoudre la question fondamentale:

*Sous quelle condition l'intégrale  $J$  prise suivant la courbe d'approximation peut-elle approcher autant qu'on veut de la valeur de la même intégrale prise suivant l'extrémale  $\mathfrak{E}_0$ .*

Soit  $\{\lambda_n\}$  l'ensemble des courbes d'approximation admissibles et

$$y = \omega_n(x)$$

l'équation de la courbe  $\lambda_n$ . Dès lors on a

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta J_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (J_{\lambda_n} - J_{\mathfrak{E}_0}) = 0,$$

ou bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) dx.$$

Soit en outre  $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$  l'intervalle de la chute et  $K(x_0 - \varepsilon_n, y_0 + \eta)$ ,  $\bar{K}(x_0 + \varepsilon_n, \bar{y}_0 + \bar{\eta})$  les points de la courbe  $\lambda_n$  correspondant aux abscisses  $x_0 - \varepsilon_n$ ,  $x_0 + \varepsilon_n$ . Joignons les points  $P_1, K$  et  $\bar{K}, P_2$  par les courbes extrémales voisines  $P_1K, \bar{K}P_2$  (fig. 9, n° 26). Il est évident que la courbe  $L_n(P_1K\bar{K}P_2)$  formée de ces deux arcs et ayant la même chute est une courbe d'approximation. Donc à l'ensemble  $\{\lambda_n\}$  correspond l'ensemble  $\{L_n\}$  ainsi formé.

Pour que les méthodes du calcul des variations soient applicables dans le cas du problème à résoudre, nous devons nécessairement admettre que pour le minimum on doit avoir à la fois

$$J_{\lambda_n} - J_{\mathfrak{E}_0} \geq J_{L_n} - J_{\mathfrak{E}_0} \geq 0,$$

c'est-à-dire, au point de vue de la recherche des conditions nécessaires et suffisantes il faut que les deux champs  $\{\lambda_n\}$  et  $\{L_n\}$  soient équivalents.

Appelons  $y = \varphi_n(x)$  l'équation de la courbe  $L_n$ . En tenant compte des dernières inégalités et de l'équation (1) on en déduit la condition suivante nécessaire pour que le problème posé soit résoluble

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (J_{L_n} - J_{\mathfrak{E}_0}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) dx \right] = 0.$$

Donc si  $\{\lambda_n\}$  est un ensemble de courbes d'approximation admissibles, l'ensemble correspondant  $\{L_n\}$  doit être également admissible.

D'autre part, si  $\eta$  est un nombre positif arbitrairement petit les deux courbes  $L_n$  et  $\mathfrak{E}_0$  à partir d'une certaine valeur de  $n$  auront entre elles en dehors de l'intervalle  $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$  un voisinage d'ordre 1

défini par ce nombre  $\eta$ .<sup>2)</sup> C'est-à-dire à un nombre positif  $\eta$  aussi petit qu'il soit on peut faire correspondre un autre nombre entier  $N$  tel que pour  $n > N$  on ait

$$(\eta) \quad |\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| < \eta, \quad |\varphi'_n(x) - \varphi'_0(x)| < \eta$$

pourvu que  $x$  appartienne à l'intervalle  $(x_1, x_0 - \varepsilon_n)$  ou à  $(x_0 + \varepsilon_n, x_2)$ .

Cela posé, nous allons démontrer que la condition mentionnée ci-dessus équivaut à la suivante:

*L'intégrale  $J$  prise suivant la chute de la courbe d'approximation admissible doit tendre vers zéro.*

Il est aisé de voir que cette condition est suffisante. Démontrons qu'elle est aussi nécessaire.

Considérons l'intégrale  $J$  prise suivant la chute de la courbe  $\lambda_n$ . Comme la courbe  $L_n$  a la même chute, par suite on peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx \\ = & \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) dx \\ & - \int_{x_1}^{x_0 - \varepsilon_n} [f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) - f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))] dx \\ & - \int_{x_0 + \varepsilon_n}^{x_2} [f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) - f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))] dx \\ & + \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) dx, \end{aligned}$$

d'où vient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx \right| \\ \leq & \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) dx \right| \\ & + \left| \int_{x_1}^{x_0 - \varepsilon_n} [f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) - f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))] dx \right| \\ & + \left| \int_{x_0 + \varepsilon_n}^{x_2} [f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) - f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))] dx \right| \\ & + \left| \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) dx \right|. \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Hadamard, Leçons sur le calcul des variations, p. 49.

D'après les inégalités ( $\eta$ ) et l'équation (2), chaque terme du second membre sera aussi petit qu'on voudra pour  $n$  assez grand. Il en sera de même du premier membre c'est-à-dire

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx = 0,$$

et notre proposition est démontrée.

Considérons maintenant l'ensemble  $\{\bar{\lambda}_n\}$  des courbes continues tendant vers une courbe discontinue quelconque  $\bar{\mathcal{C}}$  de la région  $R_\rho$ .

D'une façon analogue on peut démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes  $\{\bar{\lambda}_n\}$  et la courbe correspondante  $\bar{\mathcal{C}}$  soient *admissibles* est la suivante :

$$(\bar{A}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{x}_0 - \varepsilon_n}^{\bar{x}_0 + \varepsilon_n} f(x, \bar{\omega}_n(x), \bar{\omega}'_n(x)) dx = 0,$$

où  $y = \bar{\omega}_n(x)$  est l'équation de la courbe  $\bar{\lambda}_n$  et  $x = \bar{x}_0$  le point de discontinuité de la courbe  $\bar{\mathcal{C}}$ .

4. On voit donc que la question de l'existence des courbes continues admissibles se ramène à celle des courbes discontinues admissibles, c'est-à-dire à l'existence des valeurs de  $\bar{x}_0$  pour lesquelles la condition fondamentale ( $\bar{A}$ ) est satisfaite (*points de discontinuité admissibles*).

Il y a deux cas à distinguer. Ou la condition ( $\bar{A}$ ) peut être satisfaite pour un ensemble continu de valeurs de  $\bar{x}_0$ , ou bien il n'y a que des valeurs isolées de  $\bar{x}_0$ .<sup>3)</sup> Par exemple pour le problème que nous donnons à la fin de notre travail

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin(y y') dx$$

l'abscisse  $\bar{x}_0$  du point de discontinuité admissible est absolument arbitraire, tandis que pour le problème de Weierstrass, il n'y a qu'un seul point de discontinuité admissible  $\bar{x}_0 = 0$ .

Il y a avantage à exprimer ce raisonnement sous forme géométrique.

Les points de rupture des courbes discontinues admissibles doivent se trouver dans deux cercles de rayon  $\rho$  décrit autour des points de rupture  $R_0, \bar{R}_0$  de l'extrémale  $\mathcal{C}_0$ .

Dans le premier cas (*cas général*), nous allons résoudre le problème posé lorsque chaque couple de points ayant la même abscisse, situés à

<sup>3)</sup> On peut s'assurer qu'il n'y a que ces deux cas à distinguer, au moins en soumettant la fonction  $f$  aux conditions connues de régularité.

l'intérieur de ces cercles peut servir de points de rupture d'une courbe discontinue admissible<sup>4)</sup>.

Dans le second cas (*cas exceptionnel*) les points de rupture en restant toujours dans les mêmes cercles sont tous situés sur la droite  $x = x_0$  qui passe par les points de rupture  $R_0, \bar{R}_0$  de  $\mathfrak{C}_0$ .

4<sup>bis</sup>. Il est peu probable qu'on puisse trouver une règle générale permettant de reconnaître dans quels cas la condition ( $\bar{A}$ ) pourrait être vérifiée. On peut indiquer des règles d'une application de plus en plus étendue mais pas de règle générale.

Voici quelques-unes de ces règles.

*La condition ( $\bar{A}$ ) est vérifiée pour toutes les valeurs  $\bar{x}_0$  dans les cas suivants:*

1°. *Lorsque la valeur absolue de la fonction  $f$  pour toutes les valeurs de  $x, y, y'$  de la région  $R$  reste toujours inférieure à un nombre  $M$ . Ainsi par exemple sont les problèmes*

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{G(x, y)}{(1 + y'^2)^k} dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} F(x, y) \sin y' dx,$$

où  $G(x, y), F(x, y)$  sont des fonctions bornées dans la région  $R$ ;  $k$  est un nombre positif.

2°. *Lorsque en chaque point d'une droite de coefficient angulaire  $\frac{1}{\varepsilon}$  on a*

$$|f| < \frac{M}{\varepsilon k},$$

$k$  étant un nombre positif inférieur à l'unité.

Tel est le cas des problèmes

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \sqrt[3]{1 + y'^2} dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') (y'^{\frac{2}{3}} - y'^{\frac{5}{3}}) dx$$

$F(x, y, y')$  étant une fonction bornée dans la région de régularité  $R$ .

4) Il y a cependant des cas où les deux points de rupture ne peuvent pas varier indépendamment l'un de l'autre, mais où ils sont liés par une relation. On peut le voir par l'exemple du problème

$$\int_{x_2}^{x_1} f(y, y') dx.$$

$f(y, y')$  étant un polynôme par rapport à  $y'$  et une fonction impaire de  $y$ , c'est-à-dire

$$f(-y, y') = -f(y, y').$$

Cette remarque s'applique aussi au cas exceptionnel.

3°. Dans le cas particulier

$$f = \varphi(x, y)(ay'^2 + by' + c),$$

où  $a, b, c$  sont des constantes;  $\varphi(x, y)$  étant borné. Pour  $x$  constant appartenant à un certain intervalle  $(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\varphi(x, y)$  change de signe au moins deux fois.

Tel est le problème

$$\int_{x_1}^{x_2} (Ay^2 + By + C)(ay'^2 + by' + c) dx.$$

La chute admissible existe lorsque  $B^2 - 4AC > 0$ ; elle n'existe pas lorsque  $B^2 - 4AC \leq 0$ .

On peut enfin donner une condition générale pour que l'existence des courbes continues admissibles soit impossible. Faisons la transformation

$$x = Y, \quad y = X.$$

Alors on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dY}{dX}}$$

et

$$\int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, y, y') dx = \int_{y_0 + \eta}^{\bar{y}_0 + \bar{\eta}} Y' f\left(Y, X, \frac{1}{Y'}\right) dX,$$

où  $y_0 + \eta, \bar{y}_0 + \bar{\eta}$  sont les ordonnées des extrémités de la chute d'une courbe d'approximation.

La différence entre les limites de l'intégrale du second membre tend vers  $\bar{y}_0 - y_0$ . Une pareille forme de l'intégrale nous permet très souvent de constater si l'équation ( $\bar{A}$ ) pourra être vérifiée. Par exemple, si la fonction  $Y' f\left(Y, X, \frac{1}{Y'}\right)$  en gardant un signe constant dépasse une certaine limite presque partout dans l'intervalle d'intégration, l'équation ( $\bar{A}$ ) ne peut être satisfaite. Ainsi sont les problèmes

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} y^\alpha \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

**5. Conditions fondamentales.** Nous avons dit au n° 2<sup>bis</sup> qu'une solution discontinue du problème à résoudre se compose de deux arcs de courbes extrémales (courbes d'Euler). Il faut en outre que certaines conditions soient vérifiées aux points de rupture. Pour les obtenir, nous allons montrer qu'il suffit de comparer l'extrémale  $\mathfrak{E}_0$  à toute autre courbe *discontinue* admissible de la région  $R_\rho$ .

En effet, soit  $\{\bar{\lambda}_n\}$  un ensemble de courbes continues admissibles tendant vers une courbe discontinue  $\bar{\mathfrak{C}}$  de la région  $R_o$ . Supposons d'abord que  $\bar{\mathfrak{C}}$  est différente de  $\mathfrak{C}_o$ . En appliquant la définition du minimum, nous devons avoir

$$(3) \quad \Delta J_n = J_{\bar{\lambda}_n} - J_{\mathfrak{C}_o} \geq 0, \quad \Delta J = J_{\bar{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_o} \geq 0.$$

Mais d'autre part  $\Delta J_n$  peut être écrit ainsi:

$$(4) \quad \Delta J_n = J_{\bar{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_o} + (J_{\bar{\lambda}_n} - J_{\bar{\mathfrak{C}}}).$$

L'expression entre parenthèses du second membre tend vers zéro. Par conséquent le signe de  $\Delta J_n$  pour  $n$  suffisamment grand est déterminé par le signe de la différence  $J_{\bar{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_o}$ , c'est-à-dire, pour  $n$  suffisamment grand la première inégalité (3) est une conséquence de la seconde et vice versa la seconde est aussi une conséquence de la première. C. Q. F. D.

Donc au point de vue de la recherche des conditions nécessaires du minimum le champ des courbes continues admissibles, tant que nous laissons de côté les courbes d'approximation, équivaut à celui des courbes discontinues admissibles.

Comparons maintenant l'intégrale  $J$  prise suivant l'extrémale discontinue  $\mathfrak{C}_o$  à la même intégrale  $J$  prise suivant une courbe discontinue analogue  $\bar{\mathfrak{C}}$ . Plaçons-nous d'abord dans le cas général.

Soit

$$\bar{\mathfrak{C}} \quad y = \varphi(x) \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

l'équation de la courbe  $\bar{\mathfrak{C}}$ ,  $K$  et  $\bar{K}$  sont ses points de rupture.

Soient

$$\mathfrak{Q} \quad y = \eta(x), \quad \bar{\mathfrak{Q}} \quad y = \bar{\eta}(x)$$

deux courbes quelconques, qui joignent: la première les points  $R_o$  et  $K$  et la seconde les points  $\bar{R}_o$  et  $\bar{K}$  (fig. 2).

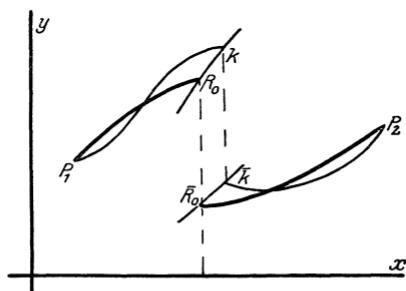


Fig. 2.

Imaginons qu'on déforme l'arc d'intégration  $\mathfrak{C}_o$  d'une façon continue à partir de la position initiale  $P_1 R_o \bar{R}_o P_2$ , les origines  $P_1$  et  $P_2$  restant fixes, de façon que  $R_o$  et  $\bar{R}_o$ , ayant toujours la même abscisse, se déplacent respectivement sur  $\mathfrak{Q}$  et  $\bar{\mathfrak{Q}}$ . On peut passer de  $\mathfrak{C}_o$  à  $\bar{\mathfrak{C}}$  par cette déformation continue. Désignons une fois pour toutes par  $y'_o$ ,  $\bar{y}'_o$  les coefficients angulaires des tangentes en  $R_o$  et  $\bar{R}_o$  à l'extrémale  $\mathfrak{C}_o$ .

D'après les formules générales, on aura pour ce déplacement infiniment petit

$$\delta J_{\mathfrak{E}_0} = \varepsilon [f(x_0 + 0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) - f(x_0 - 0, y_0, y'_0) - \bar{y}'_0 f_{y'}(x_0 + 0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) + y'_0 f_{y'}(x_0 - 0, y_0, y'_0) + \bar{\eta}'(x_0) f_{y'}(x_0 + 0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) - \eta'(x_0) f_{y'}(x_0 - 0, y_0, y'_0)].$$

Mais les courbes  $\mathfrak{Q}$  et  $\bar{\mathfrak{Q}}$  sont absolument arbitraires et par conséquent  $\eta'(x)$  et  $\bar{\eta}'(x)$  sont aussi arbitraires. D'après cela, et en tenant compte de la continuité de la fonction  $f$  et de ses dérivées, on peut ramener la condition nécessaire pour le minimum aux trois équations suivantes:

$$\text{I} \quad \begin{cases} f(x_0, y_0, y'_0) = f(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0), \\ f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0, \\ f_{y'}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) = 0. \end{cases}$$

Prenons maintenant le cas exceptionnel. Alors, comme nous l'avons déjà dit, les courbes discontinues de comparaison ont leurs points de rupture sur la même ordonnée  $x = x_0$  que ceux de l'extrémale discontinue  $\mathfrak{E}_0$ .

Soient  $K(x_0, y_0 + \eta)$ ,  $\bar{K}(x_0, \bar{y}_0 + \bar{\eta})$  les points de rupture de la ligne de comparaison admissible  $P_1 K \bar{K} P_2$ . En raisonnant comme tout à l'heure, on aura l'expression suivante de la variation de l'intégrale  $J$

$$\delta J = \eta \cdot f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) + \bar{\eta} \cdot f_{y'}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0).$$

Elle devra être nulle, quels que soient  $\eta, \bar{\eta}$ . On en déduit deux équations correspondant au cas exceptionnel

$$\text{I}' \quad f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0, \quad f_{y'}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) = 0.$$

C'est la condition fondamentale (A) déterminant l'abscisse  $x_0$  du point de discontinuité admissible qui remplace la première des trois équations fondamentales I dans le cas exceptionnel considéré.

**6.** Les équations fondamentales I ont été obtenues sans tenir compte des courbes d'approximation comme courbes de comparaison.

D'autre part, la courbe  $\mathfrak{E}_0$  étant déterminée d'après les conditions initiales et les équations I, soit  $\{\lambda_n\}$  l'ensemble des courbes tendant vers  $\mathfrak{E}_0$  et fournissant à l'intégrale  $J$  des valeurs aussi près qu'on veut de  $J_{\mathfrak{E}_0}$ . Pour assurer que  $\mathfrak{E}_0$  est une solution discontinue du problème et que par conséquent  $\{\lambda_n\}$  est un ensemble de courbes d'approximation, il faut que la courbe  $\mathfrak{E}_0$  vérifie en outre la condition du premier ordre obtenue au moyen de l'inégalité

$$(5) \quad \Delta J_n = J_{\lambda_n} - J_{\mathfrak{E}_0} > 0.$$

Nous allons montrer que cette inégalité entraîne d'abord les mêmes équations I et qu'elle nous donne en outre quelques conditions supplémentaires.

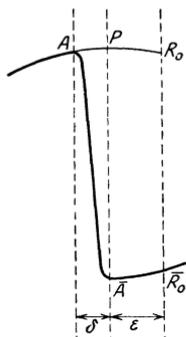


Fig. 3 a.

En effet, soit  $\bar{A}\bar{R}_0$  la continuation de la courbe extrémale  $\bar{R}_0P_2$  à gauche du point  $\bar{R}_0$ . Considérons la courbe  $\lambda(P_1A\bar{A}\bar{R}_0P_2)$  formée de l'arc  $P_1A$  de la courbe extrémale  $P_1R_0$ , de la chute admissible  $A\bar{A}$ , et de l'arc  $\bar{A}\bar{R}_0P_2$ . Cette courbe tend vers  $\mathfrak{E}_0$  lorsque  $\delta, \epsilon$  tendent simultanément vers zéro (fig. 3 a). D'autre part on peut rendre la différence  $J_\lambda - J_{\mathfrak{E}_0}$  aussi petite qu'on voudra. Par conséquent cette courbe vérifie les deux conditions mentionnées ci-dessus.

La comparaison nous donne

$$\Delta J = J_\lambda - J_{\mathfrak{E}_0} = J_{A\bar{A}} - J_{AP} + (J_{A\bar{R}_0} - J_{PR_0}).$$

Mais

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J_{A\bar{A}} = 0.$$

Par conséquent à chaque  $\epsilon$  on peut toujours faire correspondre  $\delta$  de telle manière qu'on ait

$$|J_{A\bar{A}} - J_{AP}| < \epsilon^2.$$

Alors le signe de  $\Delta J$  dépend du signe de la différence entre parenthèses. Par suite pour que  $\Delta J$  soit positif il faut que pour  $\epsilon$  suffisamment petit on ait

$$J_{A\bar{R}_0} - J_{PR_0} = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0} [f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)) - f(x, y_0(x), y'_0(x))] dx \geq 0.$$

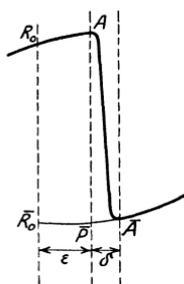


Fig. 3 b.

En considérant d'une façon analogue les courbes représentées par la figure 3 b on aura

$$\int_{x_0}^{x_0+\epsilon} [f(x, y_0(x), y'_0(x)) - f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x))] dx \geq 0.$$

Mais pour que les deux dernières inégalités aient lieu il faut qu'en faisant passer  $x$  par la valeur  $x_0$  en croissant la fonction

$$f(x, y_0(x), y'_0(x)) - f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x))$$

passse du négatif au positif.

On conclut de là que cette fonction doit s'annuler pour  $x = x_0$ , c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$f(x_0, y_0, y'_0) - f(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) = 0.$$

C'est la première condition I.

Pour démontrer les deux dernières équations I nous construisons les courbes de comparaison de la manière suivante:

Sur la ligne  $R_0 \bar{R}_0$  nous prenons le point  $A(x_0, y_0 - \varepsilon)$  et le joignons au point  $P_1$  par la courbe extrémale voisine  $P_1 A$ . Considérons la courbe  $\lambda(P_1 A \bar{A} P_2)$  formée de l'arc  $P_1 A$ , de la chute admissible  $A \bar{A}$  et de l'arc  $\bar{A} P_2$  de la courbe extrémale  $\bar{R}_0 P_2$  (fig. 3c). Si  $\delta, \varepsilon$  tendent simultanément vers zéro la courbe  $\lambda$  tendra vers  $\mathfrak{C}_0$ . D'autre part  $J_\lambda$  peut être aussi proche qu'on veut de  $J_{\mathfrak{C}_0}$ .

La comparaison nous donne

$$\Delta J = J_\lambda - J_{\mathfrak{C}_0} = J_{P_1 A} - J_{P_1 R_0} + (J_{A \bar{A}} - J_{\bar{R}_0 \bar{A}}).$$

Comme ci-dessus on peut établir la correspondance entre  $\delta$  et  $\varepsilon$  de telle manière qu'on ait

$$|J_{A \bar{A}} - J_{\bar{R}_0 \bar{A}}| < \varepsilon^2.$$

Mais

$$J_{P_1 A} - J_{P_1 R_0} = \varepsilon f_y'(x_0, y_0, y_0') + A \varepsilon^2.$$

En tenant compte de ces formules, la différence  $\Delta J$  s'écrira ainsi

$$\Delta J = \varepsilon f_y'(x_0, y_0, y_0') + B \varepsilon^2,$$

$A, B$  étant des quantités qui conservent des valeurs finies.

Or  $\varepsilon$  peut être positif ou négatif, par conséquent pour que  $\Delta J$  soit positif il faut qu'on ait

$$f_y'(x_0, y_0, y_0') = 0.$$

D'une manière analogue on peut démontrer la nécessité de l'équation

$$f_y'(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}_0') = 0.$$

Nous avons donc retrouvé les équations I.

7. Reprenons l'inégalité (5) et soit  $\{\lambda_n\}$  un ensemble de courbes d'approximation. Alors d'après la formule connue du calcul des variations<sup>5)</sup> et en tenant compte des équations I, on doit avoir

$$(6) \quad \Delta J_n = J_{\lambda_n} - J_{\mathfrak{C}_0} = \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega_n'(x)) dx - 2\varepsilon_n f(x_0, y_0, y_0') + \varepsilon_n(\varepsilon_n) > 0,$$

où  $y = \omega_n(x)$  est l'équation de la courbe  $\lambda_n$  et  $(\varepsilon_n)$  est une quantité tendant vers zéro avec  $\varepsilon_n$ .

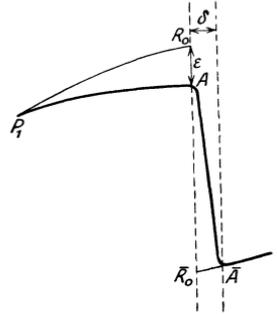


Fig. 3c.

<sup>5)</sup> Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung (Leipzig, Teubner, 1909), p. 44, 45.

L'inégalité (6) est absolument générale. Elle est difficilement applicable dans la pratique, puisque nous ne savons rien en général sur la nature de l'infiniment petit

$$\int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx.$$

La manière dont cette intégrale dépend de  $\varepsilon_n$  est totalement inconnue. Elle peut être de différents ordres par rapport à  $\varepsilon_n$  suivant le caractère de la fonction  $f$  et de  $\omega_n(x)$ .

L'inégalité (6) n'est au fond que l'énoncé de la question des conditions nécessaires et suffisantes dans le champ des courbes d'approximation.

Mais dans un cas assez étendu, à savoir lorsque la limite de l'expression

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx \right\}$$

existe ou si cette limite est infiniment grande, on peut en déduire des conditions nécessaires précises. Pour les obtenir divisons les deux membres de la dernière inégalité par  $2\varepsilon_n$  et passons ensuite à la limite, on aura la condition suivante

$$(B) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx \right] \geq f(x_0, y_0, y'_0).$$

C'est cette condition qui est nécessaire pour le minimum dans le cas considéré.

On peut la préciser encore, dans un cas intéressant, à savoir lorsque le problème à résoudre admet des chutes coupant le segment de rupture  $R_0 \bar{R}_0$  sous un angle arbitraire, le point d'intersection  $K$  étant quelconque sur ce segment<sup>6)</sup>. Cela a lieu par exemple pour les problèmes 1°, 2°, 3° du n° 4<sup>bis</sup>.

Pour obtenir la condition cherchée prenons le cas du problème 1°:

$$|f| < M.$$

Considérons le champ des valeurs de  $y, y'$

$$\bar{y}_0 \leq y \leq y_0, \quad y' \text{ quelconque.}$$

<sup>6)</sup> Ce cas m'a été signalé par deux lettres de M. Vessiot datées du 29 novembre et du 3 décembre 1924. La remarque avait été suggérée à M. Vessiot par une note de M. Paul Lévy (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 17 novembre 1924).

Soient  $y_k, y'_k$  des valeurs arbitraires de  $y, y'$  dans le champ. Nous allons démontrer que l'inégalité fondamentale (B) entraînera l'inégalité suivante

$$f(x_0, y_k, y'_k) \geq f(x_0, y_0, y'_0).$$

En effet, menons par le point  $K(x_0, y_k)$  une ligne  $CD$  de coefficient angulaire  $y'_k$ . Soit  $\varepsilon_n = \delta_n + \delta_n^2$ . En introduisant la chute  $ACKDB$  ayant les points extrêmes  $A, B$  sur les arcs de l'extrémale  $\mathfrak{C}_0$ , on aura d'après la formule de la moyenne de l'intégrale

$$\int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx = 2\delta_n f(x_0, y_k, y'_k) + K_0 \delta_n^2,$$

d'où l'on tire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx \right] = f(x_0, y_k, y'_k)$$

et par conséquent la condition (B) nous donne

$$(B_1) \quad f(x_0, y_k, y'_k) \geq f(x_0, y_0, y'_0).$$

Donc  $f(x_0, y, y')$  doit avoir pour  $y = y_0, y' = y'_0$  ou pour  $y = \bar{y}_0, y' = \bar{y}'_0$  la plus petite valeur dans le champ considéré<sup>6a)</sup>.

Nous avons supposé  $|f| < M$ . Mais la démonstration est analogue pour les autres problèmes du cas considéré.

Remarque. — Il est facile de voir que le raisonnement précédent ne s'applique qu'au cas où le point  $K$  se trouve sur le segment  $R_0\bar{R}_0$ . Autrement les courbes  $\lambda_n$  ne tendent pas vers l'extrémale discontinue  $\mathfrak{C}_0$ .

Exemple. Problème de Weierstrass:

$$\int_{-1}^{+1} x^2 y'^2 dx.$$

On a ici le cas exceptionnel, parce que la condition (A) n'est satisfaite que pour  $\bar{x}_0 = 0$ .

Les conditions fondamentales I' pour les solutions discontinues ont pour expression

$$x^2 y' = 0, \quad x^2 \bar{y}' = 0.$$

<sup>6a)</sup> Cette condition appartient à M. Vessiot. Nous l'appellerons condition de M. Vessiot.

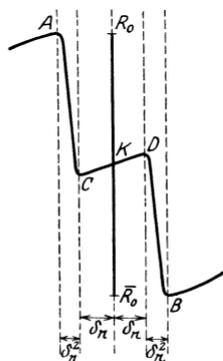


Fig. 4.

Donc, l'extrémale discontinue se compose de deux segments de parallèles à  $Ox$ :  $y = a$ ,  $y = b$ , ayant les points de rupture  $R_0(0, a)$ ,  $\bar{R}_0(0, b)$ .

On peut prendre pour la chute d'une courbe continue admissible la droite joignant deux points  $K(-\varepsilon, a)$ ,  $\bar{K}(\varepsilon, b)$  de l'extrémale discontinue. En effet, l'intégrale  $J$  prise le long de cette droite prend la forme

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x^2 \left( \frac{b-a}{2\varepsilon} \right)^2 dx = \frac{(b-a)^2 \cdot \varepsilon}{6},$$

expression qui tend vers zéro.

De plus on peut s'assurer très facilement que la condition (6) ou (B) est satisfaite au sens strict.

8. Nous admettons d'après ce qui a été dit à la fin du n° 2 bis, que les conditions nécessaires du minimum ordinaire soient vérifiées:

1°. Les conditions de Legendre et de Jacobi pour les arcs  $P_1 R_0$  et  $\bar{R}_0 P_2$

$$\begin{aligned} f_{y'y'} > 0, & \quad \bar{f}_{y'y'} > 0, \\ x'_0 < x_1 < x_0, & \quad x_0 < x_2 < \bar{x}'_0, \end{aligned}$$

au sens strict,  $x'_0$  et  $\bar{x}'_0$  étant les abscisses des foyers  $R'_0$  et  $\bar{R}'_0$  conjugués des points  $R_0$  et  $\bar{R}_0$  sur les arcs  $P_1 R_0$  et  $\bar{R}_0 P_2$  respectivement.

2°. La condition de Weierstrass pour les mêmes arcs

$$E(x, y_0(x), y'_0(x), \tilde{p}) \geq 0, \quad E(x, \bar{y}'_0(x); \bar{y}'_0(x), \tilde{p}) \geq 0.$$

Posons dans ces inégalités  $x = x_0$ . Alors d'après les deux dernières équations I on aura

$$f(x_0, y_0, \tilde{p}) \geq f(x_0, y_0, y'_0), \quad f(x_0, \bar{y}_0, \tilde{p}) \geq f(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0).$$

Donc pour le minimum il est nécessaire que les fonctions  $f(x_0, y_0, \tilde{p})$ ,  $f(x_0, \bar{y}_0, \tilde{p})$  aient des minima absolus pour les valeurs  $\tilde{p} = y'_0$ ,  $\tilde{p} = \bar{y}'_0$ , c'est-à-dire nous avons retrouvé la condition (B<sub>1</sub>) pour deux valeurs particulières de  $y_k$ :  $y_k = y_0$ ,  $y_k = \bar{y}_0$ .

9. *Deux champs de courbes continues.* D'après ce qui précède nous sommes amenés à distinguer deux champs de courbes continues admissibles de comparaison outre celui des courbes discontinues analogues.

1°. Le champ des courbes continues tendant vers les courbes discontinues de comparaison.

2°. Le champ des courbes continues tendant vers l'extrémale discontinue (courbes d'approximation).

Désignons ces deux champs par  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\mathfrak{F}_2$  respectivement et celui des courbes discontinues analogues par  $\mathfrak{F}_0$ .

Au point de vue des conditions qu'on obtient en *annulant* la variation première les deux champs  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  nous ont donné les mêmes résultats. Ce sont les équations fondamentales I.

Mais le champ  $\mathfrak{F}_2$  nous a fourni d'autres conditions encore, à savoir l'inégalité (6).

On voit donc que le rôle de ces deux champs dans la résolution du problème posé est analogue à celui du champ de la variation faible et du champ de la variation forte pour le problème ordinaire.

Ajoutons maintenant aux champs  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  le champ  $\mathfrak{F}_0$ . Alors on peut exprimer ce qui précède de la manière suivante:

Pour que le minimum soit réalisé au champ  $\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_0$  il faut qu'il en soit de même au champ  $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_0$ .

C'est des conditions du minimum dans ce dernier champ que nous avons tout d'abord à nous occuper dans ce qui va suivre.

## B. Les autres conditions nécessaires du minimum. Signification des conditions fondamentales I.

10. Prolongeons les extrémales  $P_1 R_0$  et  $\bar{R}_0 P_2$  la première à droite du point  $R_0$  et l'autre à gauche du point  $\bar{R}_0$ . Soit  $X$  et  $\bar{X}$  deux points sur ces courbes et  $x$  leur abscisse commune, qui satisfait à l'inégalité

$$|x - x_0| < \varrho.$$

Nous pouvons considérer la courbe  $P_1 X \bar{X} P_2$  (fig. 3) comme une courbe de comparaison. L'intégrale  $J$  prise le long de cette courbe est une fonction de  $x$ :

$$J(x) = \int_{x_1}^x f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx + \int_x^{x_2} f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)) dx.$$

La fonction  $J(x)$  doit avoir sa plus petite valeur au point  $x = x_0$  et par conséquent  $J'(x_0) = 0$ ,  $J''(x_0) \geq 0$ . Mais

$$J'(x) = f(x, y_0(x), y'_0(x)) - f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)).$$

D'après les conditions I, l'égalité  $J'(x_0) = 0$  est vérifiée. Pour avoir la dérivée  $J''(x_0)$  du second ordre, il suffit de différentier la dernière équation, ce qui donne

$$J''(x) = f_x + y'_0(x) f_y + y''_0(x) f_{y'} - \bar{f}_x - \bar{y}'_0(x) \bar{f}_y - \bar{y}''_0(x) \bar{f}_{y'}.$$

Posons  $x = x_0$ . En vertu des conditions I, il résulte

$$J''(x_0) = f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y.$$

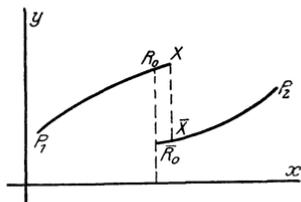


Fig. 5.

On en déduit la condition

$$\text{II} \quad f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y \geq 0,$$

à laquelle doit satisfaire l'extrémale, discontinue aux points de rupture.

**11.** Les deux dernières conditions I ou bien les conditions I' du cas exceptionnel

$$f_{y'} = 0, \quad \bar{f}_{y'} = 0,$$

nous montrent que la ligne  $R_0 \bar{R}_0$  coupe transversalement d'une part la branche  $P_1 R_0$  et d'autre part la branche  $\bar{R}_0 P_2$  de l'extrémale  $\mathfrak{C}_0$ . Mais la ligne  $R_0 \bar{R}_0$  n'est pas tangente aux courbes  $P_1 R_0$  et  $\bar{R}_0 P_2$  et par conséquent en vertu d'un théorème connu sur les transversales<sup>7)</sup>, on peut mener par tout point  $M$  de cette ligne voisine de  $R_0$  une seule extrémale voisine de  $P_1 R_0$ , qui est transversale en  $M$  à la ligne  $R_0 \bar{R}_0$ . L'ensemble de ces dernières extrémales constitue avec l'extrémale donnée  $P_1 R_0$  un faisceau à un seul paramètre.

Soit

$$(a) \quad y = \psi(x, a)$$

l'équation de ce faisceau et  $a = a_0$  la valeur de  $a$  correspondant à l'extrémale  $P_1 R_0$ . D'autre part, le long de la ligne  $R_0 \bar{R}_0$  on a  $x = x_0$  et par conséquent

$$f_{y'}(x_0, \psi(x_0, a), \psi_x(x_0, a)) = 0.$$

Soit  $\mathfrak{X}_0$  le foyer du faisceau (a) sur la branche  $P_1 R_0$  et  $x = \mathfrak{x}_0$  l'abscisse correspondante. Alors, en vertu du théorème connu sur les foyers, nous avons la condition suivante nécessaire pour le minimum

$$(7) \quad x_1 \geq \mathfrak{x}_0.$$

Différentions la dernière identité. Il en résulte

$$(8) \quad f_{y'y} \psi_a(x_0, a) + f_{y'y'} \psi_{ax}(x_0, a) = 0,$$

Appelons  $\Delta(x, x_0)$  une intégrale de l'équation de Jacobi admettant le zéro  $x_0$ . On a

$$\psi_a(x, a_0) = C \Delta(x, \mathfrak{x}_0), \quad \psi_{ax}(x, a_0) = C \Delta_x(x, \mathfrak{x}_0).$$

En posant  $a = a_0$  dans l'équation (8) nous avons d'après les deux dernières équations

$$f_{y'y} \Delta(x_0, \mathfrak{x}_0) + f_{y'y'} \Delta_x(x_0, \mathfrak{x}_0) = 0.$$

En raisonnant comme tout à l'heure, nous voyons que si  $\bar{\mathfrak{X}}_0$  est le foyer

<sup>7)</sup> Bolza, Vorlesungen, p. 322.

de la ligne  $R_0 \bar{R}_0$  sur la branche  $\bar{R}_0 P_2$  et  $\bar{x}_0$  l'abscisse correspondante, cette dernière satisfait à l'équation analogue

$$\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x_0, \bar{x}_0) + \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_0, \bar{x}_0) = 0$$

et l'abscisse  $x_2$  du point  $P_2$  doit vérifier l'inégalité

$$(\bar{7}) \quad x_2 \leq \bar{x}_0.$$

Mais il est aisé de voir qu'entre les deux points  $R'_0$  et  $R_0$  il n'existe qu'un foyer, c'est-à-dire que l'équation

$$f_{y'y} \Delta(x, x_0) + f_{y'y'} \Delta_x(x, x_0) = 0$$

admet un seul zéro  $x = x_0$  dans l'intervalle  $x'_0 \leq x \leq x_0$ . Une conclusion pareille s'obtiendra pour l'équation

$$\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x, x_0) + \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x, x_0) = 0.$$

Dès lors, la fonction

$$(9) \quad U(x) = f_{y'y}(x_0, y_0, y'_0) \Delta(x, x_0) + f_{y'y'}(x_0, y_0, y'_0) \Delta_x(x, x_0)$$

conserve un signe constant dans l'intervalle  $x_0 \leq x \leq x_0$ . Il en est de même pour la fonction

$$(\bar{9}) \quad \bar{U}(x) = \bar{f}_{y'y}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) \bar{\Delta}(x, x_0) + \bar{f}_{y'y'}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) \bar{\Delta}_x(x, x_0)$$

dans l'intervalle

$$x_0 \leq x \leq \bar{x}_0.$$

**11<sup>bis</sup>.** Les points  $x_0, \bar{x}_0$  constituent le seul couple de foyers de l'extrémale discontinue  $\mathfrak{E}_0$  dans le cas exceptionnel.

Donc, les raisonnements de ce n° nous ont donné d'une part les deux conditions nécessaires du minimum pour les extrémités  $P_1, P_2$  dans le cas général et d'autre part la théorie complète des foyers pour le cas exceptionnel.

On peut maintenant trouver des conditions suffisantes dans le cas exceptionnel. En effet, lorsque les conditions (7) et (7) sont vérifiées au sens strict, l'extrémale discontinue  $\mathfrak{E}_0$  peut être toujours entourée par un champ des extrémales discontinues ayant les points de rupture sur la droite  $x = x_0$ . Les deux branches de ces extrémales ne sont pas liées entre elles. Ce sont deux groupes différents d'extrémales continues coupant transversalement la droite  $x = x_0$ . Par suite, le théorème de Weierstrass aura lieu et nous pouvons écrire

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}') dx.$$

Donc la condition suffisante dans le cas exceptionnel s'exprimera ainsi:

$\Delta J$  est essentiellement positif lorsque

$$E(x, y, p(x, y), \tilde{p}) > 0$$

pour tout point du champ et pour toute valeur de  $\tilde{p}$  distincte de  $p$ .

Le problème du minimum dans le champ  $\mathfrak{F}_0$  pour le cas exceptionnel est donc résolu. Nous nous placerons désormais dans le cas général.

**12.** En utilisant la notion de transversalité on peut formuler aisément la solution du problème:

Trouver une extrémale discontinue passant par deux points donnés  $P_1$  et  $P_2$ .

Considérons une famille  $\mathfrak{N}$  de droites  $x = \bar{x}_0$  parallèles à l'axe des  $y$  et passant par les abscisses admissibles  $\bar{x}_0$  entre  $x_1$  et  $x_2$ . Menons par les points  $P_1$  et  $P_2$  des extrémales coupant transversalement ces droites. Un système de deux transversales à une même ligne  $x = \bar{x}_0$  forme une courbe discontinue admissible. Proposons-nous maintenant de déterminer dans cette famille une courbe discontinue de façon que la fonction  $f$  soit continue le long de cette courbe. Il est aisé de voir que le problème posé admet en général des solutions discontinues parce que nous avons en effet cinq équations à cinq variables ( $n^\circ 20$ ). Si une telle courbe existe, elle sera la solution discontinue. Si elle n'existe pas, les solutions discontinues sont impossibles.

### C. Théorie des foyers.

**13.** Il se pose tout d'abord la question: *Sous quelle condition un nouveau couple de points de rupture  $R(x, y)$ ,  $\bar{R}(x, \bar{y})$  voisins des points  $R_0(x_0, y_0)$ ,  $\bar{R}_0(x_0, \bar{y}_0)$  peut-il servir de points de rupture d'une solution discontinue?*

En ces deux points doivent être vérifiées les équations simultanées

$$(I') \quad \begin{cases} f(x, \bar{y}, \bar{y}') - f(x, y, y') = 0 \\ f_{y'}(x, y, y') = 0 \\ f_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') = 0, \end{cases}$$

où  $y', \bar{y}'$  est le couple des directions nouvelles.

Nous avons donc un système de trois équations à cinq variables, par conséquent parmi ces variables il y a deux qui sont arbitraires. Supposons que ce sont  $x, y$ , les coordonnées du point  $R$ . Ces équations sont vérifiées par le système des valeurs

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad \bar{y} = \bar{y}_0, \quad y' = y'_0, \quad \bar{y}' = \bar{y}'_0,$$

par suite elles feront connaître le second point  $\bar{R}$ , de rupture et le couple des directions nouvelles, si le jacobien

$$J = \frac{\partial (\bar{f} - f, \bar{f}_{y'}, \bar{f}_{y'})}{\partial (\bar{y}, y', \bar{y}' )}$$

n'est pas nul pour le système précédent. En désignant par  $J_0$  la valeur de  $J$  pour ce système on aura

$$J_0 = \begin{vmatrix} \bar{f}_y & 0 & \bar{f}_{y'y} \\ -f_{y'} & f_{y'y'} & 0 \\ \bar{f}_{y'} & 0 & \bar{f}_{y'y'} \end{vmatrix}_{\substack{x=x_0, y=y_0, \bar{y}=\bar{y}_0 \\ y'=y'_0, \bar{y}'=\bar{y}'_0}}$$

Or

$$(f_{y'})_0 = 0, \quad (\bar{f}_{y'})_0 = 0,$$

par conséquent

$$J_0 = f_y(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) f_{y'y'} \bar{f}_{y'y'}.$$

En tenant compte de la condition de Legendre nous obtenons le résultat suivant:

*Pour que la détermination de  $\bar{y}, y', \bar{y}'$  ne soit possible que d'une seule manière il faut que*

$$f_y(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) \neq 0.$$

Si nous prenons les coordonnées du point  $\bar{R}$  comme arbitraires, nous obtiendrons la condition analogue

$$f_y(x_0, y_0, y'_0) \neq 0.$$

Or nous verrons plus tard qu'au point de vue du minimum ces deux conditions sont identiques et qu'elles sont étroitement liées avec la condition II.

Prenons maintenant le cas contraire lorsque les équations I' entraînent

$$(10) \quad (f_y)_0 = 0, \quad (\bar{f}_y)_0 = 0.$$

Supposons en général que le couple  $R, \bar{R}$  se déplace à partir de sa position initiale  $R_0, \bar{R}_0$ . Alors de la première équation I' on tire

$$(\bar{f}_x)_0 + (\bar{f}_y)_0 \frac{\delta \bar{y}}{\delta x} - (f_x)_0 - (f_y)_0 \frac{\delta y}{\delta x} = 0.$$

Dans le cas considéré (10) cette formule se réduit à

$$f_x(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) - f_x(x_0, y_0, y'_0) = 0.$$

C'est la condition nécessaire pour que, dans le cas (10), les points de rupture  $R, \bar{R}$  voisins de  $R_0, \bar{R}_0$  et le couple des nouvelles directions existent. Mais, bien entendu, la correspondance entre les points associés  $R, \bar{R}$  n'est pas univoque ici, même elle peut être arbitraire.

On voit donc que la fonction  $f_y$  définit le caractère du problème posé dans le cas général (n° 4), à savoir:

*La correspondance entre les points de rupture associés  $R, \bar{R}$  respectivement voisins de  $R_0, \bar{R}_0$  est univoque lorsque  $(f_y)_0 \neq 0$  ou  $(\bar{f}_y)_0 \neq 0$ .*

*La correspondance entre ces deux points n'est pas univoque et elle peut être même arbitraire lorsque  $(f_y)_0 = (\bar{f}_y)_0 = 0$ .*<sup>8)</sup>

Nous résoudrons notre problème complètement pour le premier cas. Le deuxième cas, comme nous le verrons plus tard, peut être obtenu comme cas particulier.

Donc nous supposons désormais

$$(11) \quad f_y(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) \neq 0.$$

Revenons maintenant aux équations I'. Soient

$$(12) \quad \bar{y} = F(x, y), \quad y' = p(x, y), \quad \bar{y}' = \bar{p}(x, y)$$

leurs solutions. Ces trois fonctions sont uniformes et continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre tant que le point  $R$  reste dans un petit cercle décrit autour du point  $R_0$ . Pour  $x = x_0, y = y_0$  on aura

$$\bar{y}_0 = F(x_0, y_0), \quad y'_0 = p(x_0, y_0), \quad \bar{y}'_0 = \bar{p}(x_0, y_0).$$

Par conséquent lorsque le point  $R$  décrit une courbe  $\Gamma$  passant par le point  $R_0$ ,<sup>9)</sup> le point correspondant  $\bar{R}$  décrit une autre courbe  $\bar{\Gamma}$  passant par le point  $\bar{R}_0$ .

14. Soient comme toujours  $P_1, P_2$  les extrémités de l'extrémale discontinue  $\mathfrak{C}_0$  distincts des deux points  $\mathfrak{X}_0, \bar{\mathfrak{X}}_0$  du n° 11. Entourons maintenant la branche  $P_1 R_0$  par le faisceau des extrémales issues du point  $P_1$ . Soit

$$(\alpha) \quad y = y(x, \alpha)$$

l'équation de ce faisceau et  $\alpha_0$  la valeur de  $\alpha$  pour la branche  $P_1 R_0$ .

Le lieu géométrique des points de rupture  $R$  sur le faisceau  $(\alpha)$  se détermine à l'aide de l'équation

$$(13) \quad f_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) = 0.$$

Cette équation est vérifiée par le système des valeurs

$$x = x_0, \quad \alpha = \alpha_0.$$

<sup>8)</sup> On voit facilement le lien entre ces résultats et la condition (B<sub>1</sub>) de M. Vessiot.

<sup>9)</sup> Cette courbe peut être arbitraire parce que la condition de Legendre est vérifiée au sens strict.

La dérivée  $D$  du premier membre de l'équation précédente par rapport à  $\alpha$  est

$$D = f_{y'y} y_\alpha + f_{y'y'} y_{\alpha x},$$

ou d'après la formule (9)

$$D_0 = [D]_{x=x_0, \alpha=\alpha_0} = CU(x_1).$$

En tenant compte des résultats que nous venons d'obtenir au n° 11, il vient

$$D_0 \neq 0$$

et par conséquent nous pouvons résoudre l'équations (13) par rapport à  $\alpha$  dans le domaine de  $x = x_0$ ,  $\alpha = \alpha_0$ . Désignons cette solution par

$$\alpha = \alpha(x).$$

Portons cette valeur dans la formule ( $\alpha$ ), nous aurons l'équation du lieu géométrique dont nous avons parlé plus haut

$$\Gamma \quad y = y(x, \alpha(x)) = \gamma(x).$$

D'après ce qui précède cette courbe est distincte de la droite  $x = x_0$  et par conséquent la courbe correspondante  $\bar{\Gamma}$  que nous allons obtenir est aussi distincte de la même droite <sup>10)</sup>.

En portant cette valeur de  $y$  dans la première formule (12) on aura l'équation de la courbe  $\bar{\Gamma}$  que décrira le point correspondant  $\bar{R}$

$$\bar{\Gamma} \quad \bar{y} = F(x, \gamma(x)) = \bar{\gamma}(x).$$

Le couple des nouvelles directions se détermine à l'aide des équations

$$y' = p(x, \gamma(x)), \quad \bar{y}' = \bar{p}(x, \bar{\gamma}(x)).$$

Menons maintenant par les points de  $\bar{\Gamma}$  les courbes extrémales de coefficients angulaires  $\bar{p}(x, \bar{\gamma}(x))$ . L'ensemble de ces extrémales constitue avec l'arc  $\bar{R}_0 P_2$  un faisceau à un seul paramètre. Soit

$$(\alpha) \quad y = \bar{y}(x, \bar{\alpha})$$

l'équation de ce faisceau et

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(x)$$

la valeur de  $\bar{\alpha}$  le long de la courbe  $\bar{\Gamma}$ . Alors nous avons les identités

$$\bar{y} = \bar{y}(x, \bar{\alpha}(x)) = \bar{\gamma}(x), \quad \bar{y}' = \bar{p}(x, \bar{\gamma}(x)) = \bar{y}_x(x, \bar{\alpha}(x)).$$

Toutes ces valeurs de  $y$ ,  $\bar{y}$ ,  $y'$ ,  $\bar{y}'$  en fonction de  $x$  vérifient identiquement les équations I'.

<sup>10)</sup> La coïncidence n'a lieu que lorsque le faisceau ( $\alpha$ ) est issu du point  $x_0$ .

On aura donc pour les courbes  $\Gamma$ ,  $\bar{\Gamma}$  ainsi construites les trois identités suivantes

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y(x, \alpha(x)), y_x(x, \alpha(x))) - f(x, \bar{y}(x, \bar{\alpha}(x)), \bar{y}_x(x, \bar{\alpha}(x))) = 0 \\ f_{y'}(x, y(x, \alpha(x)), y_x(x, \alpha(x))) = 0 \\ f_{\bar{y}'}(x, \bar{y}(x, \bar{\alpha}(x)), \bar{y}_x(x, \bar{\alpha}(x))) = 0. \end{array} \right.$$

Appelons *courbes conjuguées* les courbes  $\Gamma$ ,  $\bar{\Gamma}$  pour lesquelles ces trois équations sont toutes vérifiées. Le foyer du faisceau ( $\alpha$ ) sur l'arc  $P_1 R_0$  étant  $P_1(x_1)$ , désignons le foyer du faisceau correspondant ( $\bar{\alpha}$ ) sur l'arc  $\bar{R}_0 P_2$  par  $P_1^*(x_1^*)$ . Ces deux points correspondant aux courbes conjuguées  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$  seront dits eux-mêmes *conjugués*.

Il s'agit tout d'abord de trouver la relation qui lie  $P_1$  et  $P_1^*$ .

**15.** Supposons donc que les courbes  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$  soient conjuguées. Alors les fonctions correspondantes  $\alpha(x)$  et  $\bar{\alpha}(x)$  satisfont aux trois équations (14) identiquement. Mais dans ce cas le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(f - \bar{f}, f_y, \bar{f}_{y'})}{\partial(x, \alpha, \bar{\alpha})}$$

s'annule aussi identiquement pour  $\alpha = \alpha(x)$ ,  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(x)$ , c'est-à-dire

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x}(f - \bar{f}), & \frac{\partial}{\partial \alpha}(f - \bar{f}), & \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}(f - \bar{f}) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_{y'}, & \frac{\partial}{\partial \alpha} f_{y'}, & \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} f_{y'} \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}_{y'}, & \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{f}_{y'}, & \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{f}_{y'} \end{array} \right|_{\alpha=\alpha(x), \bar{\alpha}=\bar{\alpha}(x)} = 0.$$

En calculant les dérivées dans cette relation, il résulte

$$\left| \begin{array}{ccc} f_x + y_x f_y - \bar{f}_x - \bar{y}_x \bar{f}_{y'}, & f_y y_\alpha, & -\bar{f}_{y'} \bar{y}_\alpha \\ f_y, & f_{y' y'} y_\alpha + f_{y' y'} y_{\alpha x}, & 0 \\ \bar{f}_{y'}, & 0, & \bar{f}_{y' y'} \bar{y}_\alpha + \bar{f}_{y' y'} \bar{y}_{\alpha x} \end{array} \right| = 0,$$

d'où l'on tire

$$(f_x + y_x f_y - \bar{f}_x - \bar{y}_x \bar{f}_{y'})(f_{y' y'} y_\alpha + f_{y' y'} y_{\alpha x}) (\bar{f}_{y' y'} \bar{y}_\alpha + \bar{f}_{y' y'} \bar{y}_{\alpha x}) - (\bar{f}_{y' y'} \bar{y}_\alpha + \bar{f}_{y' y'} \bar{y}_{\alpha x}) \bar{f}_{y'}^2 y_\alpha + (f_y y_\alpha + f_{y' y'} y_{\alpha x}) \bar{f}_{y'}^2 \bar{y}_\alpha = 0,$$

ou bien

$$(15) \quad \{[(f_x + y_x f_y) f_{y' y'} - f_y^2] y_\alpha + (f_x + y_x f_y) f_{y' y'} y_{\alpha x}\} (\bar{f}_{y' y'} \bar{y}_\alpha + \bar{f}_{y' y'} \bar{y}_{\alpha x}) - \{[(\bar{f}_x + \bar{y}_x \bar{f}_{y'}) \bar{f}_{y' y'} - \bar{f}_{y'}^2] \bar{y}_\alpha + (\bar{f}_x + \bar{y}_x \bar{f}_{y'}) \bar{f}_{y' y'} \bar{y}_{\alpha x}\} (f_{y' y'} y_\alpha + f_{y' y'} y_{\alpha x}) = 0.$$

Mais nous avons

$$(A) \quad \begin{cases} y_\alpha(x_0, \alpha_0) = C \Delta(x_0, x_1), & \bar{y}_{\bar{\alpha}}(x_0, \bar{\alpha}_0) = \bar{C} \bar{\Delta}(x_0, x_1^*), \\ y_{\alpha x}(x_0, \alpha_0) = C \Delta_x(x_0, x_1), & \bar{y}_{\bar{\alpha} x}(x_0, \bar{\alpha}_0) = \bar{C} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1^*), \end{cases}$$

où  $\Delta$  et  $\bar{\Delta}$  ont le même sens qu'au n° 11.

Portons les valeurs  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0$ ,  $x = x_0$  dans l'équation (15), nous aurons

$$(15') \quad \begin{aligned} & \{[(f_x + y'_0 f_y) f_{y'y} - f_y^2] \Delta(x_0, x_1) + (f_x + y'_0 f_y) f_{y'y'} \Delta_x(x_0, x_1)\} \\ & \quad \times (\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x_0, x_1^*) + \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1^*)) \\ & - \{[(\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'y} - \bar{f}_y^2] \bar{\Delta}(x_0, x_1^*) + (\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1^*)\} \\ & \quad \times (f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'y'} \Delta_x(x_0, x_1)) = 0. \end{aligned}$$

D'après ce qui a été dit au n° 11, l'expression

$$U(x_1) \bar{U}(x_1^*) = (f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'y'} \Delta_x(x_0, x_1)) (\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x_0, x_1^*) + \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1^*))$$

n'est pas identiquement zéro. En divisant les deux membres de (15') par cette expression, nous ramenons cette équation à la forme suivante

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{((f_x + y'_0 f_y) f_{y'y} - f_y^2) \Delta(x_0, x_1) + (f_x + y'_0 f_y) f_{y'y'} \Delta_x(x_0, x_1)}{f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'y'} \Delta_x(x_0, x_1)} \\ & = \frac{((\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'y} - \bar{f}_y^2) \bar{\Delta}(x_0, x_1^*) + (\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1^*)}{\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x_0, x_1^*) + \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1^*)} \end{aligned} \right.$$

C'est la relation cherchée qui lie les abscisses  $x_1$  et  $x_1^*$  des points conjugués.

Nous pouvons déduire de l'équation précédente des résultats intéressants. Le premier membre de l'équation (16) est constant lorsque  $f_y(x_0, y_0, y'_0) = 0$ , et par conséquent si cette équation est vérifiée, le second membre est aussi constant, ce qui n'est possible que lorsque  $f_y(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) = 0$ . Moyennant ces données l'équation (16) se réduit à l'équation

$$f_x(x_0, y_0, y'_0) - f_x(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) = 0,$$

déjà trouvée au n° 13. Elle exprime comme nous l'avons vu, la condition nécessaire pour que les solutions discontinues voisines soient possibles dans ce cas. D'autre part elle ne contient ni  $x_1$ , ni  $x_1^*$ . Par conséquent dans le cas considéré [ $f_y(x_0, y_0, y'_0) = 0$ ] les deux points arbitraires de l'extrémale  $\mathfrak{E}_0$  peuvent être considérés comme conjugués. Or

nous avons laissé de côté ce cas (formule (11)), et nous supposons désormais comme toujours qu'on a

$$f_y(x_0, y_0, y'_0) \neq 0, \quad \bar{f}_y(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) \neq 0.$$

16. Considérons maintenant l'invariant

$$T = \frac{[(f_x + y'_0 f_y) f_{y'y} - f_y^2] \Delta(x_0, x_1) + (f_x + y'_0 f_y) f_{y'y'} \Delta_x(x_0, x_1)}{f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'y'} \Delta_x(x_0, x_1)}.$$

Il est facile de montrer que cet invariant n'est que  $\operatorname{tg} \varphi$ ,  $\varphi$  étant l'angle que fait avec l'axe des  $x$  la tangente à la courbe

$$A \quad y = f(x, y(x, \alpha(x)), y_x(x, \alpha(x)))$$

au point  $x = x_0$ . De même l'invariant

$$\bar{T} = \frac{[(\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'y} - \bar{f}_y^2] \bar{\Delta}(x_0, x_1^*) + (\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1^*)}{\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x_0, x_1^*) + \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1^*)}$$

est égal à  $\operatorname{tg} \bar{\varphi}$ ,  $\bar{\varphi}$  étant l'angle que fait avec l'axe des  $x$  la tangente à la courbe

$$\bar{A} \quad y = f(x, \bar{y}(x, \bar{\alpha}(x)), \bar{y}_x(x, \bar{\alpha}(x)))$$

au point  $x = x_0$ .

En résumant, on déduit de l'équation (16) que les courbes  $\Gamma, \bar{\Gamma}$  sont conjuguées lorsque les courbes correspondantes  $A, \bar{A}$  sont tangentes au point  $x = x_0$ .

Il est aisé de voir que la fonction  $T(x_1)$  croît avec  $x_1$ . En effet,

$$\frac{dT}{dx_1} = \frac{k^2 f_y^2 \cdot f_{y'y'}(x_0, y_0, y'_0)}{(f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'y'} \Delta_x(x_0, x_1))^2},$$

où  $k$  est une quantité différente de zéro. D'après la condition de Legendre on a  $\frac{dT}{dx_1} > 0$ , et notre proposition est démontrée.

Par un calcul tout pareil au précédent, on trouve que  $\bar{T}$  croît aussi avec  $x_1^*$ . Par conséquent  $x_1^*$  est une fonction croissante de  $x_1$

$$x_1^* = \Phi(x_1).$$

Mais pour les valeurs  $x'_0$  et  $x_0$ , qui correspondent aux points  $R'_0$  et  $R_0$ , la fonction  $T(x_1)$  prend la même valeur  $f_x + y'_0 f_y$ . Quant à la fonction  $\bar{T}(x_1^*)$ , elle prend la même valeur  $\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y$  pour les valeurs  $x_0$  et  $\bar{x}'_0$  de  $x_2$  correspondant aux points  $\bar{R}_0, \bar{R}'_0$ .

Soit  $H_0(\bar{h}_0)$  le point de l'arc  $R'_0 R_0$  pour lequel  $T = \bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y$ ; alors les points  $H_0$  et  $\bar{R}_0$  sont conjugués. Soit  $\bar{H}_0(\bar{h}_0)$  le point de l'arc

$\bar{R}_0 \bar{R}'_0$  pour lequel  $\bar{T} = f_x + y'_0 f_y$ ; alors les points  $\bar{H}_0(h_0)$  et  $R_0$  sont aussi conjugués. Mais  $x_1^*$  est une fonction croissante de  $x_1$ ; par conséquent

$$T(x_0) = \bar{T}(\bar{h}_0 - 0);$$

$$T(x'_0) = \bar{T}(\bar{h}_0 + 0).$$

Il en est de même pour la fonction  $\bar{T}(x_1^*)$ :

$$\bar{T}(x_0) = T(h_0 + 0);$$

$$\bar{T}(x'_0) = T(h_0 - 0).$$

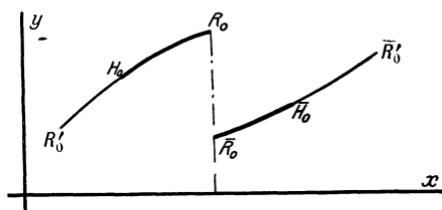


Fig. 6.

D'après ce qui précède, on conclut donc que si le point  $P_1$  se déplace sur l'arc  $R'_0 H_0$ , son foyer conjugué se déplace sur l'arc  $\bar{H}_0 \bar{R}'_0$  et si le point  $P_1$  décrit l'arc  $H_0 R_0$ , son foyer conjugué décrit l'arc  $\bar{R}_0 \bar{H}_0$  (Fig. 6).

On voit donc que la fonction  $\Phi(x_1)$  est discontinue au point  $h_0$ .

**17.** Supposons maintenant que le point  $P_2$  coïncide avec le point  $P_1^*$  conjugué du point initial  $P_1$ . Nous allons alors démontrer que la solution discontinue  $\mathfrak{C}_0$  avec les extrémités  $P_1, P_1^*$  ne peut pas fournir un minimum strict de l'intégrale  $J$ .

Soit  $\Gamma, \bar{\Gamma}$  les courbes conjuguées correspondant aux points conjugués  $P_1, P_1^*$ .

Soit en outre

$$E \qquad y = g(x)$$

l'enveloppe des extrémales du faisceau  $(\bar{\alpha})$  du n° 14 qui touche l'extrémale donnée  $\mathfrak{C}_0$  au point  $P_2(P_1^*)$ . Suivons la courbe  $E$  dans un sens tel que la direction correspondante de la tangente soit celle de la tangente en  $P_2$  à l'extrémale  $\mathfrak{C}_0$ . Alors le long de l'enveloppe on aura

$$(17) \qquad \bar{y}_x(x, \bar{\alpha}) = g'(x).$$

Cela posé, prenons deux points  $R(x, \gamma(x)), \bar{R}(x, \bar{\gamma}(x))$  ayant la même abscisse  $x$ . Ajoutons à l'arc  $P_1 R$  du faisceau  $(\alpha)$  l'arc  $\bar{R} P$  du faisceau  $(\bar{\alpha})$ ,  $P$  étant le point de contact de cet arc avec l'enveloppe  $E$ . Il est aisé de voir d'après les équations (14) que ces deux arcs forment une solution discontinue voisine. On peut donc constituer un faisceau d'extrémales discontinues aux paramètres  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  dont  $\mathfrak{C}_0$  fait partie pour les valeurs particulières  $\alpha_0$  et  $\bar{\alpha}_0$ .

Considérons maintenant l'intégrale  $J$  prise le long de la courbe  $L(P_1 R \bar{R} P m P_2)$  formée de cette extrémale discontinue et de l'arc  $P m P_2$  de l'enveloppe  $E$ . Il est évident que cette intégrale prise le long

de l'arc  $P_1R$  est la fonction  $W(x, y)$  de Hamilton des coordonnées du point  $R$ . Quant aux intégrales  $J_{\bar{R}P}$ ,  $J_{PmP_2}$  elles auront pour expressions:

$$J_{\bar{R}P} = \int_x^{\xi} f(t, \bar{y}(t, \bar{\alpha}(x)), \bar{y}_x(t, \bar{\alpha}(x))) dt, \quad J_{PmP_2} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x), g'(x)) dx,$$

$\xi$  étant l'abscisse du point  $P$  est une fonction continue de  $x$ .

Mais

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \gamma'(x) \frac{\partial W}{\partial y} = f - y' f_y + \gamma'(x) f_y, \\ \frac{dJ_{\bar{R}P}}{dx} &= -\bar{f} + \bar{y}' \bar{f}_y + f(\xi, \bar{y}(\xi, \bar{\alpha}(x)), \bar{y}_x(\xi, \bar{\alpha}(x))) \frac{d\xi}{dx}, \\ \frac{dJ_{PmP_2}}{dx} &= -f(\xi, g(\xi), g'(\xi)) \frac{d\xi}{dx}. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces équations et en tenant compte ensuite des équations (14) et (17), il vient

$$\frac{dJ_L}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad J_L = \text{const.}$$

Or pour  $x = x_0$  la courbe  $L$  se réduit à  $\mathfrak{C}_0$ , par conséquent

$$J_L = J_{\mathfrak{C}_0} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Supposons maintenant que le foyer  $P_2$  ou  $P_1^*$  du faisceau ( $\bar{\alpha}$ ) est ordinaire, c'est-à-dire que les extrémales de ce faisceau ne passent pas par le point  $P_2$ . Alors on peut remplacer l'arc  $PmP_2$  de l'enveloppe par un arc de la courbe extrémale joignant les points extrêmes  $P, P_2$ . La ligne  $\bar{L}$  ainsi déduite de  $L$  donnera à  $J$  une valeur plus petite que  $\mathfrak{C}_0$ .

On voit maintenant immédiatement que l'extrémale  $\mathfrak{C}_0$  cesse de fournir un minimum de l'intégrale  $J$  quand le point  $P_2$  est au delà de  $P_1^*$ . Par conséquent la condition nécessaire du minimum est

$$\text{III} \qquad x_2 \leq x_1^*.$$

D'après cela et d'après ce qui a été dit au n° 15 on peut s'assurer très facilement que dans le cas  $f_y = \bar{f}_y = 0$  l'intégrale  $J$  ne peut pas avoir, en général, de minimum strict.

De plus on déduit le fait suivant:

**18.** Si l'origine  $P_1$  se trouve entre  $R'_0$  et  $H_0$  l'intégrale  $J$  n'a pas de minimum.

En effet, supposons d'abord que  $P_2$  soit différent de  $\bar{R}_0$ . Alors tout point  $P$  de l'arc  $H_0R_0$  suffisamment voisin de  $H_0$  a son point conjugué sur  $\bar{R}_0\bar{H}_0$  voisin de  $\bar{R}_0$ . Nous aurons donc au moins deux points conjugués situés entre les extrémités  $P_1$  et  $P_2$  de l'extrémale  $\mathfrak{C}_0$  et par conséquent

on peut démontrer qu'il existe des chemins donnant à l'intégrale  $J$  une valeur plus petite que  $J_{\xi_0}$ , c'est ce que nous ferons, voir ci-dessous (n° 19). On arrive bien simplement aux mêmes conclusions si le point  $P_2$  coïncide avec  $\bar{R}_0$ , parce que nous aurons de même le point  $H_0$ , dont le point conjugué est  $P_2$  entre les extrémités  $P_1$  et  $P_2$ .

D'une manière générale, ce que nous venons de dire nous montre que dans le cas  $x_1 < h_0$  il n'y a pas de minimum.

Nous pouvons par suite énoncer le théorème suivant:

*Pour que la courbe  $\mathfrak{E}_0$  rende l'intégrale  $J$  minimum, il est nécessaire que*

$$\text{IV} \quad x_1 \geq h_0.$$

Mais, d'après ce qui a été dit au n° 11, l'abscisse  $x_1$  du point  $P_1$  doit de plus vérifier l'inégalité

$$(18) \quad x_1 \geq \xi_0.$$

Il faut démontrer maintenant que ces deux inégalités ne sont pas contradictoires. Envisageons la fonction

$$\psi(x) = f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x_0, x)}{\Delta(x_0, x)}.$$

La quantité  $\frac{\Delta_x(x_0, x)}{\Delta(x_0, x)}$  est une fonction croissante de  $x$  et par conséquent en vertu de la condition de Legendre il en est de même de  $\psi(x)$ . Mais

$$f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x_0, \xi_0)}{\Delta(x_0, \xi_0)} = 0.$$

En résumé: pour que les inégalités (IV) et (18) ne soient pas contradictoires, il suffit de démontrer que  $\psi(h_0) \geq 0$ . De l'équation (16) on tire

$$\frac{[(f_x + y'_0 f_y) f_{y'y} - f_y^2] + (f_x + y'_0 f_y) f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x_0, h_0)}{\Delta(x_0, h_0)}}{f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x_0, h_0)}{\Delta(x_0, h_0)}} = \bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y.$$

On en déduit

$$(19) \quad (f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y) (f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x_0, h_0)}{\Delta(x_0, h_0)}) = f_y^2.$$

Mais  $f_y \neq 0$ . En prenant l'inégalité II au sens strict, on en conclut

$$\psi(h_0) > 0.$$

Et la condition (18) est une conséquence de la condition IV.

Soit maintenant

$$f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x_0, h_0)}{\Delta(x_0, h_0)} = 0,$$

ce qui est possible lorsque le point  $H_0$  coïncide avec  $\mathfrak{X}_0$ . On aura  $f_y = 0$  et d'après le n° 17 il n'y a pas de minimum strict. Nous n'admettrons dans la suite l'inégalité IV vérifiée qu'au sens strict.

19. J'ajoute la démonstration de l'existence des chemins donnant à l'intégrale  $J$  des valeurs inférieures à  $J_{\bar{\mathcal{C}}_0}$  lorsque la condition IV n'est pas vérifiée. Cette démonstration est basée sur le calcul de la différence  $\Delta J$  pour un champ spécial de courbes de comparaison.

Entourons la branche  $P_1 R_0$  du faisceau des extrémales issues du point  $P_1$ . Soit

$$(20) \quad y = y(x, \alpha)$$

l'équation de ce faisceau, et

$$\mathfrak{R} \quad y = \eta(x)$$

la courbe des points de rupture correspondante. Alors nous avons (n° 14)

$$(21) \quad f_{y'}(x, \eta(x), p(x, \eta(x))) = 0.$$

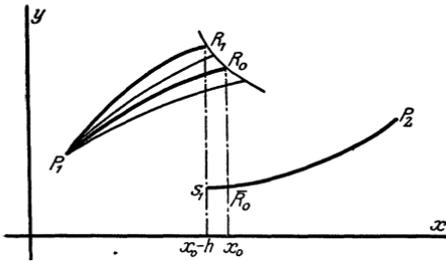


Fig. 7.

Prolongeons la branche  $\bar{R}_0 P_2$  à gauche du point  $\bar{R}_0$  et menons une droite parallèle à l'axe des  $y$

$$x = x_0 - h, \quad 0 < h < \varrho.$$

Soient  $R_1$  et  $S_1$  les points d'intersection de cette droite avec les courbes  $\mathfrak{R}$  et  $\bar{R}_0 P_2$ . Nous prenons comme courbe de comparaison

la courbe discontinue  $L_0(P_1 R_1 S_1 \bar{R}_0 P_2)$  formée de l'extrémale  $P_1 R_1$  du faisceau (20) et de l'extrémale  $S_1 \bar{R}_0 P_2$  (Fig. 7). Alors on doit avoir

$$\Delta J = J_{L_0} - J_{\bar{\mathcal{C}}_0} > 0.$$

Mais nous pouvons transformer l'intégrale  $\Delta J$  de la façon suivante

$$\begin{aligned} \Delta J = \int_{\bar{\mathcal{C}}} E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}') dx - \int_{x_0-h}^{x_0} f(x, \eta(x), \eta'(x)) dx \\ + \int_{x_0-h}^{x_0} f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)) dx, \end{aligned}$$

où  $\bar{\mathcal{C}}$  est la courbe continue  $(P_1 R_1 R_0)$  et  $E$  la fonction de Weierstrass.

Mais

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\mathcal{C}}} E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}') dx = \int_{x_0-h}^{x_0} [f(x, \eta(x), \eta'(x)) - f(x, \eta(x), p(x, \eta(x))) \\ - (\eta'(x) - p(x, \eta)) f_{y'}(x, \eta, p(x, \eta))] dx, \end{aligned}$$

ou d'après l'équation (21)

$$\int_{\bar{x}} E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}(x)), \bar{y}') dx \\ = \int_{x_0-h}^{x_0} [f(x, \eta(x), \eta'(x)) - f(x, \eta(x), p(x, \eta(x)))] dx.$$

On en déduit

$$\Delta J = \int_{x_0-h}^{x_0} [f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)) - f(x, \eta, p(x, \eta))] dx.$$

Désignons par  $B(x)$  la fonction sous le signe d'intégrale

$$B(x) = f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)) - f(x, \eta(x), p(x, \eta(x))).$$

Alors, en tenant compte de la formule de la moyenne, on aura

$$(22) \quad \Delta J = h \cdot B(x_0 - \varepsilon),$$

$\varepsilon$  étant une quantité positive  $\leq h$ . D'après les formules I

$$B(x_0) = 0.$$

Dans la formule (22) nous pouvons prendre  $h$ , et par conséquent  $\varepsilon$ , aussi petit que l'on voudra. Mais d'autre part, si l'on développe la fonction  $B(x_0 - \varepsilon)$  suivant les puissances de  $\varepsilon$ , on a

$$B(x_0 - \varepsilon) = \varepsilon [f'_x + \eta'_0 f'_y - \bar{f}'_x - \bar{y}'_0 \bar{f}'_y] + \dots$$

En résumé, pour que  $\Delta J$  soit positif, il faut que l'on ait

$$f'_x + \eta'_0 f'_y - \bar{f}'_x - \bar{y}'_0 \bar{f}'_y \geq 0.$$

Il reste donc seulement à trouver  $\eta'_0$ . Mais

$$\eta = y(x, \alpha(x))$$

et par conséquent

$$\eta' = y_x + y_\alpha \frac{d\alpha}{dx},$$

où  $\alpha(x)$  satisfait évidemment à l'équation

$$f'_y(x, y(x, \alpha(x)), y_x(x, \alpha(x))) = 0.$$

Pour avoir la dérivée  $\frac{d\alpha}{dx}$ , il suffit de différentier la dernière équation, ce qui donne

$$f_y + (f_{y'y} y_\alpha + f_{y'y'} y_{\alpha x}) \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

d'où résulte

$$\eta' = y_x - y_\alpha \frac{f_y}{f_{y'y} y_\alpha + f_{y'y'} y_{\alpha x}}.$$

En portant dans cette équation  $x = x_0$  nous trouvons

$$\eta'_0 = \frac{(f_{y'y} y'_0 - f_y) \Delta(x_1, x_0) + f_{y'y} y'_0 \Delta_x(x_1, x_0)}{f_{y'y} \Delta(x_1, x_0) + f_{y'y} \Delta_x(x_1, x_0)}.$$

et par suite

$$f_x + \eta'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y = \frac{(f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \left( f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x_1, x_0)}{\Delta(x_1, x_0)} \right) - f_y^2}{f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x_1, x_0)}{\Delta(x_1, x_0)}}.$$

Comme nous l'avons vu au n° 18 la fonction

$$(f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \left( f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x, x_0)}{\Delta(x, x_0)} \right) - f_y^2$$

s'annule pour  $x = h_0$  (formule 19).

D'autre part, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$f_{y'y} (f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y) - f_y^2 + (f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y) f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x, x_0)}{\Delta(x, x_0)}.$$

Mais c'est une fonction croissante de  $x$ ; par conséquent elle est négative pour tout point compris entre  $H_0$  et  $R'_0$ . Au delà de  $h_0$ , au contraire, elle devient nécessairement positive.

Considérons maintenant la fonction

$$f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x, x_0)}{\Delta(x, x_0)}.$$

En vertu du n° 13 elle est positive dans l'intervalle  $x_0 < x < x_0$ . Mais  $x_1$  satisfait à l'inégalité

$$x_1 > x_0.$$

Il en résulte que dans l'intervalle  $(x_0, x_0)$

$$f_x + \eta'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y \begin{cases} > 0 & \text{pour } x_1 > h_0 \\ = 0 & \text{pour } x_1 = h_0 \\ < 0 & \text{pour } x_1 < h_0. \end{cases}$$

Par conséquent d'après (22) on en conclut que

$$\Delta J < 0 \quad \text{lorsque} \quad x_1 < h_0$$

C. Q. F. D.

**20.** Nous allons enfin discuter le problème qui se pose tout naturellement:

Soient  $A(\xi_1, \eta_1)$  un point assez voisin du point  $P_1(x_1, y_1)$  et  $B(\xi_2, \eta_2)$  un point assez voisin du point  $P_2(x_2, y_2)$ . Sous quelles conditions peut-on joindre ces deux points par une extrémale discontinue?

Soit

$$y = \varphi(x, \alpha, \beta)$$

l'intégrale générale de l'équation d'Euler et soient  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$  et  $\alpha = \bar{\alpha}_0$ ,  $\beta = \bar{\beta}_0$  les valeurs particulières des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  correspondant aux deux branches  $P_1R_0$  et  $\bar{R}_0P_2$  de l'extrémale  $\mathfrak{C}_0$  respectivement.

Pour déterminer les extrémales ayant un seul point de discontinuité et joignant deux points donnés  $A(\xi_1, \eta_1)$ ,  $B(\xi_2, \eta_2)$ , on a comme inconnues : 1. les valeurs  $(\alpha, \beta)$  et  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  des paramètres correspondant aux deux branches de l'extrémale cherchée, et 2. l'abscisse  $\xi_0$  du point de discontinuité. Nous avons en effet un système de cinq équations

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \varphi(\xi_1, \alpha, \beta) \\ \eta_2 &= \varphi(\xi_2, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) \\ f(\xi_0, \varphi(\xi_0, \alpha, \beta), \varphi_x(\xi_0, \alpha, \beta)) &= f(\xi_0, \varphi(\xi_0, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), \varphi_x(\xi_0, \bar{\alpha}, \bar{\beta})) \\ f_{y'}(\xi_0, \varphi(\xi_0, \alpha, \beta), \varphi_x(\xi_0, \alpha, \beta)) &= 0 \\ f_{y'}(\xi_0, \varphi(\xi_0, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), \varphi_x(\xi_0, \bar{\alpha}, \bar{\beta})) &= 0 \end{aligned}$$

qui sont vérifiées par le système des valeurs :

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0, \quad \bar{\beta} = \bar{\beta}_0, \quad \xi_0 = x_0.$$

Nous pouvons les résoudre par rapport à  $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \xi_0$  dans le domaine des valeurs  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0, \bar{\beta} = \bar{\beta}_0, \xi_0 = x_0$  si pour ces valeurs le déterminant de Jacobi

$$D = \frac{\partial(\varphi - \eta_1, \varphi - \eta_2, f - \bar{f}, f_{y'}, \bar{f}_{y'})}{\partial(\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \xi_0)}$$

est différent de zéro. En désignant par  $D_0$  la valeur de  $D$  pour  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0, \bar{\beta} = \bar{\beta}_0, \xi_0 = x_0$  on aura

$$(23) \quad D_0 = \begin{vmatrix} \varphi_\alpha & 0 & \frac{\partial(f - \bar{f})}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{y'}}{\partial \alpha} & 0 \\ \varphi_\beta & 0 & \frac{\partial(f - \bar{f})}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{y'}}{\partial \beta} & 0 \\ 0 & \varphi_{\bar{\alpha}} & \frac{\partial(f - \bar{f})}{\partial \bar{\alpha}} & 0 & \frac{\partial \bar{f}_{y'}}{\partial \bar{\alpha}} \\ 0 & \varphi_{\bar{\beta}} & \frac{\partial(f - \bar{f})}{\partial \bar{\beta}} & 0 & \frac{\partial \bar{f}_{y'}}{\partial \bar{\beta}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial(f - \bar{f})}{\partial \xi_0} & \frac{\partial f_{y'}}{\partial \xi_0} & \frac{\partial \bar{f}_{y'}}{\partial \xi_0} \end{vmatrix} \begin{matrix} \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \xi_0 = x_0 \\ \alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0, \bar{\beta} = \bar{\beta}_0 \end{matrix}$$

Mais nous avons

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial(f - \bar{f})}{\partial \alpha} \right]_0 &= f_y \varphi_\alpha(x_0, \alpha_0, \beta_0), \\ \left( \frac{\partial f_{y'}}{\partial \alpha} \right)_0 &= \bar{f}'_{y'} \varphi_\alpha(x_0, \alpha_0, \beta_0) + f_{y' y'} \varphi_{x\alpha}(x_0, \alpha_0, \beta_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial(f-\bar{f})}{\partial\beta} \right]_0 &= f_y \varphi_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0), \\
\left( \frac{\partial f_{y'}}{\partial\beta} \right)_0 &= f_{y'y} \varphi_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0) + f_{y'y'} \varphi_{x\beta}(x_0, \alpha_0, \beta_0), \\
\left[ \frac{\partial(f-\bar{f})}{\partial\bar{\alpha}} \right]_0 &= -\bar{f}_y \varphi_{\bar{\alpha}}(x_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \\
\left( \frac{\partial \bar{f}_{y'}}{\partial\bar{\alpha}} \right)_0 &= \bar{f}_{y'y} \varphi_{\bar{\alpha}}(x_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0) + \bar{f}_{y'y'} \varphi_{x\bar{\alpha}}(x_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \\
\left[ \frac{\partial(f-\bar{f})}{\partial\bar{\beta}} \right]_0 &= -\bar{f}_y \varphi_{\bar{\beta}}(x_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \\
\left( \frac{\partial \bar{f}_{y'}}{\partial\bar{\beta}} \right)_0 &= \bar{f}_{y'y} \varphi_{\bar{\beta}}(x_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0) + \bar{f}_{y'y'} \varphi_{x\bar{\beta}}(x_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \\
\left[ \frac{\partial(f-\bar{f})}{\partial\xi_0} \right]_0 &= f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y, \quad \left( \frac{\partial f_{y'}}{\partial\xi_0} \right)_0 = f_y, \quad \left( \frac{\partial \bar{f}_{y'}}{\partial\xi_0} \right)_0 = \bar{f}_y.
\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans la formule (23) et en développant le déterminant ainsi formé suivant les deux premières colonnes, on aura

$$\begin{aligned}
D_0 &= -\varphi_\alpha(x_1, \alpha_0, \beta_0) \varphi_{\bar{\alpha}}(x_2, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0) \\
&\times \begin{vmatrix} f_y \varphi_\beta & , & f_{y'y} \varphi_\beta + f_{y'y'} \varphi_{\beta x}, & 0 \\ -\bar{f}_y \varphi_{\bar{\beta}} & , & 0 & , & \bar{f}_{y'y} \varphi_{\bar{\beta}} + \bar{f}_{y'y'} \varphi_{\bar{\beta} x} \\ f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y, & f_y & , & \bar{f}_y \end{vmatrix} \\
&+ \varphi_\alpha(x_1, \alpha_0, \beta_0) \varphi_{\bar{\beta}}(x_2, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0) \\
&\times \begin{vmatrix} f_y \varphi_\beta & , & f_{y'y} \varphi_\beta + f_{y'y'} \varphi_{\beta x}, & 0 \\ -\bar{f}_y \varphi_{\bar{\alpha}} & , & 0 & , & \bar{f}_{y'y} \varphi_{\bar{\alpha}} + \bar{f}_{y'y'} \varphi_{\bar{\alpha} x} \\ f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y, & f_y & , & \bar{f}_y \end{vmatrix} \\
&+ \varphi_\beta(x_1, \alpha_0, \beta_0) \varphi_{\bar{\alpha}}(x_2, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0) \\
&\times \begin{vmatrix} f_y \varphi_\alpha & , & f_{y'y} \varphi_\alpha + f_{y'y'} \varphi_{\alpha x}, & 0 \\ -\bar{f}_y \varphi_{\bar{\beta}} & , & 0 & , & \bar{f}_{y'y} \varphi_{\bar{\beta}} + \bar{f}_{y'y'} \varphi_{\bar{\beta} x} \\ f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y, & f_y & , & \bar{f}_y \end{vmatrix} \\
&- \varphi_\beta(x_1, \alpha_0, \beta_0) \varphi_{\bar{\beta}}(x_2, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0) \\
&\times \begin{vmatrix} f_y \varphi_\alpha & , & f_{y'y} \varphi_\alpha + f_{y'y'} \varphi_{\alpha x}, & 0 \\ -\bar{f}_y \varphi_{\bar{\alpha}} & , & 0 & , & \bar{f}_{y'y} \varphi_{\bar{\alpha}} + \bar{f}_{y'y'} \varphi_{\bar{\alpha} x} \\ f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y, & f_y & , & \bar{f}_y \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

D'après les formules analogues à celles de (A) du n° 15, la dernière équation se réduira à

$$\begin{aligned}
D_0 = & - (f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y) [f_{y'y} \Delta(x_1, x_0) + f_{y'y'} \Delta_x(x_1, x_0)] \\
& \times [\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x_2, x_0) + \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_2, x_0)] \\
& + f_y^2 \Delta(x_1, x_0) [\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x_2, x_0) + \bar{f}_{y'y'} \bar{\Delta}_x(x_2, x_0)] \\
& - \bar{f}_y^2 \bar{\Delta}(x_2, x_0) [f_{y'y} \Delta(x_1, x_0) + f_{y'y'} \Delta_x(x_1, x_0)].
\end{aligned}$$

Si nous tenons compte des résultats du n° 15, nous parvenons à l'énoncé suivant :

Pour que la détermination de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  et  $\xi_0$  ne soit possible que d'une seule manière, il est nécessaire que les points extrêmes  $P_1$  et  $P_2$  ne soient pas conjugués.

S'il en est ainsi, on aura une seule extrémale discontinue joignant les deux points  $P_1$  et  $P_2$ . Pour l'abscisse  $\xi_0$  du point de discontinuité nous avons

$$\xi_0 = F(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2),$$

où  $F$  est une fonction continue de ces arguments.

En tenant compte des résultats du n° 13 ceci nous apprend dès lors qu'il existe une correspondance univoque entre les points extrêmes des extrémales discontinues et leurs points de rupture.

En portant dans l'équation de l'extrémale discontinue joignant les deux points  $A$  et  $B$

$$y = \begin{cases} \varphi(x, \alpha, \beta) & \xi_1 \leq x < \xi_0 \\ \varphi(x, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) & \xi_0 < x \leq \xi_2 \end{cases}$$

au lieu de  $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$  leurs expressions en fonctions de  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ , on a

$$(\Phi) \quad y = \begin{cases} \Phi(x; \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \\ \bar{\Phi}(x; \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2). \end{cases}$$

Donc l'intégrale  $J$  prise le long de cette extrémale de  $A$  jusqu'à  $B$  est une fonction des coordonnées de ces points :

$$J = J(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2).$$

C'est l'intégrale du champ des extrémales discontinues ou simplement du champ discontinu.

On tire des équations  $(\Phi)$  pour les tangentes  $p_1$  et  $p_2$  aux points  $A$  et  $B$  resp.

$$p_1 = \Phi_x(\xi_1; \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \quad p_2 = \bar{\Phi}_x(\xi_2; \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2).$$

Par un calcul facile, on trouve pour les dérivées partielles de  $J$  les expressions suivantes :

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_1} = - [f(\xi_1, \eta_1, p_1) - p_1 f'(\xi_1, \eta_1, p_1)],$$

$$\frac{\partial J}{\partial \eta_1} = - f'(\xi_1, \eta_1, p_1),$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_2} = f(\xi_2, \eta_2, p_2) - p_2 f'(\xi_2, \eta_2, p_2),$$

$$\frac{\partial J}{\partial \eta_2} = f'(\xi_2, \eta_2, p_2).$$

Donc les dérivées du premier ordre de l'intégrale du champ discontinu ont les mêmes expressions que celles de l'intégrale du champ continu.

## II. Conditions suffisantes.

### A. Cas des courbes discontinues de comparaison.

21. *Formules préliminaires.* Soit

$$(\alpha) \quad y = y(x, \alpha)$$

un faisceau quelconque de courbes extrémales pour le problème donné (courbes d'Euler). Dans le domaine du champ des courbes de ce faisceau la dérivée  $y_\alpha(x, \alpha)$  est différente de zéro et par conséquent l'équation  $(\alpha)$  sera résoluble sans ambiguïté par rapport à  $\alpha$  tant que le point  $(x, y)$  reste dans le champ.

Soit

$$\alpha = \alpha(x, y)$$

cette solution. Alors nous avons

$$(24) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = - \frac{y'}{y_\alpha}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{y_\alpha},$$

où par  $y'$  nous notons le coefficient angulaire de la tangente à l'extrémale particulière qui passe par  $P(x, y)$ , c'est-à-dire

$$y' = y_x(x, \alpha(x, y)).$$

D'après les formules (24) nous aurons pour les dérivées partielles de  $y'$  les expressions suivantes:

$$(25) \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = y'' - y' \frac{y_{\alpha x}}{y_\alpha}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{y_{\alpha x}}{y_\alpha},$$

où par l'accent nous notons la dérivation par rapport à  $x$ .

Considérons maintenant le faisceau spécial des extrémales issues d'un point fixe  $P_1$  et entourant l'extrémale donnée  $P_1 R_0$ . Notons ce faisceau par  $F(P_1)$ .

D'après les formules analogues à celles de  $\Delta$  du n° 15 on aura

$$\frac{y_{\alpha x}}{y_\alpha} = \frac{\Delta_x(x, x_1)}{\Delta(x, x_1)}.$$

L'intégrale  $J$  prise le long d'une de ces extrémales  $P_1 P$  est la fonction  $W(x, y)$  de Hamilton des coordonnées du point  $P(x, y)$ .

Nous avons déjà donné les formules des dérivées du premier ordre de  $W$ :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = f - y' f_{y'}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = f_{y'}.$$

Nous nous proposons maintenant de trouver les dérivées du second ordre de  $W$ .

On aura

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (f - y' f_{y'}) = f_x + f_{y'} \frac{\partial y'}{\partial x} - f_{y'y'} \frac{\partial y'}{\partial x} - y' f_{y'x} - y' f_{y'y'} \frac{\partial y'}{\partial x}.$$

En tenant compte des formules (25) et de l'équation d'Euler on en déduit

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = f_x - y' f_y + y'^2 f_{y'y} + y'^2 f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x, x_1)}{\Delta(x, x_1)}.$$

D'une façon analogue on peut trouver les autres dérivées du second ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= f_y - y' f_{y'y} - y' f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x, x_1)}{\Delta(x, x_1)}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta_x(x, x_1)}{\Delta(x, x_1)}. \end{aligned}$$

Prenons maintenant le faisceau spécial des extrémales passant par le point  $P_2$  et entourant l'extrémale  $\bar{R}_0 P_2$ . Notons ce faisceau par  $\bar{F}(P_2)$ .

On aura des formules analogues

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} &= -\bar{f} + \bar{y}' \bar{f}_{y'}, & \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} &= -\bar{f}_{y'}. \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} &= -\bar{f}_x + \bar{y}' \bar{f}_y - \bar{y}'^2 \bar{f}_{y'y} - \bar{y}'^2 \bar{f}_{y'y'} \frac{\bar{\Delta}_x(x, x_2)}{\bar{\Delta}(x, x_2)}, \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} &= -\bar{f}_y + \bar{y}' \bar{f}_{y'y} + \bar{y}' \bar{f}_{y'y'} \frac{\bar{\Delta}_x(x, x_2)}{\bar{\Delta}(x, x_2)}, \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} &= -\bar{f}_{y'y} - \bar{f}_{y'y'} \frac{\bar{\Delta}_x(x, x_2)}{\bar{\Delta}(x, x_2)}. \end{aligned}$$

Cela posé, passons à la recherche des conditions suffisantes.

**22.** On peut s'assurer très facilement que la méthode de Weierstrass ne nous donnerait les conditions suffisantes que dans le cas très particulier où les points de rupture de la courbe de comparaison discontinue se trouvent sur les courbes conjuguées  $\Gamma, \bar{\Gamma}$ . C'est pourquoi nous les cherchons par une méthode plus forte, à savoir en recourant aux dérivées du second ordre des fonctions  $W$  et  $\bar{W}$ .<sup>11)</sup>

<sup>11)</sup> Voir Dresden, Transactions of the American Math. Soc. 1910.

Supposons toujours que toutes les conditions du minimum ordinaire soient vérifiées au sens strict. Construisons les faisceaux  $F(P_1)$ ,  $\bar{F}(P_2)$ . Chaque point du cercle  $R_0$  est joint à  $P_1$  par une extrémale du premier faisceau et pareillement chaque point du cercle  $\bar{R}_0$  est joint à  $P_2$  par une extrémale du second faisceau (Fig. 8).

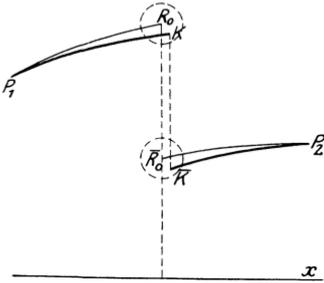


Fig. 8.

Considérons un couple  $K(x, y)$ ,  $\bar{K}(x, \bar{y})$  de points de ces deux cercles ayant la même abscisse  $x$ . La courbe discontinue  $\mathfrak{C}$  formée de deux extrémales  $P_1 K$ ,  $\bar{K} P_2$  de nos faisceaux fournit à l'intégrale  $J$  une plus petite valeur que toute autre courbe discontinue admissible ayant les mêmes points de rupture  $K, \bar{K}$ . Par conséquent pour trouver les conditions suffisantes il suffit de comparer l'intégrale  $J$  prise suivant la courbe  $\mathfrak{C}$  à la même intégrale prise suivant l'extrémale discontinue  $\mathfrak{C}_0$ .

Mais l'intégrale  $J$  prise suivant la courbe  $\mathfrak{C}$  est la somme de deux fonctions  $W$  et  $\bar{W}$  de Hamilton

$$J_{\mathfrak{C}} = W(x, y) + \bar{W}(x, \bar{y}).$$

Par conséquent on doit avoir

$$\Delta J = J_{\mathfrak{C}} - J_{\mathfrak{C}_0} = W(x, y) + \bar{W}(x, \bar{y}) - W(x_0, y_0) - \bar{W}(x_0, \bar{y}_0) > 0$$

pour toutes les valeurs de  $x, y, \bar{y}$  suffisamment voisines de  $x_0, y_0, \bar{y}_0$ . Posons

$$x = x_0 + \alpha, \quad y = y_0 + \beta, \quad \bar{y} = \bar{y}_0 + \bar{\beta}.$$

En développant la somme  $W + \bar{W}$  suivant les puissances de  $\alpha, \beta, \bar{\beta}$  on aura

$$\begin{aligned} \Delta J = & \alpha \frac{\partial W}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial W}{\partial y_0} + \alpha \frac{\partial \bar{W}}{\partial x_0} + \bar{\beta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{y}_0} + \frac{1}{2} \left( \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0} \right. \\ & \left. + \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0^2} + 2\alpha\bar{\beta} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0 \partial \bar{y}_0} + \bar{\beta}^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2} \right) + (\alpha, \beta, \bar{\beta})_3, \end{aligned}$$

où par  $(\alpha, \beta, \bar{\beta})_3$  nous désignons l'ensemble des termes du troisième ordre.

Posons une fois pour toutes

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha, \beta, \bar{\beta}) = & \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0} + \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0^2} \\ & + 2\alpha\bar{\beta} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0 \partial \bar{y}_0} + \bar{\beta}^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2}. \end{aligned}$$

En tenant compte des formules des dérivées du premier ordre et des conditions fondamentales I, on peut montrer que les termes du premier

ordre dans le développement de  $\Delta J$  disparaissent et par conséquent on peut écrire

$$(26) \quad \Delta J = \frac{1}{2} \Theta(\alpha, \beta, \bar{\beta}) + (\alpha, \beta, \bar{\beta})_3.$$

23. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant.

*Théorème. — Si les conditions nécessaires II, III, IV sont vérifiées au sens strict, on aura toujours*

$$\Theta(\alpha, \beta, \bar{\beta}) > 0$$

*pour tout système  $(\alpha, \beta, \bar{\beta})$ , sauf bien entendu  $(0, 0, 0)$ .*

Pour la démonstration générale on peut toujours supposer que  $\alpha \neq 0$ . En effet, admettons  $\alpha = 0$ . Alors

$$\Theta(0, \beta, \bar{\beta}) = \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} + \bar{\beta}^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2}.$$

Mais les formules des dérivées du second ordre de  $W$  et  $\bar{W}$  nous donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} &= f_{y'y} + f_{y'y'} \frac{\Delta x(x_0, x_1)}{\Delta(x_0, x_1)}, \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2} &= - \left( \bar{f}_{y'y} + \bar{f}_{y'y'} \frac{\bar{\Delta} x(x_0, x_2)}{\bar{\Delta}(x_0, x_2)} \right). \end{aligned}$$

En tenant compte du raisonnement du n° 11 et des inégalités (7), (7̄) on en déduit

$$(27) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2} > 0.$$

D'autre part le système  $(\beta, \bar{\beta}) \neq (0, 0)$ , par conséquent on aura toujours

$$\Theta(0, \beta, \bar{\beta}) > 0.$$

Supposons donc  $\alpha \neq 0$ . La fonction  $\Theta$  est la somme des deux formes quadratiques. D'après les inégalités (27) on peut la mettre sous la forme suivante :

$$(28) \quad \Theta(\alpha, \beta, \bar{\beta}) = \frac{\left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0} \alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} \beta \right)^2}{\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}} + \frac{\left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0 \partial \bar{y}_0} \alpha + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2} \bar{\beta} \right)^2}{\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2}} \\ + \left[ \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0} \right)^2}{\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}} + \frac{\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2} - \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0 \partial \bar{y}_0} \right)^2}{\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2}} \right] \alpha^2.$$

Considérons la somme entre parenthèses. En portant les valeurs des dérivées secondes dans cette somme on aura d'après les notations du n° 16

$$\frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0} \right)^2}{\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}} + \frac{\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2} - \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0 \partial \bar{y}_0} \right)^2}{\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2}} = T(x_1) - \bar{T}(x_2).$$

Nous allons maintenant voir que la quantité  $T(x_1) - \bar{T}(x_2)$  reste toujours positive lorsque les abscisses des points extrêmes  $P_1, P_2$  vérifient les conditions III et IV au sens strict:

$$x_2 < x_1^*, \quad x_1 > h_0.$$

En effet, d'après la théorie du n° 16 on sait que dans ce cas il n'y a plus de points conjugués entre les points extrêmes  $P_1$  et  $P_2$ . Alors l'équation

$$T(x) - \bar{T}(\bar{x}) = 0$$

pour  $x \geq x_1, \bar{x} \leq x_2$  est impossible.

D'autre part la fonction  $T(x) - \bar{T}(\bar{x})$  est croissante par rapport à  $x$  et décroissante par rapport à  $\bar{x}$ . Elle est en outre continue dans les intervalles définis par les conditions III et IV. Par conséquent elle conserve toujours son signe constant quel que soit le couple des valeurs  $x \geq x_1, \bar{x} \leq x_2$ .

Mais pour  $x \geq x_1 > h_0$  on a

$$f_x + y'_0 f_y \geq T(x) > \bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y = \bar{T}(x_0),$$

par suite

$$T(x) - \bar{T}(x_0) > 0,$$

d'où vient

$$T(x) - \bar{T}(\bar{x}) > 0, \quad x \geq x_1, \quad \bar{x} \leq x_2.$$

Donc nous avons bien

$$T(x_1) - \bar{T}(x_2) > 0.$$

Revenons maintenant à l'équation (28). La somme des deux premiers termes n'est jamais négative. Appelons cette somme  $K^2$ . Donc on aura

$$\Theta(\alpha, \beta, \bar{\beta}) = (T(x_1) - \bar{T}(x_2))\alpha^2 + K^2 > 0$$

pour tout système  $(\alpha, \beta, \bar{\beta}) \neq (0, 0, 0)$ , de sorte que notre théorème est démontré.

**23 bis.** Reprenons l'équation (26). On peut supposer  $\alpha, \beta, \bar{\beta}$  suffisamment petits pour que l'inégalité

$$\Delta J = J_{\mathfrak{E}} - J_{\mathfrak{E}_0} = \frac{1}{2} \Theta(\alpha, \beta, \bar{\beta}) + (\alpha, \beta, \bar{\beta})_{\mathfrak{B}} > 0$$

soit vérifiée au sens strict.

Tout ce qui précède peut donc se résumer dans l'énoncé suivant:

*L'extrémale discontinue  $\mathfrak{C}_0$  fournit à l'intégrale  $J$  un minimum fort dans le champ  $\mathfrak{F}_0$  des courbes discontinues de comparaison si toutes les conditions du minimum ordinaire et les conditions I, II, III, IV sont vérifiées (les trois dernières au sens strict).*

**24.** Nous pouvons maintenant obtenir pour la différence

$$\Delta J = J_{\mathfrak{C}} - J_{\mathfrak{C}_0}$$

une limite inférieure.

Cette équation peut s'écrire en appliquant la formule générale de Taylor et poussant le développement jusqu'aux termes du second ordre

$$\Delta J = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}(\alpha, \beta, \bar{\beta}) = \frac{1}{2} \{ [\tilde{T}(x_1) - \tilde{T}(x_2)] \alpha^2 + \tilde{K}^2 \},$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x_1) - \tilde{T}(x_2) &= [T(x_1) - \bar{T}(x_2)]_{\substack{x_0 + \vartheta \alpha \\ y_0 + \vartheta' \beta \\ \bar{y}_0 + \vartheta'' \bar{\beta}}}, \\ \tilde{K} &= [K]_{\substack{x_0 + \vartheta \alpha \\ y_0 + \vartheta' \beta \\ \bar{y}_0 + \vartheta'' \bar{\beta}}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $x_0, y_0, \bar{y}_0$  devant être remplacés dans les dérivées du second ordre par  $x_0 + \vartheta \alpha, y_0 + \vartheta' \beta, \bar{y}_0 + \vartheta'' \bar{\beta}$ .

Mais les dérivées secondes de  $W$  et  $\bar{W}$  sont des fonctions continues de leurs arguments dans le champ, par conséquent on peut supposer  $\alpha, \beta, \bar{\beta}$  suffisamment petits pour que

$$(29) \quad \tilde{T}(x_1) - \tilde{T}(x_2), \quad \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial y_0^2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \bar{y}_0^2}$$

aient le signe de

$$T(x_1) - \bar{T}(x_2), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2},$$

quel que soient les signes de  $\alpha, \beta, \bar{\beta}$ .

Appelons  $2g_0$  la plus petite valeur des trois quantités (29). Alors on aura

$$\Delta J = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}(\alpha, \beta, \bar{\beta}) \geq g_0 \varepsilon^2,$$

où  $\varepsilon^2$  égal  $\alpha^2$  dans le cas général ( $\alpha \neq 0$ ) et égal à la plus grande des deux quantités  $\beta^2, \bar{\beta}^2$  dans le cas particulier ( $\alpha = 0$ ).

Donc nous pouvons énoncer le résultat suivant:

*Si la courbe discontinue de comparaison est assujettie à avoir dans le domaine  $R_c$  les points de rupture  $K(x_0 + \alpha, y_0 + \beta), \bar{K}(x_0 + \alpha, \bar{y}_0 + \bar{\beta})$ ,*

la différence entre l'intégrale  $J$  prise suivant cette courbe et la même intégrale prise suivant l'extrémale discontinue  $\mathfrak{C}_0$  a une limite inférieure positive:  $g_0 \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon$  étant une des trois variations  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\bar{\beta}$ .

## B. Cas des courbes continues de comparaison.

25. *Champ  $\mathfrak{F}_1$ .* Comparons l'intégrale  $J$  prise suivant la courbe continue admissible  $\bar{\lambda}_n$  à la même intégrale prise suivant l'extrémale discontinue  $\mathfrak{C}_0$ . Soit  $\bar{\mathfrak{C}}$  la courbe discontinue de la région  $R_e$  vers laquelle tend l'ensemble  $\{\lambda_n\}$ . On aura comme au n° 5:

$$(30) \quad \Delta J_n = J_{\bar{\lambda}_n} - J_{\mathfrak{C}_0} = J_{\bar{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_0} + (J_{\bar{\lambda}_n} - J_{\bar{\mathfrak{C}}}).$$

Appelons  $y = \bar{y}(x)$  l'équation de la ligne  $\bar{\mathfrak{C}}$  et  $y = \bar{w}_n(x)$  l'équation de la courbe  $\bar{\lambda}_n$ . Soient en outre  $K(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$ ,  $\bar{K}(x_0 + \alpha, \bar{y}_0 + \bar{\beta})$  les points de rupture de la courbe  $\bar{\mathfrak{C}}$ .

Supposons maintenant que le minimum soit réalisé dans le champ  $\mathfrak{F}_0$  des courbes discontinues de comparaison. Moyennant le théorème du n° 24 on aura

$$J_{\bar{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_0} = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}(\alpha, \beta, \bar{\beta}) > 0.$$

Cela posé, l'équation (30) s'écrira de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \Delta J_n = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}(\alpha, \beta, \bar{\beta}) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{w}_n(x), \bar{w}'_n(x)) dx \\ - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) dx. \end{aligned}$$

D'après le raisonnement du n° 3 on peut mettre cette équation sous la forme

$$\Delta J_n = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}(\alpha, \beta, \bar{\beta}) + \int_{\bar{x}_0 - \varepsilon_n}^{\bar{x}_0 + \varepsilon_n} f(x, \bar{w}_n(x), \bar{w}'_n(x)) dx + (\varepsilon_n),$$

où  $\bar{x}_0 = x_0 + \alpha$ ,  $(\varepsilon_n)$  est une quantité qui tend vers zéro avec  $\varepsilon_n$ .

Donc la condition suffisante du minimum dans le champ  $\mathfrak{F}_1$  s'exprimera ainsi

$$(31) \quad \frac{1}{2} \tilde{\Theta}(\alpha, \beta, \bar{\beta}) > - \int_{\bar{x}_0 - \varepsilon_n}^{\bar{x}_0 + \varepsilon_n} f(x, \bar{w}_n(x), \bar{w}'_n(x)) dx + (\varepsilon_n).$$

Le premier membre de cette inégalité est une constante positive au moins égale  $g_0 \varepsilon^2$ ;  $g_0$ ,  $\varepsilon$  ayant les mêmes significations qu'au n° 24.

Quant au second membre il tend vers zéro avec  $\varepsilon_n$ . Par conséquent on peut trouver un nombre entier  $N$  tel qu'on ait

$$\left| \int_{\bar{x}_0 - \varepsilon_n}^{\bar{x}_0 + \varepsilon_n} f(x, \bar{\omega}_n, \bar{\omega}'_n) dx + (\varepsilon_n) \right| < g_0 \varepsilon^2$$

pourvu que  $n > N$ .

Ainsi pour des valeurs de  $n$  plus grandes que  $N$  l'inégalité (31) est toujours vérifiée.

**26. Champ  $\mathfrak{F}_2$ .** Comparons l'intégrale  $J$  prise suivant la courbe d'approximation à la même intégrale prise suivant l'extrémale discontinue.

Soit  $\lambda_n$

$$y = \omega_n(x)$$

une telle courbe. La fonction  $\omega_n(x)$  satisfait à l'équation (A).

Appelons  $(x_0 - \varepsilon_n, y_0 + \beta)$  l'intervalle de la chute et  $K(x_0 - \varepsilon_n, y_0 + \beta)$ ,  $\bar{K}(x_0 + \varepsilon_n, \bar{y}_0 + \bar{\beta})$  les points de la courbe  $\lambda_n$  correspondant aux abscisses  $x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n$ .

Soit  $P_1 K$  l'extrémale du faisceau  $F(P_1)$  et  $\bar{K} P_2$  celle du faisceau  $\bar{F}(P_2)$ . Formons la courbe d'approximation  $L_n(P_1 K \bar{K} P_2)$  correspondant à  $\lambda_n$  (n° 3).

Il est évident que pour trouver les conditions suffisantes dans le champ  $\mathfrak{F}_2$  il suffit de comparer l'intégrale  $J$  prise suivant la courbe  $L_n$  à la même intégrale prise suivant  $\mathfrak{E}_0$ .

Mais

$$\begin{aligned} (32) \quad \Delta J_n = J_{L_n} - J_{\mathfrak{E}_0} &= W(x_0 - \varepsilon_n, y_0 + \beta) + \bar{W}(x_0 + \varepsilon_n, \bar{y}_0 + \bar{\beta}) \\ &\quad - W(x_0, y_0) - \bar{W}(x_0, \bar{y}_0) \\ &\quad + \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx. \end{aligned}$$

En développant la somme  $W + \bar{W}$  suivant les puissances de  $\varepsilon_n, \beta, \bar{\beta}$ , on aura

$$\begin{aligned} &W(x_0 - \varepsilon_n, y_0 + \beta) + \bar{W}(x_0 + \varepsilon_n, \bar{y}_0 + \bar{\beta}) \\ &= W(x_0, y_0) + \bar{W}(x_0, \bar{y}_0) - \varepsilon_n \frac{\partial W}{\partial x_0} + \varepsilon_n \frac{\partial \bar{W}}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial W}{\partial y_0} + \bar{\beta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{y}_0} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} \varepsilon_n^2 - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0} \varepsilon_n \beta + \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0^2} \varepsilon_n^2 + 2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_0 \partial \bar{y}_0} \varepsilon_n \bar{\beta} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}_0^2} \bar{\beta}^2 \right) \\ &+ (\varepsilon_n, \beta, \bar{\beta})_3. \end{aligned}$$

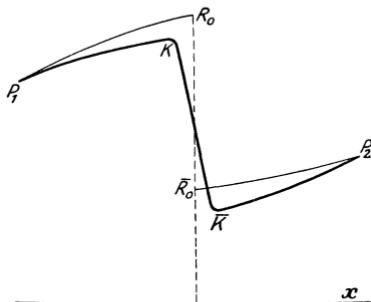


Fig. 9.

L'ensemble des termes du second ordre est précisément  $\Theta(-\varepsilon_n, \beta, -\bar{\beta})$ . Portons les valeurs des dérivées premières dans cette formule. Alors, moyennant les équations fondamentales I, l'équation (32) s'écrira ainsi

$$\Delta J_n = J_{L_n} - J_{\mathcal{E}_0} = \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx - 2\varepsilon_n f(x_0, y_0, y'_0) + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}(-\varepsilon_n, \beta, -\bar{\beta}).$$

Dans le cas considéré  $\varepsilon_n$  est une quantité essentiellement positive, par conséquent d'après le théorème du n° 24,  $\frac{1}{2} \tilde{\Theta}$  a une limite inférieure  $g_0 \varepsilon_n^2$

$$\frac{1}{2} \tilde{\Theta}(-\varepsilon_n, \beta, -\bar{\beta}) \geq g_0 \varepsilon_n^2,$$

où  $g_0$  est la valeur de la quantité positive  $\tilde{T}(x_1) - \tilde{T}(x_2)$ .

On peut maintenant énoncer une condition suffisante pour le minimum dans le champ  $\mathfrak{F}_2$  :

*$\Delta J_n$  est essentiellement positif si à partir d'une certaine valeur de  $n$  on a*

$$(C) \quad \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx \geq f(x_0, y_0, y'_0)$$

*pour toute fonction  $\omega_n(x)$  satisfaisant à l'équation (A).*

En particulier lorsque la limite du premier membre de cette inégalité existe, on peut exprimer la condition suffisante sous la forme plus précise

$$(C_1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx \right\} > f(x_0, y_0, y'_0)$$

pour toute fonction  $\omega_n(x)$  satisfaisant à l'équation (A).

Il y a doute dans le cas où

$$\frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)) dx - f(x_0, y_0, y'_0)$$

tend vers zéro par des valeurs qui peuvent être négatives. Mais si cette expression tend vers zéro par des valeurs positives, on peut être sûr que  $\Delta J$  sera positif.

27. Les résultats des deux n<sup>os</sup> précédents peuvent se résumer de la manière suivante:

*Si la courbe discontinue  $\mathfrak{E}_0$  réalise le minimum dans le champ  $\mathfrak{F}_0$ , elle fournit à l'intégrale  $J$  une plus petite valeur*

1°. *que toute autre courbe du champ  $\mathfrak{F}_1$ ,*

2°. *que toute autre courbe du champ  $\mathfrak{F}_2$  lorsque en outre la condition (C) est vérifiée.*

D'autre part les courbes d'approximation fournissent à l'intégrale  $J$  des valeurs qui s'approchent autant qu'on veut de  $J_{\mathfrak{E}_0}$ .

Par conséquent lorsque le minimum est réalisé dans le champ  $\mathfrak{F}_0$  et lorsque en outre la condition (C) ou  $(C_1)$  est vérifiée on aura les trois faits suivants:

1°. *Le minimum de l'intégrale  $J$  n'est pas réalisé par une courbe continue.*

2°. *Il existe une limite inférieure des valeurs de l'intégrale  $J$  dans le champ des courbes continues.*

3°. *C'est la courbe extrémale discontinue  $\mathfrak{E}_0$  pour laquelle l'intégrale  $J$  a pour valeur cette limite inférieure.*

Plaçons-nous maintenant seulement dans le champ des courbes continues. D'après ce qui précède on voit alors que le rôle du champ  $\mathfrak{F}_0$  des courbes discontinues de comparaison n'est qu'auxiliaire. L'introduction du champ  $\mathfrak{F}_0$  nous permet de trouver toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une limite inférieure des valeurs de l'intégrale  $J$  dans le champ des courbes continues existe.

La courbe discontinue  $\mathfrak{E}_0$  est la vraie extrémale discontinue pour le champ  $\mathfrak{F}_0$ , tandis que pour le champ des courbes continues elle n'est que la courbe limite ou *limitale* fournissant à l'intégrale  $J$  la valeur de cette limite inférieure.

Donc dans le cas des singularités pareilles aux nôtres on doit traiter le problème du calcul des variations au point de vue de la recherche *des conditions* nécessaires et suffisantes pour qu'une *limite inférieure* de l'intégrale  $J$  existe, c'est-à-dire pour qu'une extrémale du champ auxiliaire soit une vraie *limitale* du problème.

### III. La fonction $V$ .

28. Dans ce qui précède on a supposé pour les points de rupture

$$f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y > 0.$$

Nous avons maintenant à chercher s'il existe une extrémale discontinue forte dans le cas contraire

$$(33) \quad f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y < 0.$$

Prolongeons les extrémales  $P_1 R_0$  et  $\bar{R}_0 P_2$ : la première à droite du point  $R_0$  et l'autre à gauche du point  $\bar{R}_0$ . D'après les conditions I, nous aurons une nouvelle extrémale discontinue  $\tilde{\mathfrak{C}}_0(\tilde{P}_1 \bar{R}_0 R_0 \tilde{P}_2)$ .

Nous allons voir que c'est cette extrémale discontinue qui est forte dans le cas (33).

En effet, en raisonnant comme nous l'avons fait au n° 10, nous avons la fonction

$$\tilde{J}(x) = \int_{x_1}^x f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)) dx + \int_x^{\bar{x}_2} f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx$$

où  $\bar{x}_1$  est l'abscisse de  $\tilde{P}_1$  et  $\bar{x}_2$  celle de  $\tilde{P}_2$ ;  $x$  vérifie l'inégalité

$$|x - x_0| < \varrho.$$

Cette fonction doit avoir sa plus petite valeur pour  $x = x_0$  et par conséquent  $\tilde{J}'(x_0) = 0$ ,  $\tilde{J}''(x_0) \geq 0$ .

D'après les équations I l'égalité  $\tilde{J}'(x_0) = 0$  est vérifiée. La seconde condition nous conduit à l'inégalité suivante

$$f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y < 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Admettons que les conditions nécessaires pour le minimum ordinaire le long des extrémales  $P_1 \tilde{P}_2$  et  $\tilde{P}_1 P_2$  soient vérifiées. Alors, quand la fonction

$$V = f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y$$

est positive pour  $L(x_0, y_0, \bar{y}_0, y'_0, \bar{y}'_0)$ , l'extrémale  $\tilde{\mathfrak{C}}_0$  est forte tandis que l'extrémale  $\mathfrak{C}_0$  est faible. Si pour la même valeur cette fonction est négative, l'extrémale  $\tilde{\mathfrak{C}}_0$  est forte et l'extrémale  $\mathfrak{C}_0$  est faible. Il y a doute dans le cas  $V = 0$ . Il faut alors considérer les dérivées d'ordre supérieur de la fonction  $J(x)$  ou bien  $\tilde{J}(x)$  au point  $x = x_0$ .

### IV. Exemples.

29. Trouver le minimum de l'intégrale

$$J = \int_{-1}^{+1} (xy' + y)^2 dx$$

parmi les courbes admissibles joignant les deux points donnés  $P_1(-1, -1)$ ,  $P_2(1, 1)$ .

L'équation d'Euler est linéaire en  $y''$ ,  $y'$ :

$$x^2 y'' + 2xy' = 0.$$

Elle admet l'intégrale générale

$$y = \alpha + \frac{\beta}{x}$$

et il y a en outre une extrémale particulière  $x = 0$ . Il n'existe donc aucune extrémale continue joignant les deux points  $P_1$  et  $P_2$ .

Donc le problème proposé n'admet pas de solution continue.

Considérons les solutions discontinues. Nous sommes dans le cas exceptionnel, parce qu'il n'y a qu'un seul point de discontinuité admissible  $\bar{x}_0 = 0$ . La condition (A) n'est satisfaite que pour cette valeur de  $\bar{x}_0$ . Les équations I' ont pour expressions:

$$x(xy' + y) = 0,$$

$$x(x\bar{y}' + \bar{y}) = 0.$$

D'où l'on tire<sup>12)</sup>

$$x = 0.$$

L'extrémale discontinue cherchée se compose donc de deux segments de droites parallèles à l'axe des  $x$ :

$$\mathfrak{E}_0 \quad \begin{array}{ll} y = -1 & -1 \leq x < 0 \\ y = +1 & 0 < x \leq +1. \end{array}$$

C'est le long de cette courbe discontinue que l'intégrale  $J$  atteint sa borne inférieure.

Nous allons maintenant vérifier qu'il y a des courbes continues d'approximation  $\lambda_n$  admissibles, c'est-à-dire satisfaisant à la condition fondamentale (A). Prenons sur les branches  $P_1R_0$  et  $R_0P_2$  de l'extrémale  $\mathfrak{E}_0$  les points  $A(-\varepsilon, -1)$ ,  $B(+\varepsilon, +1)$  et joignons-les par la droite  $AB$ . Nous formons ainsi la courbe continue d'approximation  $\lambda_n$ . L'intégrale  $J$  prise suivant  $\lambda_n$  a pour expression

$$J_{\lambda_n} = \int_{-1}^{-\varepsilon} dx + \frac{4}{\varepsilon^2} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x^2 dx + \int_{\varepsilon}^1 dx,$$

d'où vient

$$J_{\lambda_n} = 2 + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

<sup>12)</sup> Nous laissons de côté les équations  $xy' + y = 0$ ,  $x\bar{y}' + \bar{y} = 0$ , parce qu'elles ne nous donnent pas d'extrémales discontinues admissibles.

Donc  $J_{i_n}$  peut être aussi près qu'on veut de la valeur  $J_{\mathfrak{E}_0} = 2$ , par conséquent la condition fondamentale (A) est satisfaite.

La dernière équation nous montre que  $J_{i_n}$  reste toujours plus grand que  $J_{\mathfrak{E}_0}$ . Or nous allons voir que cette dernière propriété de  $\mathfrak{E}_0$  est générale, c'est-à-dire  $J_{0_0}$  reste toujours plus petite que la même intégrale  $J$  prise suivant toute autre courbe continue quelconque joignant les mêmes points extrêmes  $P_1, P_2$ .

En effet, d'après la formule

$$\int_a^b y'^2 dx \geq \frac{(B-A)^2}{b-a},$$

où  $A$  et  $B$  sont les ordonnées des points extrêmes, on aura

$$\int_{-1}^{+1} (xy' + y)^2 dx = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{d(xy)}{dx} \right]^2 dx = \int_{-1}^0 \left[ \frac{d(xy)}{dx} \right]^2 dx + \int_0^{+1} \left[ \frac{d(xy)}{dx} \right]^2 dx \geq 2.$$

D'autre part, on peut montrer facilement que l'intégrale  $J$  ne peut atteindre la valeur 2 pour une courbe continue admissible, joignant les deux points donnés  $P_1$  et  $P_2$ .

Mais nous avons vu ci dessus qu'il y a des courbes continues qui fournissent à l'intégrale  $J$  des valeurs aussi proches qu'on veut de 2, donc  $J_{\mathfrak{E}_0} = 2$  est la borne inférieure de l'intégrale  $J$ . C. Q. F. D.

Il ne reste pour vérifier la théorie des conditions suffisantes qu'à comparer l'extrémale  $\mathfrak{E}_0$  avec les courbes de comparaison discontinues analogues. Il est évident que les conditions du n° 11: (7), ( $\bar{7}$ ) sont satisfaites et par conséquent, on peut prendre pour origines  $P_1$  et  $P_2$  des points quelconques de l'extrémale  $\mathfrak{E}_0$ .

Admettons que l'extrémale  $\mathfrak{E}_0$  est entourée d'un faisceau d'extrémales discontinues analogues. Il est clair que chacune de ces extrémales se compose de deux segments de droites parallèles à l'axe des  $x$  qui ne se rejoignent pas. La courbe des points de discontinuité est  $x = 0$ .

Comparons maintenant l'intégrale  $J$  prise suivant l'extrémale  $\mathfrak{E}_0$  avec les courbes discontinues analogues admissibles, joignant les mêmes points  $P_1$  et  $P_2$ . La fonction  $E$  de Weierstrass prise le long d'une de ces courbes discontinues quelconques  $y = \bar{y}(x)$  a pour expression

$$E = (x\bar{y}' + \bar{y})^2 - \bar{y}^2 - 2\bar{y}\bar{y}'x = x^2\bar{y}'^2,$$

par conséquent

$$\Delta J = \int_{-1}^{+1} x^2 \bar{y}'^2 dx,$$

et la courbe  $\mathfrak{C}_0$  réalise le minimum strict de l'intégrale  $J$  dans le champ  $\mathfrak{F}_0$  des courbes discontinues analogues.

### 30. Trouver l'extremum de l'intégrale

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sin(y y') dx.$$

L'équation d'Euler prend la forme

$$-y \frac{d}{dx} [\cos y y'] = 0.$$

Elle admet l'intégrale générale

$$y^2 = ax + \beta$$

et en outre elle nous donne une intégrale singulière  $y = 0$ . Proposons-nous de trouver l'extrémale discontinue de ce problème.

Il est évident que la condition fondamentale ( $\bar{A}$ ) est satisfaite pour toutes les valeurs de  $\bar{x}_0$  vu la nature de la fonction  $f = \sin y y'$ ; c'est-à-dire chaque courbe continue de comparaison vérifiant les conditions connues de la régularité est une courbe admissible au sens du n° 3. Le point de discontinuité est donc arbitraire. C'est un problème du cas général.

Les équations I ont pour expressions

$$\sin y y' = \sin \bar{y} \bar{y}',$$

$$y \cos y y' = 0, \quad \bar{y} \cos \bar{y} \bar{y}' = 0,$$

d'où vient

$$y y' = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \bar{y} \bar{y}' = \frac{5\pi}{2} + k\pi.$$

L'extrémale discontinue se compose donc de deux paraboles

$$(34) \quad y^2 = (2k + 1)\pi x + \beta, \quad \bar{y}^2 = (2k + 5)\pi x + \bar{\beta}.$$

On voit facilement d'après cela que nous nous sommes placés ici dans le cas  $f_y = 0, f_{y'} = 0$  (n° 13).

Considérons maintenant les conditions de Jacobi et de Weierstrass pour le minimum ordinaire. Nous avons

$$A(x, x_0) = \frac{x - x_0}{y y_0}.$$

Donc la condition de Jacobi est toujours vérifiée.

La fonction de Weierstrass a pour expression

$$E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}') = \sin \bar{y} \bar{y}' - \sin(\bar{y} \cdot p(x, \bar{y})) - (\bar{y}' - p) \cos(\bar{y} \cdot p(x, \bar{y})).$$

Mais d'après les équations (34) on aura

$$yp(x, y) = \begin{cases} (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ (2k+5)\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

par conséquent

$$\sin y \cdot p = (-1)^k, \quad \cos y \cdot p = 0.$$

Dès lors

$$E = \sin \bar{y} \bar{y}' + (-1)^{k+1} \begin{cases} \leq 0 & \text{pour } k \text{ impair,} \\ \geq 0 & \text{pour } k \text{ pair.} \end{cases}$$

D'autre part la condition (B<sub>1</sub>) est vérifiée.

En outre on peut montrer que

$$\Delta J = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}(\alpha, \beta, \bar{\beta}) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$$

suivant que  $k$  est pair ou impair.

On aura donc deux groupes de solutions discontinues, suivant que  $k$  est pair ou impair. Les extrémales du premier groupe fournissent pour l'intégrale  $J$  la valeur maximum absolu  $x_2 - x_1$ , tandis que les extrémales du second groupe fournissent la valeur minimum absolu  $-(x_2 - x_1)$ .

Il est facile de voir que si les extrémités  $P_1, P_2$  se trouvent d'un même côté de l'axe des  $x$ , il y aura une infinité de courbes continues anguleuses joignant ces deux points qui fournissent à l'intégrale  $J$  la valeur maximum  $x_2 - x_1$  ou la valeur minimum  $-(x_2 - x_1)$ . Mais si les extrémités se trouvent de différents côtés de l'axe des  $x$ , il n'y aura aucune courbe continue admissible, joignant ces points, qui fournisse à l'intégrale  $J$  la valeur extremum. D'autre part dans ce dernier cas on aura toujours

$$-2\varepsilon < \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \sin yy' dx < 2\varepsilon.$$

Dès lors d'après le théorème du n° 27 nous pouvons dire que lorsque les points  $P_1, P_2$  se trouvent de différents côtés de l'axe des  $x$ :

L'extremum n'est pas réalisé parmi les courbes continues.

L'intégrale  $J$  a la limite inférieure  $-(x_2 - x_1)$  et la limite supérieure  $x_2 - x_1$  dans le champ des courbes continues.

Ce sont les extrémales discontinues qui fournissent à l'intégrale  $J$  ces valeurs limites.