

# GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

FRANÇOISE DELON

**Types localement isolés et théorème des deux cardinaux  
dans les théories stables dénombrables**

*Groupe d'étude de théories stables*, tome 1 (1977-1978), exp. n° 7, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=STS\\_1977-1978\\_\\_1\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A7_0)

© Groupe d'étude de théories stables  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# TYPES LOCALEMENT ISOLÉS ET THÉORÈME DES DEUX CARDINAUX DANS LES THÉORIES STABLES DÉNOMBRABLES

par Françoise DELON (\*)

Le plan de cet exposé est très voisin de ceux qui traitaient de la construction des modèles atomiques et du théorème des deux cardinaux dans les théories  $\omega$ -stables. Nous avons alors introduit la notion de type isolé, et montré la densité, dans,  $S_1(A)$ , de l'ensemble des types isolés sur  $A$ , si  $A$  est un ensemble de paramètres. Pour cela, nous utilisons le rang de Morley. Dans le cadre plus général de la stabilité, ces notions ne sont plus adéquates : Nous commençons par définir une famille d'applications de l'ensemble des types non nécessairement complets sur  $A$ , dans  $On \cup \{\infty\}$  ; ces applications, proches de notions de rang, vont jouer le rôle que jouait précédemment le rang de Morley : elles rangent tous les types si, et seulement si, la théorie est stable.

## 1. Définition du $\varphi$ -rang d'un type.

Soit  $T$  une théorie dans un langage  $L$ ,  $A$  un ensemble de paramètres.

Définition. - Soit  $p$  un type non nécessairement complet sur  $A$ ,  $\varphi$  une formule à paramètres dans  $A$  et  $\alpha$  un ordinal. Si  $p$  est consistant, on définit, par induction sur  $\alpha$ , la relation

$$R(p, \varphi) \geq \alpha$$

(le premier membre de l'inégalité se lit " $\varphi$ -rang de  $p$ "). On pose :

$R(p, \varphi) \geq 0$  est toujours vrai ;

Si  $\alpha$  est limite,  $R(p, \varphi) \geq \alpha$  si, et seulement si,  $R(p, \varphi) \geq \beta$ ,  $\forall \beta < \alpha$  ;

$R(p, \varphi) \geq \alpha + 1$  si, et seulement si, pour tout fragment fini  $q$  de  $p$ , il existe un modèle  $M \supset A$  de  $T$  et  $\bar{m} \in M$  tels que

$$R(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi) \geq \alpha \text{ et } R(q \cup \{\neg \varphi(x, \bar{m})\}, \varphi) \geq \alpha.$$

Le premier travail est d'établir la cohérence d'une telle définition. Pour cela, on ramène la satisfaction de la relation  $R(p, \varphi) \geq \alpha$  à la consistance de l'ensemble de formules

$$\Gamma(p, \varphi, \alpha) = \{\psi(x_\eta, \bar{a}) ; p \vdash \psi(x, \bar{a}), \eta \in {}^\alpha 2\} \\ \cup \{\varphi(x_\eta, \bar{y}_{\eta|_\beta})^{\eta(\beta)} ; \beta < \alpha, \eta \in {}^\alpha 2\} \cup T,$$

où  ${}^\alpha 2$  représente l'exponentiation ordinale,  $\eta|_\beta$  la restriction de  $\eta$  à  $\beta$ , et, avec la convention  $\varphi(x, \bar{y})^0 = \varphi(x, \bar{y})$ ,  $\varphi(x, \bar{y})^1 = \neg \varphi(x, \bar{y})$ .

(\*) Françoise DELON, UER Math., Tour 55, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75221 PARIS CEDEX 05.

La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION.

Si  $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$  est consistant, et  $\alpha \geq \alpha'$ , alors  $\Gamma(p, \varphi, \alpha')$  est consistant ;

Si  $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$  est consistant, et  $q \subset p$ , alors  $\Gamma(q, \varphi, \alpha)$  est consistant.

PROPOSITION. - Si  $\Gamma(p, \varphi, \ell)$  est consistant, pour tout entier  $\ell$ , alors  $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$  est consistant, pour tout ordinal  $\alpha$ .

Démonstration. - Tout sous-ensemble fini de  $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$  est inclus dans un ensemble de la forme

$$\Delta = \{\psi(x_{\eta_i}, \bar{a}) ; p \vdash \psi(x, \bar{a}), i = 0 \dots n-1\} \\ \cup \{\varphi(x_{\eta_i}, \bar{y}_{\eta_i|\beta_j})^{\eta_i(\beta_j)} ; i = 0 \dots n-1, j = 0 \dots \ell-1\} \cup T,$$

où  $\eta_i \in {}^\alpha 2$ , pour  $i = 0 \dots n-1$ , et  $\beta_j < \alpha$ , pour  $j = 0 \dots \ell-1$ . On supposera que les  $\beta_j$  sont ordonnés de façon croissante, c'est-à-dire  $j < j' \leq n-1$  implique  $\beta_j < \beta_{j'}$ . Définissons  $\eta_i^! \in 2^\ell$ ,  $i = 0 \dots n-1$ , par la relation

$$\eta_i^!(j) = \eta_i(\beta_j).$$

On a en vue les changements d'indices suivants dans l'expression de  $\Delta$

$$\begin{aligned} \eta_i &\longrightarrow \eta_i^! \\ \eta_i|\beta_j &\longrightarrow \eta_i^!|j \\ \eta_i(\beta_j) &\longrightarrow \eta_i^!(j) \end{aligned}$$

Par défintion des  $\eta_i^!$ , la troisième substitution est légitime.

La première substitution est correcte si, et seulement si, tous les  $\eta_i^!$  sont distincts, ce qu'on impose par la condition suivante :

(\*) Si  $\eta_i \neq \eta_j$ , on adjoint à l'ensemble  $\{\beta_0, \dots, \beta_{\ell-1}\}$  le plus petit  $\beta$  séparant  $\eta_i$  et  $\eta_j$ .

Les  $\eta_i$  étant en nombre fini, on n'adjoint ainsi qu'un nombre fini de  $\beta$ .

La deuxième substitution est correcte si on a l'équivalence

$$\eta_i|\beta_j = \eta_k|\beta_j \text{ si, et seulement si, } \eta_i^!|j = \eta_k^!|j.$$

Or la première égalité équivaut à

$$\forall \beta < \beta_j, \eta_i(\beta) = \eta_k(\beta)$$

$$\begin{aligned} &\iff \forall \beta_{j'} < \beta_j, \eta_i(\beta_{j'}) = \eta_k(\beta_{j'}) \quad (\text{par } (*)) \\ &\iff \forall \ell, \forall j' < j, \eta_i^!(j') = \eta_k^!(j') \\ &\iff \eta_i^!|j = \eta_k^!|j. \end{aligned}$$

Tout sous-ensemble fini de  $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$  est donc inclus dans un ensemble

$\Gamma(p, \varphi, \ell')$ , pour un entier  $\ell'$ . Par compacité, la consistance de ces ensembles implique celle de  $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$ .

PROPOSITION. -  $(p, \varphi) \geq \alpha$  si, et seulement si,  $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$  est consistant.

La démonstration se fait par induction sur  $\alpha$ .

1° Pas de problème pour  $\alpha = 0$  puisqu'on a  $\Gamma(p, \varphi, 0) = p$ .

2° Soit  $\alpha$  limite, donc  $\alpha \geq \omega$ . Si  $\Gamma(p, \varphi, \alpha)$  est consistant,  $\Gamma(p, \varphi, \gamma)$  est consistant, pour tout ordinal  $\gamma$ ; par hypothèse d'induction, on a

$$R(p, \varphi) > \gamma, \quad \forall \gamma < \alpha,$$

donc

$$R(p, \varphi) \geq \alpha,$$

par définition du  $\varphi$ -rang.

Réciproquement, supposons qu'on a

$$R(p, \varphi) \geq \alpha,$$

alors

$$R(p, \varphi) \geq n, \quad \forall n \in \omega,$$

ce qui entraîne la consistance de  $\Gamma(p, \varphi, n)$ ,  $\forall n \in \omega$ , et donc de  $\Gamma(p, \varphi, \beta)$ , pour tout ordinal  $\beta$ .

3° Reste le cas d'un ordinal successeur.

(a) Supposons  $R(p, \varphi) \geq \alpha + 1$ ; pour tout fragment fini  $q$  de  $p$ , il existe un modèle  $M \supset A$  et  $\bar{m} \in M$  tels que

$$R(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi) \geq \alpha;$$

$$R(q \cup \{\neg \varphi(x, \bar{m})\}, \varphi) \geq \alpha.$$

Par hypothèse d'induction,  $\Gamma(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$  et  $\Gamma(q \cup \{\neg \varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$  sont consistants.

Dans le cas où  $\alpha$  est infini, on conclut aussitôt que  $\Gamma(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \gamma)$  est consistant, pour tout ordinal  $\gamma$ , donc à fortiori  $\Gamma(q, \varphi, \gamma)$ . Comme toute partie finie de  $\Gamma(p, \varphi, \gamma)$  est incluse dans un ensemble de ce genre,  $\Gamma(p, \varphi, \gamma)$  est consistant, pour tout ordinal  $\gamma$ .

Soit donc  $\alpha$  fini. On va réunir les deux ensembles  $\Gamma(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$  et  $\Gamma(q \cup \{\neg \varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$ , en prenant soin que les variables  $x_\eta$  et  $\bar{y}_{\eta|\beta}$  intervenant dans l'un ou l'autre ne se confondent pas; pour cela, on concatène 0 à l'indice des variables intervenant dans  $\Gamma(q \cup \{\varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$  et 1 à l'indice des variables intervenant dans  $\Gamma(q \cup \{\neg \varphi(x, \bar{m})\}, \varphi, \alpha)$ . On a ainsi la consistance de l'ensemble réunion

$$\begin{aligned} & \{ \psi(x_0 \wedge \eta, \bar{a}) ; q \vdash \psi(x, \bar{a}), \eta \in {}^\alpha 2 \} \\ & \cup \{ \varphi(x_0 \wedge \eta, \bar{m}) ; \eta \in {}^\alpha 2 \} \cup \{ \varphi(x_0 \wedge \eta, \bar{y}_{\eta|_\beta})^{\eta(\beta)} ; \eta \in {}^\alpha 2, \beta < \alpha \} \\ & \cup \{ \psi(x_1 \wedge \eta, \bar{a}) ; q \vdash \psi(x, \bar{a}), \eta \in {}^\alpha 2 \} \cup \{ \neg \varphi(x_1 \wedge \eta, \bar{m}) ; \eta \in {}^\alpha 2 \} \\ & \cup \{ \varphi(x_1 \wedge \eta, \bar{y}_{1 \wedge \eta|_\beta})^{\eta(\beta)} ; \eta \in {}^\alpha 2, \beta < \alpha \} \cup T. \end{aligned}$$

Cet ensemble est exactement  $\Gamma(p, \varphi, 1 + \alpha)$  si on rebaptise  $\bar{m} = \bar{y}_\emptyset$ .

(b) Supposons  $\Gamma(p, \varphi, \alpha + 1)$  consistant. Pour tout fragment fini  $q$  de  $p$ ,  $\Gamma(q, \varphi, \alpha + 1)$  est consistant. Séparons les variables dont l'indice  $\eta$  commence par 0 et celles où il commence par 1. Le premier ensemble, par exemple, s'écrit

$$\begin{aligned} & \{ \psi(x_\eta, \bar{a}) ; q \vdash \psi(x, \bar{a}), \eta \in {}^{\alpha+1} 2, \eta(0) = 0 \} \\ & \cup \{ \varphi(x_\eta, \bar{y}_\emptyset) ; \eta \in {}^{\alpha+1} 2, \eta(0) = 0 \} \\ & \cup \{ \varphi(x_\eta, \bar{y}_{\eta|_\beta})^{\eta(\beta)} ; \eta \in {}^{\alpha+1} 2, \eta(0) = 0, 0 < \beta < \alpha + 1 \}. \end{aligned}$$

Grâce au changement de variable  $\eta'(\beta) = \eta(\beta + 1)$ , on reconnaît dans cet ensemble  $\Gamma(q \cup \{ \varphi(x, \bar{y}_\emptyset), \varphi, \alpha \}$  qui est donc consistant. Même raisonnement pour la consistance de  $\Gamma(q \cup \{ \neg \varphi(x, \bar{y}_\emptyset) \}, \varphi, \alpha)$ . Il suffit alors de réaliser  $\bar{y}_\emptyset$  en  $\bar{m}$  et d'utiliser l'hypothèse d'induction.

**PROPOSITION (Propriétés des  $\varphi$ -rangs).**

1° Si  $R(p, \varphi) \geq \alpha$  et  $\alpha \geq \alpha'$ , alors  $R(p, \varphi) \geq \alpha'$  ;

2° Si  $R(p, \varphi) \geq \alpha$  et  $q \subset p$ , alors  $R(q, \varphi) \geq \alpha$  ;

3° S'il existe un ordinal  $\alpha$  tel qu'on n'ait pas  $R(p, \varphi) \geq \alpha$ , alors il existe un plus grand entier  $n$  tel qu'on ait  $R(p, \varphi) \geq n$  ; cet entier est appelé  $\varphi$ -rang de  $p$ , et noté  $n = R(p, \varphi)$  ;

4° Si  $R(p, \varphi) = n \in \omega$ , il existe un fragment fini  $p_0$  de  $p$  vérifiant  $R(p_0, \varphi) = R(p, \varphi)$  (En particulier si  $p$  est complet, on peut prendre pour  $p_0$  une formule de  $p$ ) ;

5° Soit  $p, q \in S_1(A)$  vérifiant

$$R(p, \varphi) = n_0 = R(p_0, \varphi) = R(q, \varphi),$$

où  $p_0$  est un fragment fini de  $p$ , et  $p_0 \subset q$ . Alors toute formule  $\varphi(x, \bar{a})$  est satisfaite en même temps par  $p$  et  $q$ .

Les quatre premiers points sont des corollaires de ce qui précède.

Démonstration du 5e point. - Supposons qu'il existe  $\bar{a} \in A$  tel que

$$p \vdash \varphi(x, \bar{a}), \quad q \vdash \neg \varphi(x, \bar{a}).$$

Des inclusions  $p_0 \subset p_0 \cup \{ \varphi(x, \bar{a}) \} \subset p$ , on déduit  $R(p_0 \cup \{ \varphi(x, \bar{a}) \}, \varphi) = n_0$ , et des inclusions  $p_0 \subset p_0 \cup \{ \neg \varphi(x, \bar{a}) \} \subset q$ , on déduit  $R(p_0 \cup \{ \neg \varphi(x, \bar{a}) \}, \varphi) = n_0$ . Le  $\varphi$ -rang de  $p$  serait donc au moins  $n_0 + 1$ .

## 2. Propriétés des $\varphi$ -rangs dans les théories stables.

PROPOSITION. - Les cinq conditions suivantes sont équivalentes.

- 1° T est stable ;
- 2° Pour toute formule  $\varphi$  ,  $R(\{x = x\} , \varphi)$  est fini ;
- 3° Pour toute formule  $\varphi$  et tout type  $p$  ,  $R(p , \varphi)$  est fini ;
- 4° Tout type complet est définissable ;
- 5° T est stable en tout cardinal  $\lambda$  vérifiant  $\lambda^{\bar{T}} = \lambda$  .

Les implications  $4^\circ \implies 5^\circ \implies 1^\circ$  sont évidentes. De même, l'implication  $2^\circ \implies 3^\circ$  est évidente puisque le  $\varphi$ -rang ne peut que diminuer lorsqu'on augmente le type.

Démonstration de  $\neg 2^\circ \implies \neg 1^\circ$  . - On suppose qu'on a, pour une formule  $\varphi$

$$R(\{x = x\} , \varphi) \geq \alpha , \text{ pour tout ordinal } \alpha ,$$

et on veut en déduire l'instabilité en tout  $\lambda$  .

Soit  $\lambda$  un cardinal quelconque ; posons

$$\mu = \inf\{\gamma ; 2^\gamma > \lambda\} , \text{ donc } \mu < \lambda .$$

On sait que  $\Gamma(\{x = x\} , \varphi , \mu)$  est consistant. Réalisons dans un modèle de T les variables  $x_{\eta}$  et  $\bar{y}_{\eta|_{\beta}}$  intervenant dans cet ensemble. Dénombrons les  $\bar{y}$  : Ils sont indexés par l'ensemble

$$\{\eta|_{\beta} ; \eta \in {}^\mu 2 , \beta < \mu\} = \{\eta ; \eta \in {}^\beta 2 , \beta < \mu\}$$

de cardinalité  $\leq \lambda$  . L'ensemble des  $x$  est de cardinalité  $2^\mu > \lambda$  . Pour montrer l'instabilité en  $\lambda$  , il suffit donc de vérifier que deux  $x$  distincts ont des types différents sur les  $\bar{y}$  . Or, si  $\eta_1 \neq \eta_2$  , soit  $\beta$  le premier ordinal tel que

$$\eta_1(\beta) \neq \eta_2(\beta) ;$$

on a donc

$$\eta_1|_{\beta} = \eta_2|_{\beta} \text{ et } M \models \varphi(x_{\eta_1} , y_{\eta_1|_{\beta}}) \wedge \neg \varphi(x_{\eta_2} , y_{\eta_2|_{\beta}})$$

ou l'inverse

$$M \models \neg \varphi(x_{\eta_1} , y_{\eta_1|_{\beta}}) \wedge \varphi(x_{\eta_2} , y_{\eta_2|_{\beta}}) .$$

Démonstration de  $3^\circ \implies 4^\circ$  . - Soit  $p \in S_1(A)$  et  $\varphi$  une formule à paramètres dans A ; p est  $\varphi$ -rangé, donc, pour une formule  $\psi \in p$  , on a

$$R(p , \varphi) = R(\{\psi(x)\} , \varphi) = n_0 \in \omega .$$

Soit  $\bar{a} \in A$  . Alors

$$p \vdash \varphi(x , \bar{a}) \text{ si, et seulement si, } R(\{\psi(x) \wedge \varphi(x , \bar{a})\} , \varphi) \geq n_0 .$$

On a, en effet, si  $p \vdash \varphi(x , \bar{a})$  ,

$$R(\{\psi(x)\}, \varphi) \geq R(\{\psi(x) \wedge \varphi(x, \bar{a})\}, \varphi) \geq R(p, \varphi),$$

d'où en fait l'égalité de ces trois  $\varphi$ -rangs.

On a de la même façon, si  $p \vdash \neg \varphi(x, \bar{a})$ ,

$$R(\{\psi(x) \wedge \neg \varphi(x, \bar{a})\}, \varphi) = n_0.$$

Si on avait, en même temps,  $R(\{\psi(x) \wedge \varphi(x, \bar{a})\}, \varphi) \geq n_0$ , le  $\varphi$ -rang de  $p$  serait au moins  $n_0 + 1$ .

On a donc établi l'équivalence suivante :

$p \vdash \varphi(x, \bar{a})$  si, et seulement si,  $\Gamma(\{\psi(x) \wedge \varphi(x, \bar{a})\}, \varphi, n_0)$  est consistant si, et seulement si,

$$T(A) \models \bigwedge_{\eta \in 2^{n_0}} \exists x_\eta [\psi(x_\eta) \wedge \varphi(x_\eta, \bar{a}) \wedge \bigwedge_{\beta < n_0} \exists y_{\eta|\beta} \varphi(x_\eta, y_{\eta|\beta})^{\eta(\beta)}]$$

(puisque dans ce cas  $\Gamma$  est un ensemble fini de formules). En conséquence, le type  $p$  est définissable.

### 3. Modèle localement atomique d'une théorie stable dénombrable.

Désormais, le langage  $L$  est dénombrable et  $T$  est une théorie stable ;  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des ensembles de paramètres.

Définitions. - Soit  $p \in S_1(A)$ .

$p$  est dit localement isolé sur  $A$  si, et seulement si, pour toute formule  $\varphi$ , il existe  $\psi$ , à paramètres dans  $A$ , telle que  $p \vdash \psi(x)$  et, si  $\bar{a} \in A$  et  $p \vdash \varphi(x, \bar{a})$ , alors

$$T(A) \vdash \forall x [\psi(x) \longrightarrow \varphi(x, \bar{a})].$$

On appelle  $\varphi$ -type de  $p$  l'ensemble

$$\{\varphi(x, \bar{a}), \bar{a} \in A, p \vdash \varphi(x, \bar{a})\} \cup \{\neg \varphi(x, \bar{a}) ; \bar{a} \in A, p \vdash \neg \varphi(x, \bar{a})\}.$$

On note cet ensemble  $p(\varphi)$ .

On emploiera l'expression " $\varphi$ -type isolé" pour exprimer l'existence d'une formule  $\varphi$ , consistante, telle que,  $\forall \bar{a} \in A$ , si  $\varphi(x, \bar{a}) \in p$ , alors

$$T(A) \vdash \forall x [\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x, \bar{a})],$$

et, si  $\neg \varphi(x, \bar{a}) \in p$ , alors

$$T(A) \vdash \forall x [\varphi(x) \longrightarrow \neg \varphi(x, \bar{a})].$$

On attire l'attention sur le fait qu'il y a abus de langage par rapport à la terminologie usuelle, en ce sens que

1°  $p(\varphi)$  n'est pas clos par conséquence ;

2° La formule  $\varphi$  n'a aucune raison d'être dans  $p(\varphi)$ .

Remarquons que  $p$  est localement isolé si, et seulement si, pour toute formule

$\varphi$ ,  $p(\varphi)$  est isolé par une formule de  $p$ . En effet, si  $\bar{\varphi}$  isole

$$\{\varphi(x, \bar{a}) ; \bar{a} \in A, p \vdash \varphi(x, \bar{a})\}$$

et  $\psi$  isole  $\{\neg \varphi(x, \bar{a}) ; \bar{a} \in A, p \vdash \neg \varphi(x, \bar{a})\}$ , alors  $\bar{\varphi} \wedge \psi$  isole  $p(\varphi)$ . Réciproquement, une formule isolant  $p(\varphi)$  isole chacun des deux ensembles ci-dessus.

PROPOSITION. - Soit  $p \in S_1(A)$  ;  $p$  est localement isolé si, et seulement si, pour toute formule  $\varphi$  à paramètres dans  $A$ , l'ensemble  $V_\varphi(p) = \{q \in S_1(A) ; q(\varphi) = p(\varphi)\}$  est un voisinage de  $p$  (plus précisément, le  $\varphi$ -type de  $p$  est isolé par une formule de  $p$  si, et seulement si,  $V_\varphi(p)$  est un voisinage de  $p$ ).

Démonstration.

Si  $p$  est localement isolé, soit  $\bar{\varphi} \in p$  une formule isolant  $p(\varphi)$ . Alors  $V_\varphi(p)$  contient l'ouvert  $\langle \bar{\varphi} \rangle$  qui contient  $p$ .

Si  $V_\varphi(p)$  est un voisinage de  $p$ , il contient un ouvert fondamental  $\langle \bar{\varphi} \rangle$  contenant  $p$  ; c'est-à-dire que tout  $q \in S_1(A)$ , tel que  $q \vdash \bar{\varphi}(x)$ , satisfait  $p(\varphi) = q(\varphi)$  ; ou encore  $\forall \bar{a} \in A$ , si  $\varphi(x, \bar{a}) \in p$ , on a

$$T(A) \vdash \forall x [\bar{\varphi}(x) \longrightarrow \varphi(x, \bar{a})] .$$

Par ailleurs,  $p \vdash \bar{\varphi}(x)$ .

PROPOSITION. - L'ensemble des types localement isolés sur  $A$  est dense dans  $S_1(A)$ .

Démonstration. - Le langage est dénombrable ; soit  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ ,  $n < \omega$ , une énumération des formules sans paramètre. Soit  $\langle \psi \rangle$  un ouvert fondamental de  $S_1(A)$ . Prenons dans  $\langle \psi \rangle$  un type  $p$  de  $\varphi_1$ -rang minimal. Il existe  $\psi_1 \in p$  tel que

$$\mathcal{R}(\psi_1, \varphi_1) = \mathcal{R}(p, \varphi_1) .$$

Alors, tout  $q$  contenant  $\psi$  et  $\psi_1$  a même  $\varphi_1$ -rang et donc même  $\varphi_1$ -type que  $p$ . D'où l'inclusion

$$\langle \psi \wedge \psi_1 \rangle \subset V_\varphi(p) = V_\varphi(q)$$

qui montre que  $q$  a son  $\varphi_1$ -type isolé par  $\psi \wedge \psi_1$ . On recommence l'opération en remplaçant  $\langle \psi \rangle$  par  $\langle \psi \wedge \psi_1 \rangle$ . On construit ainsi une suite de formules  $\psi, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$  telles que la conjonction des  $n$  premières soient consistante. Il existe un type les contenant toutes ; ce type, en fait unique, a, pour tout  $n$ , un  $\varphi_n$ -type isolé par une formule lui appartenant. Il est donc localement isolé.

Définition. - Soit  $A \subset B$  ;  $B$  est dit localement atomique sur  $A$  quand tout type  $p \in S_n(A)$  réalisé dans  $B$  est localement isolé sur  $A$ .

PROPOSITION. - Il y a transitivité de l'atomicité locale.

Démonstration. - Soit  $A \subset B \subset C$ , où  $C$  est supposé localement atomique sur  $B$ ,



ainsi que  $B$  sur  $A$ . Soit  $\bar{c} \in C$  et  $\varphi$  une formule de  $L$ . Le type de  $\bar{c}$  sur  $B$ , qu'on notera  $t(\bar{c}, B)$ , est localement isolé, d'où l'existence d'une formule  $f$  à paramètres  $\bar{b} \in B$ , vérifiant

$$\forall \bar{a} \in B \text{ tel que } t(\bar{c}, B) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}),$$

donc, en particulier,

$$\forall \bar{a} \in A \text{ tel que } t(\bar{c}, A) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}), \quad t(B) \vdash \forall \bar{x} [f(\bar{x}, \bar{b}) \rightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{a})].$$

De même  $t(\bar{b}, A)$  est localement isolé sur  $A$ , d'où  $g$  vérifiant

$$t(A) \vdash \forall \bar{y} [g(\bar{y}) \rightarrow [\forall \bar{x} [f(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{a})]]],$$

c'est-à-dire

$$t(A) \vdash \forall \bar{x} [\exists \bar{y} [g(\bar{y}) \wedge f(\bar{x}, \bar{y})] \rightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{a})].$$

La formule  $\exists \bar{y} [g(\bar{y}) \wedge f(\bar{x}, \bar{y})]$  isole donc  $t(\bar{c}, A)$  et appartient à ce type puisque  $g(\bar{b}) \wedge f(\bar{x}, \bar{b})$  est dans  $t(\bar{c}, B)$ .

**PROPOSITION.** - Soit  $M$  un modèle  $\omega_1$ -saturé contenant  $A$ ; alors tout type localement isolé sur  $A$  est réalisé dans  $M$ .

**Démonstration.** - Si  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  énumèrent les formules du langage, et si  $p$  est un type localement isolé sur  $A$ , il suffit de considérer les formules  $\psi_1, \dots, \psi_n, \dots$  isolant  $p(\varphi_1) \dots p(\varphi_n) \dots$ . Le type incomplet  $\{\psi_n(x), n \in \omega\}$  a pour seul prolongement  $p$  et est réalisé dans  $M$ .

**Remarque.** - Tout type  $p$  localement isolé sur un modèle  $M$  y est réalisé: En effet, considérons la formule  $\bar{x} \neq \bar{m}$ ; il existe  $\bar{\varphi}$  telle que, si on suppose  $p$  non réalisé,

$$\forall \bar{m} \in M, \quad M \models \forall \bar{x} [\bar{\varphi}(\bar{x}) \rightarrow \bar{x} \neq \bar{m}],$$

ce qui prouverait que la formule  $\bar{\varphi}$  est inconsistante avec  $T$ .

Mais, si  $M$  est un modèle contenant  $A$  et que  $p$  est un type localement isolé sur  $A$ , il ne sera généralement pas réalisé dans  $M$ .

**THÉOREME.** - Si  $T$  est une théorie stable dénombrable, il existe un modèle localement atomique construit au-dessus de tout système de paramètres.

**Démonstration.** - Soit  $A$  un ensemble de paramètres. On choisit un modèle  $M$   $\omega_1$ -saturé contenant  $A$ ; on va construire par induction une chaîne croissante d'ensembles  $A_i$ ,  $A \subset A_i \subset M$ .

**Rappel** (cf. Exposé n° 2). -  $A \models T(A)$  si, et seulement si, les types de  $S_1(A)$  réalisés dans  $A$  constitue un ensemble dense dans  $S_1(A)$ .

Posons :

$$A_0 = A;$$

$A_{\alpha+1} = A_\alpha$  si  $A_\alpha$  est un modèle.  $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{a_\alpha\}$  sinon, où  $a_\alpha \in M$  est tel que  $t(q_\alpha, A)$  est localement isolé sur  $A$ ;

$A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$  si  $\alpha$  est limite.

On vérifie par induction que chaque  $A_\alpha$  est localement atomique sur  $A_\beta$ ,  $\beta < \alpha$  (pour passer des 1-types aux  $n$ -types, remarquer simplement que, si  $\phi$  isole  $t(a_\alpha, A_\alpha)$ , alors la formule

$$(x_1 = a_{\alpha_1}) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} = a_{\alpha_{n-1}}) \wedge \phi(x_n)$$

isole  $t((a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_{n-1}}, a_\alpha), A_\alpha)$ , où  $\alpha_i < \alpha$ ).

La suite  $A_\alpha$  stationne nécessairement pour un ordinal  $\gamma$  de cardinalité  $\bar{\gamma} \leq \bar{M}$ . Par construction,  $A_\gamma$  est un modèle, et il est localement atomique sur  $A$ .

#### 4. Application au théorème des deux cardinaux.

On se contentera d'établir le théorème ci-dessous. Pour ses conséquences, en particulier, le résultat : Si  $T$  admet  $\langle \alpha, \beta \rangle$ ,  $\alpha > \beta \geq \omega$ , elle admet  $\langle \lambda, \mu \rangle$ ,  $\forall \lambda, \mu$ ,  $\lambda \geq \mu \geq \omega$ , on se reportera à l'exposé n° 2.

THEOREME. - Soit  $T$  une théorie stable dénombrable. Si  $T$  admet une paire de Vaught  $(M, N)$ , elle admet une paire de Vaught  $(M_1, M'_1)$  quelque soit la sur-structure  $M_1 \supset M$ .

La démonstration utilise les mêmes résultats intermédiaires que dans les théories  $\omega$ -stables. Dans tout ce qui suit,  $T$  est stable dénombrable.

PROPOSITION. - Soit  $M$  un modèle de  $T$ ,  $A$  un ensemble de paramètres,  $N$  un modèle localement atomique sur  $M \cup A$ ,  $x$  un élément de  $N - M$ . Alors  $t(x, M \cup A)$  ne cohérite pas de sa restriction à  $M$ .

Démonstration. - Le  $\neq$ -type de  $x$  au-dessus de  $M$  est isolé par une formule  $\phi$ , soit

$$\forall m \in M, T(M) \vdash \forall y [\phi(y) \rightarrow y \neq m].$$

Si  $t(x, M \cup A)$  cohéritait de  $t(x, M)$ , on aurait un  $\alpha \in M$  tel que

$$T(M) \vdash \phi(\alpha),$$

ce qui est une contradiction.

PROPOSITION. - Soit  $M < N$  deux modèles de  $T$ ,  $p$  un type sur  $M$ , réalisé par  $x_0 \in N$ ;  $\varphi$  est une formule de  $L$  et  $\phi_M = \{x; x \in M \text{ et } M \vdash \varphi(x)\}$ . Les trois situations suivantes sont équivalentes :

1°  $p$  ne fait pas augmenter  $\varphi$  ;

2° Si  $\alpha$  est un paramètre vérifiant  $\varphi$ ,  $q = t(x_0, M \cup \{\alpha\})$  hérite de sa restriction à  $M$  ;

3°  $\varphi$  n'augmente pas dans un modèle localement atomique au-dessus de  $M \cup \{x_0\}$ .

Démonstration.

$1^\circ \implies 2^\circ$  : Soit  $\psi$  une formule telle que  $q \vdash \psi(x, \alpha, \bar{m})$ , où  $\bar{m} \in M$ ,

$$q \vdash \exists y \psi(x, y, \bar{m}) \wedge \varphi(y) .$$

Le type  $p$  satisfait donc la même formule. Considérons le modèle  $N_1$  dans lequel  $p$  est réalisé, par  $x_1$ , et  $\varphi$  n'augmente pas

$$N_1 \vdash \exists y \varphi(x_1, y, \bar{m}) \wedge \varphi(y) .$$

Il existe donc  $y_1 \in \Phi_{N_1}$  vérifiant  $\psi(x_1, y_1, \bar{m})$ , et on a

$$p \vdash \psi(x, y_1, \bar{m}) ,$$

où  $y_1 \in M$  puisque  $\Phi_{N_1} = \Phi_M$ .

$2^\circ \implies 3^\circ$  : Soit  $N_0$  un modèle localement atomique au-dessus de  $M \cup \{x_0\}$ . Si  $z$  est un élément quelconque de  $N_0 - M$ ,  $t(z, M \cup \{x_0\})$  ne cohérite pas de  $t(z, M)$ , ou de façon équivalente,  $t(x_0, M \cup \{z\})$  n'hérite pas de  $t(x_0, M)$ . L'hypothèse  $\varphi(z)$  n'est donc jamais vérifiée quand on a  $z \in N_0 - M$ .

$3^\circ \implies 1^\circ$  : C'est trivial.

**PROPOSITION.** - Soit  $M$  et  $N$  deux modèles de  $T$ ,  $p \in S_1(M)$ ,  $q \in S_1(N)$ . Si  $p$  et  $q$  sont équivalents, et que  $p$  n'augmente pas  $\Phi_M$ , alors  $q$  n'augmente pas  $\Phi_N$ .

La démonstration est la même que dans l'exposé n° 2. Le théorème s'établit maintenant sans difficulté : On considère le type  $p \in S_1(M)$  d'un élément de  $N - M$ . Son héritier  $p_1$  sur  $M_1$  n'augmente pas  $\Phi_{M_1}$  (par la proposition qui précède). Il suffit de prendre pour  $M_1$  un modèle où  $p_1$  est réalisé sans augmenter  $\varphi$ , par exemple, un modèle localement atomique construit.