

GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

BRUNO POIZAT

Le rang U selon Lascar

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. n° 6, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A6_0

© Groupe d'étude de théories stables
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE RANG U SELON LASCAR

par Bruno POIZAT (*)

Comme nous le savons déjà, le rang U est le plus petit de tous les rangs ; il est défini par l'induction suivante :

- pour α limite, $RU(p) \geq \alpha$ si $RU(p) \geq \beta$ pour tout $\beta < \alpha$,
- $RU(p) \geq \alpha + 1$ si pour tout cardinal λ il existe un ensemble de paramètres où p a au moins λ fils de RU supérieur à α .

On montre sans peine que si p est instable $RU(p) = \infty$, et que si p est stable $RU(p) \geq \alpha + 1$ si, et seulement si, p a un fils déviant de RU supérieur à α (ce qui permet de montrer la propriété de complétion). On voit donc que dès que p a au moins $(2^T)^+$ fils de RU supérieur à α , ou même seulement deux si on est sur un modèle, alors $RU(p) \geq \alpha + 1$; que pour un type stable, $RU(p)$ est le rang de fondation de la borne de p dans l'ordre fondamental ; on peut alors montrer que si $RU(p) \geq |T|^+$, $RU(p) = \infty$ (Pour plus de détails voir [1], exposés 1 et 4, ainsi que ma thèse).

Le rang U est la seule notion de rang possédant la propriété suivante : si $RU(p) = \alpha < \infty$, et si $\beta < \alpha$, p a un fils de RU β .

Nous allons examiner aujourd'hui les conséquences qu'a sur le rang U la symétrie de la déviation ; tous ces résultats sont dûs à Lascar et sont exposés dans sa thèse. $t(\bar{a}/A)$ désignera le type de $\bar{a}$ sur A , $RU(\bar{a}/A)$ le rang U de ce type ; tous les types considérés seront supposés stables.

Les ordinaux ω^α sont définis par l'induction suivante :

- si α est limite, $\omega^\alpha = \sup \omega^\beta$ pour $\beta < \alpha$,
- $\omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \omega$ (Dans ω , on remplace chaque point par ω^α : c'est l'ordre lexicographique d'un dictionnaire arabe). On remarquera que si $\alpha > \beta$, $\omega^\beta + \omega^\alpha = \omega^\alpha$; tout ordinal s'écrit de manière unique sous la forme $\omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_s} n_s$ où $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_s$: cette écriture est connue sous le nom de développement de Cantor. Si donc $\alpha = \sum \omega^{\beta_i} n_{\beta_i}$, $\alpha + \omega^\gamma$ est obtenu en effaçant dans le développement de Cantor les termes d'ordre inférieur à γ , et en augmentant d'une unité celui d'indice γ . La somme naturelle de deux ordinaux, $\alpha = \sum \omega^{\gamma_i} n_{\gamma_i}$, $\beta = \sum \omega^{\delta_j} m_{\delta_j}$, est l'ordinal $\alpha \oplus \beta = \sum \omega^{\gamma_i} (n_{\gamma_i} + m_{\gamma_i})$; cette somme est commutative et associative ; elle permet, contrairement à la somme ordinaire, de récuser sur les deux termes : si $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$, et $\alpha' < \alpha$ ou $\beta' < \beta$, alors $\alpha' \oplus \beta' < \alpha \oplus \beta$; en outre, $\alpha \oplus \beta$ est le plus petit majorant strict des $\alpha' \oplus \beta$ et des $\alpha \oplus \beta'$.

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU.

1. L'inégalité de Lascar.

THÉOREME 1. - $RU(\overline{b}/A \cup \{\overline{a}\}) + RU(\overline{a}/A) \leq RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A)$;
 $RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A) \leq RU(\overline{b}/A \cup \{\overline{a}\}) \oplus RU(\overline{a}/A)$.

On vérifiera sans peine cet encadrement lorsque certains de ces rangs sont ∞ (avec par convention $\infty = \alpha + \infty = \infty + \alpha = \alpha \oplus \infty$).

Hormis ce cas, la première inégalité se montre par induction sur $RU(\overline{a}/A) = \alpha$; pour tout $\beta < \alpha$, il existe A' tel que $RU(\overline{a}/A') = \beta$; plaçons A' par rapport à $\overline{b}$ de manière à ce que $t(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\})$ ne dévie pas sur $A \cup \{\overline{a}\}$; par hypothèse d'induction : $RU(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\}) + RU(\overline{a}/A') \leq RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A')$ et $RU(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\}) = RU(\overline{b}/A \cup \{\overline{a}\})$, $RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A) > RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A')$ (car $t(\overline{a} \wedge \overline{b}/A')$ dévie sur A si, et seulement si $t(\overline{a}/A')$ dévie sur A ou $t(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\})$ dévie sur $A \cup \{\overline{a}\}$; voir [1], exposé 5, lemme 4) ; d'où le résultat par continuité à droite de la somme, et le fait qu'il est trivial lorsque $RU(\overline{a}/A) = 0$.

La deuxième inégalité s'obtient par induction sur $RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A) = \alpha$; pour tout $\beta < \alpha$, il existe A' tel que $RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A') = \beta$, et, par hypothèse d'induction :

$$RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A') \leq RU(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\}) \oplus RU(\overline{a}/A') .$$

Mais comme ça dévie, l'un des deux termes du second membre est strictement inférieur au terme correspondant sur A , donc la somme naturelle aussi.

THÉOREME 2. - Si $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sont indépendants au-dessus de A ,

$$RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A) = RU(\overline{a}/A) \oplus RU(\overline{b}/A) .$$

Il suffit de montrer que $RU(\overline{a}/A) \oplus RU(\overline{b}/A) \leq RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A)$; on le fait par induction sur le premier membre : pour tout $\alpha < RU(\overline{a}/A)$, on prend A' tel que $RU(\overline{a}/A') = \alpha$, on place $\overline{b}$ sans dévier, et on en déduit par hypothèse de récurrence que :

$$\alpha \oplus RU(\overline{b}/A) = RU(\overline{a}/A') \oplus RU(\overline{b}/A') \leq RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A') < RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A) .$$

De même, pour tout $\beta < RU(\overline{b}/A)$, $RU(\overline{a}/A) \oplus \beta < RU(\overline{a} \wedge \overline{b}/A)$; d'où la conclusion.

Exemple. - On considère la théorie T des corps différentiellement clos de caractéristique nulle, A un tel corps, a différentiellement transcendant sur A , b la dérivée de a :

$$RU(b/A \cup \{a\}) + RU(a/A) = 0 + \omega = \omega = RU(a \wedge b/A) = 0 \oplus \omega = RU(b/A \cup \{a\}) \oplus RU(a/A)$$

mais

$$RU(a/A \cup \{b\}) + RU(b/A) = 1 + \omega = \omega = RU(a \wedge b/A) = RU(b \wedge a/A)$$

$$< 1 \oplus \omega = \omega + 1 = RU(a/A \cup \{b\}) \oplus RU(b/A) .$$

2. Le lemme de symétrie de LASCAR.

THÉOREME 3. - Si $t(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\})$ est superstable (c'est-à-dire rangé par le rang U), $RU(\bar{a}/A) \geq RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \alpha$ implique $RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \alpha$.

Par induction sur $RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \alpha$; étant donné $\beta < \alpha$, choisissons A' tel que $t(\bar{a}/A')$ dévie sur A et $RU(\bar{a}/A') \geq RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \beta$ et plaçons A' de façon que $t(\bar{b}/A' \cup \{\bar{a}\})$ ne dévie pas sur $A \cup \{\bar{a}\}$; distinguons deux cas :

(i) $t(\bar{b}/A')$ dévie sur A ; $RU(\bar{a}/A) \geq RU(\bar{a}/A' \cup \{\bar{b}\}) \oplus \beta$, d'où, par hypothèse de récurrence, $RU(\bar{b}/A) > RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A' \cup \{\bar{a}\}) + \beta = RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \beta$.

(ii) $t(\bar{b}/A')$ ne dévie pas sur A ; le type de A' sur $A \cup \{\bar{b}\}$ ne dévie pas sur A ; mais le type de A' sur $A \cup \{\bar{a}\}$ dévie sur A : il est donc nécessaire (suivez les bornes!) que le type de A' sur $A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\}$ dévie sur $A \cup \{\bar{b}\}$, c'est-à-dire que $RU(\bar{a}/A' \cup \{\bar{b}\}) < RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\})$, d'où

$$RU(\bar{a}/A') \geq RU(\bar{a}/A' \cup \{\bar{b}\}) \oplus (\beta + 1),$$

et par hypothèse de récurrence :

$$RU(\bar{b}/A) = RU(\bar{b}/A') \geq RU(\bar{b}/A' \cup \{\bar{a}\}) + \beta + 1 = RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \beta + 1.$$

Dans tous les cas de figure $RU(\bar{b}/A) > RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \beta$, d'où le résultat par continuité à droite de la somme.

Remarque. - On a utilisé la stabilité de $t(A'/A)$, mais on peut toujours la supposer.

THÉOREME 4. - Si $t(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\})$ est superstable, $RU(\bar{a}/A) \geq RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) + \omega^\alpha n$ implique $RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \omega^\alpha n$.

Scholie. - Ce théorème généralise la symétrie de la déviation : si $\bar{b}$ fait dévier $\bar{a}$ au moins $\omega^\alpha n$ fois, $\bar{a}$ fait dévier $\bar{b}$ au moins $\omega^\alpha n$ fois.

Si $\alpha = 0$, $RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) + n = RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus n$; sinon $\omega^\alpha n$ est limite et pour tout β qui lui est strictement inférieur $RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) + \omega^\alpha n > RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \beta$; d'où le résultat d'après le théorème précédent.

3. Déviation des ensembles indépendants.

On considère un ensemble de paramètres A , et des éléments (ou des uples) a_β , pour $\beta < \alpha$; $A_\beta = A \cup \{\dots a_\gamma \dots\}$ pour $\gamma < \beta$; je rappelle que les a_β sont dits indépendants au-dessus de A si pour tout β , $t(a_\beta/A_\beta)$ ne dévie pas sur A ; cela revient au même de dire que pour tout $\beta < \alpha$, $t(a_\beta/A_\alpha - \{a_\beta\})$ ne dévie pas sur A , donc que cette notion est indépendante de l'énumération choisie ([1], exposé n° 5). On remarquera que si on regroupe les éléments d'un ensemble indépendant en paquets de uples, on obtient un ensemble de uples indépendants (toujours pour la même raison : $t(\bar{a}^* \bar{b}/A')$ dévie sur A si, et seulement si, etc. ...).

Soit $\bar{b}$ un uple de paramètres, et appelons p_β le type de $\bar{b}$ sur A_β ; une application aisée de la symétrie de la déviation nous avait permis de montrer que si $t(a_\beta/A \cup \{\bar{b}\})$ dévie sur A , alors $p_{\beta+1}$ est extension déviante de p_β ; donc si $t(\bar{b}/A)$ est superstable, le nombre de ces a_β est fini, et même, dans le cas où $RU(\bar{b}/A)$ est fini, majoré par ce dernier. Le théorème suivant montre que même lorsque $RU(\bar{b}/A)$ est infini, à condition que tous ces $t(a_\beta/A)$ soient superstables, leur nombre peut être majoré en fonction seulement de $RU(\bar{b}/A)$.

THÉOREME 5. - Soit S un ensemble indépendant au-dessus de A , tel que, pour tout a de S , $t(a/A)$ soit superstable; soit $\bar{b}$ tel que

$$RU(\bar{b}/A) = \omega^{\alpha_u} n_u + \dots + \omega^{\alpha_1} n_1 \text{ avec } \alpha_u > \dots > \alpha_1,$$

et que, pour tout a de S , $t(a/A \cup \{\bar{b}\})$ dévie sur A . Alors S a strictement moins de $(n_u + 1) \dots (n_1 + 1)$ éléments.

On montre par induction sur i que si S satisfait les hypothèses du théorème et a $(n_i + 1) \dots (n_1 + 1)$ éléments, alors $RU(\bar{b}/A \cup S) < \omega^{\alpha_u} n_u + \dots + \omega^{\alpha_{i+1}} n_{i+1}$; cela donne bien la conclusion du théorème car s'il existait un S de cardinal $(n_u + 1) \dots (n_1 + 1)$, on devrait avoir $RU(\bar{b}/A \cup S) < 0$!

Pour $i = 1$; si $a_j \in S$, par symétrie $t(\bar{b}/A \cup \{a_j\})$ dévie sur A , et à cause de la forme de $RU(\bar{b}/A)$, $RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A \cup \{a_j\}) + \omega^{\alpha_1}$; donc d'après le théorème 4, $RU(a_j/A) \geq RU(a_j/A \cup \{\bar{b}\}) + \omega^{\alpha_1}$; vu l'indépendance de S , $RU(a_j/A) = RU(a_j/A_j)$, et par conséquent $RU(a_j/A_j) \geq RU(a_j/A_j \cup \{\bar{b}\}) + \omega^{\alpha_1}$; une nouvelle application du théorème 4 donne alors $RU(\bar{b}/A_j) \geq RU(\bar{b}/A_j \cup \{a_j\}) + \omega^{\alpha_1}$. Le type de $\bar{b}$ dévie donc $n_1 + 1$ fois d'au moins ω^{α_1} ,

$$RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A \cup S) + \omega^{\alpha_1} (n_1 + 1),$$

d'où le résultat.

Le passage de i à $i + 1$ se fait ainsi: on découpe S en $n_i + 1$ paquets de cardinal $(n_{i-1} + 1) \dots (n_1 + 1)$, soient $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots$; par hypothèse d'induction $RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}_j\}) < \omega^{\alpha_u} n_u + \dots + \omega^{\alpha_{i+1}} n_{i+1}$, donc

$$RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}_j\}) + \omega^{\alpha_{i+1}}.$$

On en déduit comme précédemment, par un aller et retour du lemme de symétrie de Lascar, que chaque paquet fait dévier le type de $\bar{b}$ d'au moins $\omega^{\alpha_{i+1}}$ fois, d'où le résultat.

4. Applications.

4-A. Types de rang $U \omega^\alpha$

PROPOSITION. - Soient A un ensemble de paramètres, a de rang $U \omega^\alpha$ sur A , et B un ensemble d'éléments tous de rang U strictement inférieur à ω^α sur A ; alors le type de a sur $A \cup B$ ne dévie pas sur A .

Si ce type déviait, il dévierait à cause d'un ensemble fini $\bar{b} = \{b_1, \dots, b_n\}$ d'éléments de B ; donc d'après l'inégalité de Lascar,

$$RU(a/A) \leq RU(a^*\bar{b}/A) \leq RU(a/AU\{\bar{b}\}) \otimes RU(b_1/A) \otimes \dots \otimes RU(b_n/A) ;$$

c'est impossible car ω^α n'est pas somme naturelle d'ordinaux strictement inférieurs.

Cette proposition permet de faire une théorie de la dimension : soit B un ensemble d'éléments tous de rang U égal à ω^α au-dessus de A ; on montre alors sans peine que les ensembles indépendants sur A maximaux extraits de B ont tous même cardinal, car on a les propriétés de réflexivité, extension-finitude, symétrie de la dépendance, et en outre, à cause de la proposition ci-dessus, également la transitivité (voir exercice 14, 1978). Exemples de cette situation : $\alpha = 0$, $\omega^\alpha = 1$: dimension d'une formule fortement minimale, base d'un espace vectoriel, base de transcendance d'un corps ; $\alpha = 1$, $\omega^1 = \omega$: base de transcendance différentielle d'un corps différentiel.

On peut aussi démontrer à peu de frais que si T est ω_1 -catégorique, tous les types sont de RU fini (ce qui est beaucoup plus faible que le résultat de Baldwin) ; en effet, sinon on aurait un modèle M dénombrable, avec un type p de RU égal à 1, et un type q de RU égal à ω ; formons la suite de Morley S de p de longueur $\lambda > \omega$, et prenons le modèle premier N au-dessus de $M \cup S$: tout élément de N a un type isolé sur $M \cup S$, qui ne peut cohériter de sa restriction à M que si cet élément est dans M , donc (air connu) tout élément de $N - M$ a un type sur $M \cup S$ qui dévie sur M ; d'après la proposition, q est omis dans N , qui est un modèle non saturé de cardinal λ .

4-B. Nombre de modèles dénombrables d'une théorie superstable.

THÉORÈME 6 (LACHLAN, LASCAR). - Soit T complète, dénombrable, superstable, non ω -catégorique ; T a une infinité de modèles dénombrables deux à deux non isomorphes ; plus précisément, il existe une suite M_n , $n \in \omega$, de modèles dénombrables de T telle que M_n se plonge (élémentairement) dans M_m si, et seulement si, $n \leq m$.

1° Si pour un certain N , $S_N(\emptyset)$ n'est pas dénombrable, on prend M_0 dénombrable, M_1 extension élémentaire dénombrable de M_0 réalisant un N -type omis par M_0 , etc. ...

2° On suppose donc que pour tout N , $S_N(\emptyset)$ est dénombrable, ce qui revient à dire que pour tout $\bar{a}$ fini $S_1(\bar{a})$ est dénombrable ; d'après le théorème de Baire, pour tout $\bar{a}$ fini les types isolés de $S_1(\bar{a})$ sont denses, et on n'a aucun mal à construire un modèle atomique premier sur $\bar{a}$ (à la n ème étape, satisfaire le test de Tarski pour chacune des n premières formules de chacun des ensembles de paramètres finis introduits précédemment).

Comme T n'est pas ω -catégorique, pour un certain N , S_N est infini et contient un type p non isolé ; soit $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \dots$ une suite indépendante de réalisations de p , par exemple la suite de Morley d'un type fort étendant p , et soit M_n le modèle premier sur $A_n = \bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 \wedge \dots \wedge \bar{a}_n$; tous les uples de M_n ont un type isolé sur A_n , et ceux qui réalisent p ont un type sur A_n qui dévie sur $\emptyset$ (Théorème de l'application ouverte : voir appendice ci-après) ; donc, d'après le théorème 4, il existe un entier k , qui ne dépend que de $RU(A_n/\emptyset)$, tel que M_n ne contienne pas de suite indépendante de réalisations de p de longueur k : pour $j \geq k$, M_j n'est pas isomorphe à une restriction élémentaire de M_n .

On n'a alors aucun mal à extraire de la suite M_n une suite ayant la propriété demandée.

Remarque. - Il suffit d'avoir p superstable et non isolé dans $S_N(\emptyset)$ pour avoir le résultat ; on remarquera que si T est superstable et non ω -catégorique, un modèle atomique sur un ensemble fini ne peut réaliser tous les types absolus.

4-C. Les modèles dénombrables d'une théorie ω_1 -catégorique.

Nous savons (exposé 3) que si T est ω_1 -catégorique, il existe une formule minimale $f(x, \bar{b})$, à paramètres $\bar{b}$ de type isolé dans $S(\emptyset)$, et que les modèles se décrivent ainsi : on prend une réalisation de $\bar{b}$ dans M , une suite indépendante $A = \{a_0, \dots, a, \dots\}$ maximale dans la formule minimale, et alors M est le modèle premier sur $A \cup \{\bar{b}\}$. Si A est de cardinal $\lambda > \omega$, on obtient ainsi l'unique modèle de cardinal λ ; si A est dénombrable, on obtient le modèle dénombrable saturé M_ω ; c'est évidemment le seul modèle dénombrable si T est ω -catégorique, ce qui signifie que la suite $\bar{b}, a_0, \dots, a_n, \dots$ est atomique sur $\emptyset$.

Sinon il existe un plus grand entier k tel que la suite $\bar{b}, a_0, \dots, a_k$ soit atomique, et elle doit bien sûr être présente dans tous les modèles. Appelons alors M_0 le modèle premier sur $\bar{b}, a_0, \dots, a_k$ (c'est le modèle premier sur $\emptyset$), M_1 le modèle premier sur $\bar{b}, a_0, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots$, M_n le modèle premier sur $\bar{b}, a_0, \dots, a_{k+n}, \dots$. Nous sommes sûrs d'avoir ainsi décrit tous les modèles, et dans le cas où f est sans paramètres, nous voyons que $M_n \neq M_m$ si $n \neq m$; mais si f a un paramètre $\bar{b}$, il se pourrait que pour une autre interprétation $\bar{b}'$ de ce paramètre M_n apparaisse comme isomorphe à M_m , avec $n \neq m$ (ω est exclus car M_n n'est pas saturé) ; en fait, cela est impossible, et tous nos M_n sont distincts d'après la proposition suivante :

PROPOSITION. - Si M est un modèle dénombrable non saturé d'une théorie ω_1 -catégorique, M n'a pas de restriction élémentaire propre qui lui soit isomorphe.

(La proposition montre bien que $M_n \neq M_m$ si $n < m$, car M_n est visiblement restriction de M_m .)

Supposons donc que $M = M_n$ ait une restriction isomorphe propre M' ; soit $\bar{b}'$ l'image de $\bar{b}$ par cet isomorphisme : comme $f(x, \bar{b}')$ n'a pas de paires de Vaught, il y a dans $M - M'$ des éléments qui la satisfont, et M a une restriction isomorphe à M_{n+1} . Il en est de même de M' , et M a une restriction propre isomorphe à M_{n+1} , donc aussi une restriction isomorphe à M_{n+2} , etc. : si $m \geq n$, M_m se plonge élémentairement dans M_n .

Mais alors les modèles dénombrables de T sont $M_0, \dots, M_{n-1}, M_\omega$, plus tous ceux de la forme M_{n+s} qui se plongent les uns dans les autres : on contredit la conclusion du théorème 6.

Appendice. Le théorème de l'application ouverte

THÉOREME 7. - L'application restriction de l'espace des types forts $St_1(A)$ dans l'espace des types $S_1(A)$ est ouverte.

Nous savons que si Ω et Ω' sont deux types forts qui se projettent sur le même type p , il existe un automorphisme σ , conservant les types sur A , de $St_1(A)$ tel que $\sigma\Omega = \Omega'$. Si donc O est un ouvert de $St_1(A)$, le complémentaire de sa projection est la projection de l'intersection des complémentaires des σO , où σ parcourt l'ensemble des automorphismes de $St_1(A)$ qui conservent les types ; ce dernier ensemble est fermé, donc compact, et sa projection est fermée.

THÉOREME 8 (dit de l'application ouverte, de LASCAR). - T stable ; soient $A \subset B$ deux ensembles de paramètres, X le fermé de $S_1(B)$ formé des types qui ne dévient pas sur A ; alors la restriction à X de l'application-restriction de $S_1(B)$ sur $S_1(A)$ est ouverte.

Si B est un modèle, c'est une conséquence du théorème 7 car la restriction de $S_1(M)$ sur $St_1(A)$ induit un isomorphisme de X sur $St_1(A)$ (Application bijective continue de X vers $St_1(A)$: par compacité l'application réciproque est continue) ; sinon on considère un modèle M contenant B , et Y les types sur M qui ne dévient pas sur A : si O est un ouvert de X , son image réciproque O' est un ouvert de $S_1(M)$; la projection de O' dans $S_1(A)$ est ouverte, et c'est aussi la projection de O .

COROLLAIRE. - T stable ; $A \subset B$; si $p \in S_1(B)$ est isolé et ne dévie pas sur A , p/A est isolé dans $S_1(A)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Groupe d'étude de Théories stables (Bruno POIZAT), 1re année, 1977/78. - Paris, Secrétariat mathématique, 1978