

GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

BRUNO POIZAT

Suites d'indicernables dans les théories stables

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. n° 5, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A5_0

© Groupe d'étude de théories stables
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUITES D'INDICERNABLES DANS LES THÉORIES STABLES

par Bruno POIZAT (*)

Dans ce qui suit, on considère une théorie T stable, de cardinal $|T|$ quelconque, un ensemble A de paramètres et des éléments a_λ , $\lambda < \kappa$ (κ ordinal), extraits d'un modèle de T . On adopte les notations suivantes :

$A_\lambda = A \cup \{ \dots a_\mu \dots ; \mu < \lambda \}$, p_λ est le type de a_λ sur A_λ .

Je dirai que la suite est croissante si $p_\mu \subset p_\lambda$ chaque fois que $\mu < \lambda$; si donc λ est limite, p_λ est la limite des p_μ , pour $\mu < \lambda$; $p_{\lambda+1}$ est fils de p_λ . En particulier, une suite est dite indicernable (sur A) si, chaque fois que $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \kappa$, le type sur A de $a_{\lambda_0}, a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_n}$ est le même que celui de $a_0, a_1, \dots, a_n$. Elle est dite totalement indicernable si, chaque fois que $\lambda_0 \dots \lambda_n$ sont deux à deux distincts, $a_{\lambda_0}, \dots, a_{\lambda_n}$ a même type sur A que $a_0, \dots, a_n$: dans ce cas, l'énumération de la suite n'a plus d'importance, et on peut parler d'ensemble indicernable.

LEMME 1. - Si S est une ω -suite indicernable, elle se prolonge, et d'une seule manière (à A -isomorphisme près), en une suite de longueur $\kappa > \omega$.

Introduisons des variables x_λ , pour $\omega \leq \lambda < \kappa$; si nous voulons construire une suite d'indicernables prolongeant S , il faut satisfaire la formule

$$f(a_{n_0}, \dots, a_{n_u}, x_{\lambda_0}, \dots, x_{\lambda_v}),$$

où les indices sont rangés dans l'ordre croissant si, et seulement si, la formule $f(a_{n_0}, \dots, a_{n_u}, a_{n_u+1}, \dots, a_{n_u+v})$ est satisfaite ; cela donne une théorie complète qui est bien consistante, puisque finiment satisfaisable dans S .

Une suite infinie est dite insécable si, pour toute formule $f(x, \bar{y})$ du langage de T , et tout $\bar{b}$ situé dans quelque extension élémentaire du modèle dans lequel on est placé, l'ensemble des λ tels que $\vdash f(a_\lambda, \bar{b})$ est fini ou cofini. Si B est un ensemble quelconque de paramètres, on définit alors le type moyen, ou type limite de S sur B , $tm(S/B)$, par l'ensemble des formules à paramètres dans B satisfaites par tous les éléments de S sauf un nombre fini ; il est clair que c'est un type consistant et complet, qui n'est pas isolé si B contient une infinité d'éléments de S .

La définition suivante fait intervenir la stabilité. La suite S est dite indépendante (au-dessus de A) si, pour tout λ , p_λ ne dévie pas sur A (i. e. est

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU

extension non déviante de sa restriction à A).

LEMME 2. - La suite S est indépendante si, et seulement si, pour tout λ , le type de a_λ , sur $A \cup S - \{a_\lambda\}$, ne dévie pas sur A .

Si ce type ne dévie pas sur A , il en est de même de sa restriction p_λ ; donc la condition du lemme est apparemment plus forte que l'indépendance. Réciproquement, supposons que S soit indépendante; je vais montrer par récurrence sur l'entier i que, pour toute suite $\lambda_n < \dots < \lambda_i < \dots < \lambda_0 < \kappa$, le type de a_{λ_i} sur $A \cup \{a_{\lambda_n}, \dots, a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_{i-1}}, \dots, a_{\lambda_0}\}$ ne dévie pas sur A . Par définition, c'est vrai pour $i = 0$; si c'est vrai pour $i - 1$, le type de $a_{\lambda_{i-1}}$ sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \dots a_{\lambda_i}, a_{\lambda_{i-2}} \dots a_{\lambda_0}\}$ ne dévie pas sur A , donc ne dévie pas non plus sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \dots a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_{i-2}} \dots a_{\lambda_0}\}$. Par symétrie, le type de a_{λ_i} sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \dots a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_i} \dots a_{\lambda_0}\}$ ne dévie pas sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \dots a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_{i-1}} \dots a_{\lambda_0}\}$; or, dans la suite $\lambda_n < \dots < \lambda_{i+1} < \lambda_i < \lambda_{i-2} < \dots < \lambda_0$, λ_i s'est rapproché d'une unité de λ_0 , et, par hypothèse de récurrence, le type de a_{λ_i} sur $A \cup \{a_{\lambda_n} \dots a_{\lambda_{i+1}}, a_{\lambda_{i-2}} \dots a_{\lambda_0}\}$ ne dévie pas sur A , d'où le résultat par transitivité.

Maintenant, pour toute partie s de $S - \{a_\lambda\}$, le type de a_λ sur $A \cup s$ ne dévie pas sur A ; il en est de même de son type sur $A \cup S - \{a_\lambda\}$.

Le lemme 2 prouve donc que la notion de suite indépendante ne dépend pas de la façon dont on a énuméré ses éléments, et qu'on peut parler d'ensemble indépendant.

Nous avons déjà défini, dans le cours, la notion de suite de Morley associées à un type p sur un modèle M ; partant de $A = M$, on la définit inductivement en réalisant en a_λ l'héritier p_λ de p sur A_λ . Il s'agit donc d'une suite indépendante; elle est totalement indiscernable, car d'après le lemme 2, si $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, le type de a_{λ_n} sur $A \cup \{a_{\lambda_0}, \dots, a_{\lambda_{n-1}}\}$ est l'héritier de p ; elle est enfin insécable par unicité du cohéritier de p . Le type moyen de la suite de Morley de p est l'héritier de p .

LEMME 3. - Si S est une suite infinie indiscernable sur A , il existe un modèle M contenant A tel que S soit la suite de Morley d'un type p de $S_1(M)$.

Si S n'est pas assez longue, on la prolonge de manière à avoir une suite de longueur $|T|^+$ au moins; le nombre de $\lambda < |T|^+$, tels que $p_{\lambda+1}$ est extension déviante de p_λ , est au plus $|T|$, car la borne de $p_{\lambda+1}$ doit représenter une formule omise par celle de p_λ ; donc, à partir d'un certain μ , la suite $s = a_\mu, a_{\mu+1}, \dots, a_{\mu+n}, \dots$ est indépendante sur A ; si E est une relation d'équivalence finie à paramètres dans A , par indiscernabilité, il est nécessaire que tous les $a_{\mu+n}$ soient congrus modulo E à a_μ . Soit M un modèle contenant

$A_{\mu+1}$, que nous plaçons de manière à ce que le type de M sur $A_{\mu+\omega}$ ne dévie pas sur $A_{\mu+1}$; comme le type de M sur $A_{\mu+n+1}$ ne dévie pas sur $A_{\mu+1}$, donc sur $A_{\mu+n}$, par symétrie, le type de $a_{\mu+n}$ sur $M \cup A_{\mu+n}$ est extension non déviante de $p_{\mu+n}$, lui-même extension non déviante de $p_{\mu+1}$; mais, d'après le théorème de la relation d'équivalence finie, ce dernier type est stationnaire (il détermine en effet toutes les classes modulo les relations d'équivalence finies à paramètres dans A_μ , sur lequel il ne dévie pas), il n'a sur M qu'un seul fils non déviant q , dont s privée de son premier élément est la suite de Morley. On peut alors prolonger cette suite de Morley en une suite S' de même longueur que S , et le résultat suit de ce que S et S' ont même type au-dessus de A .

COROLLAIRE 1. - Toute suite indicernable est totalement indicernable et insécable.

Remarques.

1° S'il y a une suite indicernable non totalement, on en prend une indicée par un ordre I , et avec ces paramètres on fait au moins autant de types qu'il y a de coupures dans I , ce qui contredit la stabilité (exercice classique). Il y a une réciproque : Si T est instable, il y a une suite de n -uples (pour un certain n peut-être supérieur à 1) indicernable, mais pas totalement.

2° La situation est différente en ce qui concerne l'insécabilité. S'il y a une ω -suite indicernable sécable, on dit que T a la propriété d'indépendance (voir le problème d'examen). Ces théories sont très instables : avec λ paramètres, on fait 2^λ types (exemple : l'arithmétique). Il y a des théories instables, mais sans propriété d'indépendance : l'ordre Q , les corps valués henséliens, à corps résiduel algébriquement clos et Z -groupe de valuation.

Nous allons maintenant généraliser la notion de suite de Morley en partant cette fois d'un type p sur un ensemble A quelconque de paramètres ; on réalise p en a_0 ; on réalise ensuite en a_1 une extension non déviante de p sur A_1 ; nous savons que notre arbitraire réside dans le choix, pour toute relation d'équivalence finie E à paramètres dans A , d'une classe modulo E ; mais, si a_0 et a_1 ne sont pas congrus modulo E , il est clair qu'une suite d'indicernables qui commence par eux ne peut avoir plus d'éléments qu'il n'y a de classes modulo E . Si donc nous voulons un procédé qui se répète à l'infini, il faut prendre a_0 et a_1 congrus modulo E , prendre pour p_λ l'unique extension non déviante de p telle que $p_\lambda \vdash E(x, a_0)$ pour toute E ; l'ensemble obtenu est alors indépendant et totalement indicernable sur A . Il est déterminé par le type fort p^* , extension de p , sur A que réalise chacun de ses éléments, et nous parlerons de la suite de Morley du type fort p^* . Son type moyen est l'unique extension non déviante de p dans ce type fort (on pourrait parler de l'héritier du type fort p^*).

Introduisons maintenant une nouvelle notation. Soit $\kappa(T)$ le plus petit cardinal infini tel qu'il n'y ait pas dans l'ordre fondamental (des 1-types) de suite ordinaire descendante de longueur $\kappa(T)$. T est superstable si, et seulement si,

$\kappa(T) = \omega$. On sait que $\kappa(T) \leq |T|^+$, car, dans une suite ordinale p_λ descendante, il y a une formule f_λ omise par p_λ (et ses prédécesseurs) et représentée par $p_{\lambda+1}$ (et ses successeurs).

LEMME 4. - Le type de $\bar{a} \wedge \bar{b}$ sur $A \cup B$ ne dévie pas sur A si, et seulement si, le type de $\bar{b}$ sur $A \cup B$ ne dévie pas sur A , et le type de $\bar{a}$ sur $A \cup B \cup \{\bar{b}\}$ ne dévie pas sur $A \cup \{\bar{b}\}$.

Supposons que $t(\bar{a} \wedge \bar{b}/A \cup B)$ ne dévie pas sur A ; par symétrie, $t(B/A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\})$ ne dévie pas sur A , et il en est de même de sa restriction $t(B/A \cup \{\bar{b}\})$, et, par symétrie, $t(\bar{b}/A \cup B)$ ne dévie pas sur A ; $t(B/A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\})$ ne dévie pas non plus sur $A \cup \{\bar{b}\}$, et, par symétrie, $t(\bar{a}/A \cup B \cup \{\bar{b}\})$ ne dévie pas sur $A \cup \{\bar{b}\}$.

Supposons maintenant qu'on ait les deux conditions de la 2e partie; par symétrie, $t(B/A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\})$ est extension non déviante de $t(B/A \cup \{\bar{b}\})$, lui-même extension non déviante de $t(B/A)$; par transitivité, $t(B/A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\})$ ne dévie pas sur A , et, par symétrie, $t(\bar{a} \wedge \bar{b}/A \cup B)$ ne dévie pas sur A .

COROLLAIRE 2. - Dans l'ordre fondamental des n -uples, il n'y a pas de suite ordinale descendante de longueur $\kappa(T)$.

Prouvons-le pour $n = 2$. S'il y avait une telle suite, on pourrait trouver des modèles M_λ , $\lambda < \kappa(T)$, avec $M_\mu < M_\lambda$, quand $\mu < \lambda$, a et b tels que, pour tout λ , le type $p_{\lambda+1}$ de $a \wedge b$ sur $M_{\lambda+1}$ soit extension déviante du type p_λ de $a \wedge b$ sur M_λ . Soit X l'ensemble des λ tels que le type de b sur $M_{\lambda+1}$ dévie sur M_λ : $|X| < \kappa(T)$; soit Y l'ensemble des λ tels que le type de a sur $M_{\lambda+1} \cup \{b\}$ dévie sur $M_\lambda \cup \{b\}$: $|Y| < \kappa(T)$. On a une contradiction car, d'après le lemme, $|X| \cup |Y| = \kappa(T)$.

Remarque. - Dans l'ordre fondamental des ω -types, il y a toujours des ω -suites descendantes: prendre la suite de Morley d'un type non réalisé, et réaliser un par un ses éléments. Pour obtenir un énoncé correct sur les λ -types, on peut remplacer $\kappa(T)$ par $\kappa(T)^\lambda$ (lemme de Koenig) ou $(\lambda \times \kappa(T))^+$.

J'énonce maintenant les trois théorèmes principaux, qui interviennent partout, et de façon essentielle dans les constructions de modèles.

THÉOREME 1. - Soit S une suite indicernable sur A . Il existe $\lambda < \kappa(T)$ (λ dénombrable si T est dénombrable, λ fini si T est superstable) tel que S privée de ses λ premiers éléments soit de Morley sur A_λ .

Supposons que, pour un certain λ , $p_{\lambda+\omega}$ soit extension non déviante de p_λ ; pour toute relation d'équivalence finie E à paramètres dans A , il est nécessaire que tous les $a_{\lambda+n}$ soient congrus modulo E à a_λ , sinon, par indicernabilité, il y aurait une infinité de classes. Par conséquent, $p_{\lambda+1}$ est un type stationnaire, et $a_{\lambda+1}, \dots, a_{\lambda+n}, \dots$ est sa suite de Morley; d'après le lemme 1, il en

est de même au-delà, et, pour tout $\mu > \lambda$, p_μ est extension non déviante de p_λ .

Définissons alors $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 =$ le plus petit indice, s'il existe, tel que p_{λ_1} dévie sur A_0 , etc. : si μ est limite, λ_μ est la borne supérieure des λ_ν , $\nu < \mu$; $\lambda_{\mu+1}$ est le plus petit ordinal, s'il existe, tel que $p_{\lambda_{\mu+1}}$ dévie sur A_{λ_μ} . On poursuit ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus continuer; la suite λ_μ obtenue est de cardinal inférieur à $\kappa(T)$, et comme entre deux termes consécutifs on ne saute qu'un nombre fini d'éléments, elle se termine avant $\kappa(T)$. Il existe donc $\lambda < \kappa(T)$ à partir duquel ça ne dévie plus, et notre suite devient de Morley sur $A_{\lambda+1}$.

THÉOREME 2. - Soit S une suite croissante de longueur κ (ordinal) de cofinalité supérieure ou égale à $\kappa(T)$; il existe λ tel que, pour $\mu > \lambda$, p_μ ne dévie pas sur A_λ ; S , privé de ses $\lambda + \omega$ premiers éléments, est de Morley sur $A_{\lambda+\omega}$; si p_λ est de multiplicité finie n , S privée de ses $\lambda + n$ premiers éléments est de Morley sur $A_{\lambda+n}$.

Considérons les indices μ tels que $p_{\mu+1}$ dévie sur A_μ ; il y en a moins que $\kappa(T)$, et ils ne peuvent être cofinaux dans κ . Il existe donc λ tel que, pour tout $\mu > \lambda$, p_μ ne dévie pas sur A_λ ; si E est une relation d'équivalence finie à paramètres dans A_λ , et si a_λ n'est pas congru à $a_{\lambda+1}$, par croissance il ne le sera pas non plus à tous les $a_{\lambda+m}$; donc, pour un certain n inférieur au nombre de classes de E , $a_{\lambda+n}$ est congru à tous les suivants modulo E . On voit que, de λ à $\lambda + \omega$, la suite choisit un type fort au-dessus de p_λ . $p_{\lambda+\omega}$ est extension non déviante et stationnaire de p_λ , et ce qu'il y a après est sa suite de Morley. Le phénomène se produit déjà à l'étape $\lambda + n$ si p_λ est de multiplicité n .

THÉOREME 3. - Soient S un ensemble indépendant au-dessus de A , et $\bar{b}$ un n -uple de paramètres. Il existe une partie X de S , de cardinal inférieur à $\kappa(T)$, telle que, pour tout $a \in S' = S - X$, le type de a sur $S' \cup A \cup \{\bar{b}\} - \{a\}$ ne dévie pas sur A . On voit que $\bar{b}$ ne peut faire dévier sur A que les types de moins de $\kappa(T)$ éléments de S ; que S' reste indépendant au-dessus de $A \cup \{\bar{b}\}$; que si S est de Morley, S' reste de Morley sur $A \cup \{\bar{b}\}$.

Soit X l'ensemble de cardinal inférieur à $\kappa(T)$ des a_λ tels que le type de $\bar{b}$ sur $A_{\lambda+1}$ dévie sur A_λ . En dehors de cet ensemble, par symétrie, le type de a_λ sur $A_\lambda \cup \{\bar{b}\}$ ne dévie pas sur A_λ , ni sur A par transitivité, puisque le type de a_λ sur A_λ ne dévie pas sur A . Enumérons S' en sautant les éléments de X ; $S' = \{\dots c_\lambda \dots\}$; c_λ est de la forme $a_{f(\lambda)}$, avec $C_\lambda \subset A_{f(\lambda)}$; donc, le type de c_λ sur $C_\lambda \cup \{\bar{b}\}$ ne dévie pas sur A , ni sur $A \cup \{\bar{b}\}$, et donc S' est indépendant sur $A \cup \{\bar{b}\}$; d'après le lemme 2, le type de c_λ sur $S' \cup A \cup \{\bar{b}\} - \{c_\lambda\}$ est extension non déviante de sa restriction à $A \cup \{\bar{b}\}$, elle même extension non déviante de sa restriction à A .

Si S est la suite de Morley du type fort p^* , comme ça ne dévie pas, tous les éléments de S' vont être dans le même type fort au-dessus de $A \cup \{\bar{b}\}$, S' est la suite de Morley de l'héritier de p^* .

Exemple d'application : Modèles saturés.

Je rappelle qu'il n'y a aucune restriction sur $|T|$.

LEMME 5. - Si T est stable en λ , $\kappa(T) \leq \text{cf}(\lambda)$.

D'après le lemme de Koenig, $\lambda^{\text{cf}(\lambda)} > \lambda$; si donc il existait une suite descendante de longueur $\text{cf}(\lambda)$, il en existerait une de longueur κ , où κ est le plus petit cardinal tel que $\lambda^\kappa > \lambda$. A l'aide de cette suite, on construit un arbre de type de hauteur κ , de chaque noeud duquel part λ branchements, c'est-à-dire qu'on fait autant de types qu'il y a de branches, soit λ^κ , avec pas plus de paramètres qu'il y a de noeuds, soit $\sum_{\mu < \kappa} \lambda^\mu = \kappa \times \lambda = \lambda$. Ceci contredit la stabilité en λ .

Remarques.

1° Soit λ_0 le plus petit cardinal en lequel T est stable. Alors T est stable en λ si, et seulement si, $\lambda \geq \lambda_0$ et $\lambda^{<\kappa(T)} = \lambda$ ($\lambda^{<\kappa} = \sup \lambda^\mu$, pour $\mu < \kappa$). On remarquera que $\lambda_0 \leq 2^{|T|}$.

La condition est nécessaire d'après le lemme.

Réciproquement, supposons que λ satisfasse ces conditions, et soit p dans $S_1(A)$, $|A| = \lambda$; si p dévie sur $\emptyset$, une de ses restriction finie p_0 dévie sur $\emptyset$; si p est fils déviant de p_0 , il en est de même d'une de ses restrictions finies p_1 , etc. Cela ne peut se faire que moins de $\kappa(T)$ fois, il existe donc une partie B de A , de cardinal $\kappa < \kappa(T)$, telle que p soit extension non déviante de p/B . Il y a λ^κ choix possibles pour une partie de A de cardinal κ ; comme $\kappa(T) \leq \lambda_0$, ça ne fait pas plus de $\lambda_0 \times \lambda = \lambda$ choix pour B . $|B| \leq \lambda_0$, et, par λ_0 -stabilité, il n'y a pas plus de λ_0 choix possibles pour p/B ; et, toujours par λ_0 -stabilité, B se plonge dans un modèle M de cardinal λ_0 (compléter ω fois par le test de Tarski): la multiplicité de p/B est donc au plus λ_0 . Le nombre de choix possibles pour p est $\lambda \times \lambda_0 \times \lambda_0 = \lambda$.

2° Si T est stable en λ , T est stable en λ^+ .

Si $\kappa < \kappa(T)$, comme λ^+ est régulier, une fonction de κ dans λ^+ a une image non cofinale, et $(\lambda^+)^{\kappa} = \lambda^{\kappa} \times \lambda^+ = \lambda^+$.

PROPOSITION 1 (HARNIK). - Si T est stable en λ , T a un modèle saturé de cardinal λ .

T a donc un modèle M_0 de cardinal λ ; on réalise tous les types sur M_0 en un modèle M_1 de cardinal λ , et on poursuit ce procédé λ fois. Le modèle M obtenu

nu est notre candidat.

Soit donc $A \subset M$, avec $|A| < \lambda$. Si λ est régulier, A est inclus dans un M_μ , et tout type sur A est réalisé dans $M_{\mu+1}$. On suppose dorénavant λ singulier.

Soit $p \in S_1(A)$, soit q un fils de p sur M , de restriction q_μ à M_μ . Comme, d'après le lemme, il n'y a pas dans l'ordre fondamental de suite descendante cofinale à λ , pour un certain μ , q est l'héritier de q_μ , et, par construction, le modèle M contient une suite de Morley S de q_μ de longueur λ ; un n -uplet $\bar{a}$ extrait de A ne fait dévier que moins de $\kappa(T)$ élément de S (théorème 3), ce qui n'élimine en tout que $|A| \times \kappa(T) \leq |A| \times \text{cf}(\lambda) < \lambda$ d'entre eux; il en reste donc λ qui réalisent sur $M_\mu \cup A$ l'héritier de q_μ , dont la restriction à A est p .
