

MICHEL WALDSCHMIDT

Répartition des valeurs d'une somme de fonctions exponentielles

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1971), exp. n° 4, p. 1-19

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1971____A4_0

© Université Bordeaux 1, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPARTITION DES VALEURS D'UNE SOMME DE
FONCTIONS EXPONENTIELLES

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-

Pour démontrer la transcendance du nombre e , en 1873, Hermite a étudié l'ordre du zéro $z = 0$ d'une fonction du type :

$$(1) \quad z \rightarrow f(z) = \sum_{h=1}^{\ell} b_h(z) e^{\omega_h z},$$

où $b_1(z) \dots b_{\ell}(z)$ sont des polynômes à coefficients complexes, et $\omega_1, \dots, \omega_{\ell}$ des nombres complexes. Ces investigations étaient reprises par Mahler [1], Siegel [16], puis Jager [9] qui développait des propriétés analogues pour des fonctions binomiales et logarithmiques (Baker [1]). Coates [2] et Van der Poorten [14], utilisant une méthode de Turan [19] étudiaient des minoration pour des sommes de puissances, conduisant à des résultats sur la répartition des valeurs de fonctions analytiques de type exponentiel (Dancs et Turan [3]; Turan [20]), binomial ou logarithmique (Van der Poorten [15]). En liaison avec des théorèmes d'indépendance algébrique, Gel'fond [6] chap. III, puis Mahler [12] et Spira [17] ont obtenu des majorations du nombre de zéros de fonctions du type (1), tandis que Pontrjagin [13] étudiait la répartition de ces zéros et de leur partie réelle pour l'appliquer à l'étude de la stabilité de solutions d'équations aux dérivées partielles.

La distribution des valeurs de fonctions du type (1) intervient dans l'étude des solutions d'équations différentielles à coefficients constants, ainsi que dans des questions de stabilité de systèmes de contrôles ; elle a également des relations avec des processus stochastiques [3].

Nous allons, ici, nous intéresser au nombre de $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z_0$, z_0 étant un nombre complexe donné. Ceci revient à majorer le nombre de zéros de :

$$z \rightarrow \sum_{i=0}^{\ell} b_i(z) e^{\omega_i z},$$

où $b_0(z) = z_0$ et $\omega_0 = 0$. Ainsi, il suffit d'étudier les zéros des fonctions du type (1). Les résultats connus [3], [4], [6], [12], [14], [20], donnent une majoration du nombre de zéros de f (1) dans un carré du plan complexe, de telle manière que la majoration obtenue est indépendante de la position du carré, ainsi que des coefficients des polynômes $b_i(z)$; elle ne dépend que du degré p_i de ces polynômes, du côté du carré ainsi que des nombres ω_i . Les nombres ω_i interviennent par les deux quantités :

$$\Omega = \max_{1 \leq i \leq \ell} |\omega_i|, \quad \Delta = \min_{i \neq j} |\omega_i - \omega_j|.$$

Le seul énoncé ne faisant pas intervenir Δ est celui de Spira [17] dont la démonstration est incomplète. Nous allons justifier l'énoncé de Spira et répondre ainsi à une question de Turan [3], [20].

Examinons plusieurs cas particuliers.

Exemple 1. - Soit $f(z) = 2 \cos z = e^{iz} + e^{-iz}$. Le nombre de zéros de f dans le disque $|z| \leq \lambda \pi + \frac{\pi}{2}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, est supérieur à 2λ .

Exemple 2. - Soit $f(z) = (e^{\frac{z}{m}} - 1)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} e^{\frac{j}{m} z}$. La fonction f ainsi définie admet $z=0$ comme zéro d'ordre m . (Voir [16], ch.I, §.7).

Exemple 3. - Soit $f(z) = 2i \sin(2^N z) = e^{2^N i z} - e^{-2^N i z}$. La fonction f admet les zéros $z = \frac{\pi}{2\ell}$, $0 \leq \ell \leq N$, qui appartiennent tous au disque $|z| \leq \pi$.

Exemple 4. - Fel'dman a démontré ([5] I lemme 5 et II lemme 7) :

LEMME 1. - Si $P_0, \dots, P_{q_0-1}$ sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$, linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, de degré $\leq q_0-1$, si $u_1, \dots, u_p$ sont des nombres complexes distincts non nuls, et si $T \in \mathbb{C}$, $T \neq 0$, alors le déterminant :

$$\left| P_k(T.x) u_\ell^x \right|_{\substack{0 \leq k \leq q_0-1, \ 1 \leq \ell \leq p \\ 0 \leq x \leq p q_0-1}}$$

est non nul.

Soit f une fonction définie par (1), où les polynômes b_h ne sont pas tous nuls, et $\omega_h \neq \omega_j$ si $h \neq j$. Soit $T \in \mathbb{C}$, avec $T(\omega_h - \omega_j) \notin 2i\pi \mathbb{Z}$ pour $h \neq j$. Alors l'un des nombres $f(T.x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, est non nul.

On en déduit le résultat suivant, que l'on retrouvera au §. 4 :

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants, alors les fonctions $z, e^{\alpha_1 z}, \dots, e^{\alpha_m z}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

Enfin, le lemme de Fel'dman permet de construire une fonction f du type (1), non identiquement nulle, et admettant les zéros :

$1, \dots, \sum_{h=1}^{\ell} p_h - 1$, où p_h est le degré du polynôme b_h .

Exemple 5. - Soient $P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes non tous nuls, de degré inférieur ou égal à $p_1, \dots, p_\ell$ avec $n = \sum_{h=1}^{\ell} p_h$. Soient $\omega_1, \dots, \omega_\ell$, $x_0, \dots, x_{n+1}$ des nombres complexes tels que : $x_i \neq x_j$ pour $1 \leq i < j \leq n+1$ et $e^{\omega_h x_i} \neq e^{\omega_k x_i}$ pour $1 \leq h < k \leq \ell$ et $0 \leq i \leq n+1$.

Soit F la fonction :

$$z \rightarrow \sum_{h=1}^{\ell} P_h(z) e^{\omega_h z}.$$

L'un au moins des nombres $F(x_i + j x_0)$, $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq \ell$ est non nul.

Preuve : On suit la méthode que Schneider a utilisée, dans le cas où les nombres ω_h sont des multiples entiers de $\text{Log } a$ (a algébrique non racine de l'unité) et où les nombres x_1 sont de la forme $\lambda + \mu b$, λ et μ entiers (b algébrique irrationnel), pour montrer que a^b est transcendant [16].

$$\text{Soit } P_{k,h}(z) = P_h(z + kx_0) e^{\omega_h k x_0}.$$

Ainsi $F(z + kx_0) = \sum_{h=1}^{\ell} P_{k,h}(z) e^{\omega_h z}$. On peut évidemment supposer chaque polynôme P_h non nul et de degré exactement p_h .

Le déterminant $\Delta(z) = |P_{k,h}(z)|_{k,h=1,\dots,\ell}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, dont le terme de plus haut degré est :

$$\alpha_1 \dots \alpha_{\ell} \delta x^n,$$

où $\delta = \pi \left(e^{\omega_j x_0} - e^{\omega_i x_0} \right) \neq 0$, et où $\alpha_h x^{r_h}$ est le terme de plus haut degré de P_h . Donc, l'un au moins des nombres $\Delta(x_i)$, $1 \leq i \leq n+1$, est non nul.

D'autre part, si $\xi \in \mathbb{C}$ est tel que :

$$e^{\omega_i \xi} \neq e^{\omega_j \xi} \text{ pour } 1 \leq i < j \leq \ell \text{ et } \Delta(\xi) \neq 0,$$

alors l'un au moins des nombres $\Delta(\xi + kx_0)$, $1 \leq k \leq \ell$ est non nul.

Exemple 6. :

LEMME 2. - [6]. Soient $b_{i,j}$ des nombres réels non tous nuls, $\omega_1, \dots, \omega_{\ell}$ des nombres réels distincts. Alors le nombre de zéros réels de la fonction :

$$f_{\ell}(z) = \sum_{i=1}^{\ell} e^{\omega_i z} \sum_{j=1}^{p_i} b_{i,j} z^{j-1}$$

est inférieur à $\sum_{i=1}^{\ell} p_i$.

La démonstration se fait par récurrence sur ℓ . Pour $\ell=1$, f est un polynôme non nul de degré p_1-1 .

Supposons le lemme vrai pour $\ell \leq \lambda - 1$, et soit f_λ une telle fonction dont le nombre de zéros réels est σ .

D'après le théorème de Rolle, le nombre de zéros de la fonction :

$$\frac{d}{dz} \frac{p_\lambda}{p_\lambda} e^{-w_\lambda z} f_\lambda(z) = \sum_{i=1}^{\lambda-1} e^{(w_i - w_\lambda)z} \sum_{j=1}^{p_i} c_{i,j} z^{j-1},$$

dépasse le nombre $\sigma - p_\lambda$; d'après l'hypothèse de récurrence, on a donc :

$$\sigma - p_\lambda < \sum_{i=1}^{\lambda-1} p_i.$$

Les exemples précédents montrent que le nombre σ de zéros de f dans le disque $|z| \leq \rho$ dépend de ρ , de $n = \sum_{i=1}^{\ell} p_i$, et de $\Omega = \max_{1 \leq i \leq \ell} |w_i|$.

Nous allons voir que ces trois quantités permettent de majorer σ .

PROPOSITION. - Soient $p_1, \dots, p_\ell$ des nombres entiers positifs, $b_{i,j}$ ($1 \leq j \leq p_i$; $1 \leq i \leq \ell$) des nombres complexes non tous nuls, $w_1, \dots, w_\ell$ des nombres complexes deux à deux distincts, $\Omega = \max_{1 \leq i \leq \ell} |w_i|$, f la fonction :

$$(1) \quad z \rightarrow f(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_i} b_{i,j} z^{j-1} e^{w_i z},$$

et σ le nombre de zéros de la fonction f , comptés avec leur ordre de multiplicité, dans le disque $|z - z_0| \leq \rho$. Pour tout nombre réel $R > \rho \Omega + 1$, on a :

$$(2) \quad \left(\frac{R - \rho \Omega}{\rho \Omega + 1} \right)^\sigma \leq n! 2^{n+1} \frac{R}{R-1} e^{2R}.$$

COROLLAIRE. - Avec les notations de la proposition, pour tout réel $\lambda > 0$, on a :

$$\sigma < \frac{n}{\lambda} + \frac{2(1+n^\lambda)}{\lambda \operatorname{Log} n} (1 + \rho \Omega) .$$

Démonstration du corollaire :

Soit $\Lambda = \rho \Omega + (\rho \Omega + 1) n^\lambda$.

- a) Si $\Lambda \geq e$, on choisit $R = \Lambda$ et on majore $n \nmid 2^{n+1}$ par $4n^n$ et $4 \frac{\Lambda}{\Lambda-1}$ par e^2 :

$$n^\lambda \sigma < n^n e^{2(R+1)}$$

$$\sigma < \frac{n}{\lambda} + \frac{2(1+n^\lambda)}{\lambda \operatorname{Log} n} (1 + \rho \Omega) .$$

- b) Si $\Lambda < e$, on choisit $R = \rho \Omega + (\rho \Omega + 1) e$. On majore de même $n \nmid 2^{n+1} \frac{R}{R-1}$ par $n^n e^2$:

$$e^\sigma < n^n e^{2(\rho \Omega + 1)(e+1)} ,$$

d'où :

$$\sigma < n \operatorname{Log} n + 2(1+e) (1 + \rho \Omega) .$$

Comme $\Lambda < e$, on a $n^\lambda < e$, donc $1+e < \frac{1+n^\lambda}{\lambda \operatorname{Log} n}$.

D'où :

$$\sigma < \frac{n}{\lambda} + 2 \frac{1+n^\lambda}{\lambda \operatorname{Log} n} (1 + \rho \Omega) ,$$

d'où le corollaire.

Remarque : Si $1 + \rho \Omega < n$, le corollaire montre que l'on a :

$$\sigma < \frac{1}{\lambda} \left(n + \frac{4n}{\operatorname{Log} n} \right) \text{ avec}$$

$$\lambda = 1 - \frac{\operatorname{Log}(1 + \rho \Omega)}{\operatorname{Log} n}$$

ce qui améliore l'énoncé de Spira [16] .

Remarque : La majoration obtenue pour le nombre de zéros est indépendante du centre du disque. En effet, en effectuant le changement de variable $t = z - z_0$, nous avons à étudier les zéros de la fonction :

$$t \rightarrow \sum_{h=1}^{\ell} c_h(t) e^{\omega_h t},$$

dans le disque $|t| \leq \rho$, avec :

$$c_h(t) = \sum_{j=1}^{p_h} b_{h,j} e^{\omega_h z_0} (t + z_0)^{j-1}.$$

Il suffit donc d'étudier le cas $z_0 = 0$. Nous allons tout d'abord étudier l'ordre du zéro $z = 0$ de f .

§.2 - CALCUL D'UN DETERMINANT.

Soient $\omega_1, \dots, \omega_\ell$ des nombres complexes, $p_1, \dots, p_\ell$ des nombres entiers positifs, et $n = p_1 + \dots + p_\ell$. Soit Δ le déterminant de la matrice :

$$(3) \quad \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} z^{j-1} e^{\omega_i z} \right]_{z=0} = \left[\frac{(m-1)!}{(m-j)!} \omega_j^{m-1} \right] = \left[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} z^{m-1} \right]_{z=\omega_j}$$

où m est l'indice de ligne, $1 \leq m \leq n$, et (i, j) est l'indice de colonne, $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq p_i$. (On convient que $\frac{(m-1)!}{(m-j)!} = (m-1) \dots (m-j+1)$ est nul si $j > m$). On a alors :

$$(4) \quad \Delta = \pm \begin{pmatrix} \overline{\overline{\overline{\ell}}} & \overline{\overline{\overline{p_i-1}}} \\ \overline{\overline{\overline{i=1}}} & \overline{\overline{\overline{s=0}}} \end{pmatrix} s! \times \overline{\overline{\overline{i < j}}} (\omega_i - \omega_j)^{p_i p_j}.$$

On en déduit en particulier que l'ordre de multiplicité du point $z = z_0$ comme zéro de la fonction (1) définie par les hypothèses de la proposition, est inférieur à n . Par conséquent, f n'est pas identiquement nul.

COROLLAIRE. - Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants, les fonctions $z, e^{\alpha_1 z}, \dots, e^{\alpha_m z}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

$$\text{Soit (3) } \Delta(\omega_1, \dots, \omega_\ell) = \det \left[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} z^{m-1} \Big|_{z=\omega_i} \right] \quad \begin{matrix} 1 \leq m \leq n ; \\ (i, j), m \quad 1 \leq j \leq p_i, 1 \leq i \leq \ell . \end{matrix}$$

Soit $\Psi(z) = \Delta(z, \omega_1, \dots, \omega_\ell)$, et soit s un entier tel que $\Psi^{(s)}(\omega_2) \neq 0$.

Nous allons montrer que $s \geq p_1 p_2$.

En effet, $\Psi^{(s)}(z)$ est somme de déterminants $D_1, \dots, D_{p_1}$, où D_j ($1 \leq j \leq p_1$) est obtenu en remplaçant la j ième ligne L_j de $\Psi(z)$ par sa dérivée d'ordre σ_j , avec $\sigma_1 + \dots + \sigma_{p_1} = s$.

Nous écrivons :

- d'une part, que les lignes L_j et L_k de $\Psi^{(s)}(\omega_2)$ sont distinctes pour $j \neq k$, soit :

$$\sigma_j + j \neq \sigma_k + k \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq p_1 \\ 1 \leq k \leq p_1 \quad k \neq j \end{matrix}$$

- d'autre part, que la ligne L_j de $\Psi^{(s)}(\omega_2)$ n'est pas égale à la ligne L_k de $\Psi^{(s)}(\omega_2)$, pour $1 \leq j \leq p_1$ et $p_1 + 1 \leq k \leq p_1 + p_2$, soit :

$$\sigma_k > p_2 - k \quad 1 \leq k \leq p_1 ;$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{p_1} (\sigma_k + k) \geq p_2 + 1 + \dots + p_2 + p_1 .$$

D'où :

$$s = \sum_{k=1}^{p_1} \sigma_k \geq p_1 p_2 .$$

On en déduit que $\Psi(z)$ est divisible par le polynôme $\prod_{i=2}^{\ell} (z - \omega_i)^{p_1 p_i}$, qui est

de degré $\sum_{i=2}^{\ell} p_1 p_i = p_1(n - p_1)$. Or, le degré de $\Psi(z)$ est au plus $p_1(n - p_1)$.

Donc, il existe une constante $k_{p_1, \dots, p_\ell}$, ne dépendant pas de $w_1, \dots, w_\ell$, telle que :

$$\Delta(w_1, \dots, w_\ell) = k_{p_1, \dots, p_\ell} \times \prod_{i < j} (w_i - w_j)^{p_i p_j}.$$

Pour calculer la constante $k_{p_1, \dots, p_\ell}$, on étudie le premier terme dans l'ordre lexicographique des deux membres. On constate alors qu'il existe des entiers $q_1, \dots, q_\ell$ tels que :

$$k_{p_1, \dots, p_\ell} = \pm \prod_{j=1}^{\ell} \delta_{q_j, p_j} \quad \text{où}$$

$$\delta_{q, p} = \det \left| \frac{(q+i)!}{(q+i-j)!} \right| \quad \begin{matrix} 0 \leq i \leq p-1 \\ 0 \leq j \leq p-1 \end{matrix};$$

où i est l'indice de colonne, et j l'indice de ligne. En retranchant la i ème colonne de la $(i+1)$ ème, $1 \leq i \leq p-1$, la relation :

$$\frac{(q+i)!}{(q+i-j)!} - \frac{(q+i-1)!}{(q+i-j-1)!} = \frac{(q+i-1)!}{(q+i-j)!} \cdot j$$

montre que l'on a :

$$\delta_{q, p} = (p-1)! \delta_{q, p-1}.$$

Comme $\delta_{q, 1} = 1$, on a par récurrence :

$$\delta_{q, p} = \prod_{s=0}^{p-1} s!$$

donc $\delta_{q, p}$ ne dépend pas de q .

D'où :

$$k_{p_1, \dots, p_\ell} = \pm \prod_{j=1}^{\ell} \prod_{s=0}^{p_j-1} s!.$$

Remarque : Les méthodes développées dans [14] et [15] permettent d'évaluer Δ ainsi que ses cofacteurs.

§. 3 - LEMME 3.

Soit F une fonction entière sur $\mathbb{C}$, non identique à zéro, et soit σ le nombre de zéros de F dans le disque $|z| \leq \rho$, comptés avec leur ordre de multiplicité. Pour tout entier $s \geq 0$ et tout réel $R > \rho$, $R > 1$, on a :

$$(5) \quad |F^{(s)}(0)| \leq s! \frac{R}{R-1} \left(\frac{\rho+1}{R-\rho} \right)^\sigma \max_{|\xi|=R} |F(\xi)|.$$

Démonstration du lemme 3.

Soient $\beta_1, \dots, \beta_\ell$ les zéros de F , $r_1, \dots, r_\ell$ leur ordre, avec $\sigma = \sum_{i=1}^{\ell} r_i$. La fonction :

$$g(z) = F(z) \times \prod_{i=1}^{\ell} (z - \beta_i)^{-r_i}$$

est entière sur $\mathbb{C}$, donc :

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

d'après la formule de Cauchy. D'autre part :

$$F^{(s)}(0) = \frac{s!}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{F(z)}{z^{s+1}} dz,$$

pour tout entier $s \geq 0$. D'où :

$$F^{(s)}(0) = \frac{s!}{(2i\pi)^2} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^{s+1}} \left[\int_{|\xi|=R} \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{z - \beta_i}{\xi - \beta_i} \right)^{r_i} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi \right] dz.$$

Or, pour $|\xi| = R$ et $|z| = 1$, on a :

$$|\xi - z| \geq R - 1, \quad |\xi - \beta_i| \geq R - \rho \quad \text{et} \quad |z - \beta_i| \leq \rho + 1.$$

D'où la relation (5).

Ainsi, pour majorer σ , il suffit de minorer $|F^{(s)}(0)|$ en

fonction de $\max_{|\xi|=R} |F(\xi)|$.

§. 4 - LEMME DE VAN DER POORTEN.

Le lemme suivant est un cas particulier d'un lemme de Van der Poorten [14], [15] .

LEMME 4. - Soient $b_1, \dots, b_n$ des nombres complexes, $g_1, \dots, g_n$ des fonctions analytiques dans un domaine G du plan complexe, et

$$F(z) = \sum_{k=1}^n b_k g_k(z) \quad .$$

Soient $z_1, \dots, z_n$ des points de G , $s_1, \dots, s_n$ des nombres entiers positifs ou nuls, et $\Delta_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq n$) le cofacteur de $g_j^{(s_i)}(z_i)$ dans le déterminant :

$$\Delta = |g_j^{(s_i)}(z_i)|_{1 \leq i, j \leq n} \quad .$$

Alors on a, pour tout $u \in G$,

$$\max_{1 \leq \mu \leq n} \left| F^{(s_\mu)}(z_\mu) \right| \cdot \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n f_k(u) \Delta_{i,k} \right| \geq |\Delta| \cdot |F(u)| \quad .$$

Démonstration :

Considérons les n équations linéaires en $b_1, \dots, b_n$:

$$\sum_{k=1}^n b_k g_k^{(s_i)}(z_i) = F^{(s_i)}(z_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad .$$

Les formules de Cramer donnent :

$$b_k \Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_{i,k} F^{(s_i)}(z_i) \quad 1 \leq k \leq n \quad .$$

D'où :

$$\Delta F(u) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \Delta_{i,k} f_k(u) \right) F_i^{(s_i)}(z_i) .$$

Le lemme en découle immédiatement.

§. 5 - FORMULE D'INTERPOLATION.

Soient $z_0, \dots, z_n$, t des nombres complexes, distincts ou non. Soit z un nombre complexe, $z \neq t$ et $z \neq z_i$ pour tout $i = 0, \dots, n$.

En écrivant l'identité :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-z_k} + \frac{t-z_k}{z-z_k} \times \frac{1}{z-t}$$

pour $k = 0, \dots, n$, on obtient l'identité :

$$(6) \quad \frac{1}{z-t} = \sum_{\ell=0}^n \frac{\overline{\prod_{k \leq \ell} (t-z_k)}}{\overline{\prod_{h \leq \ell} (z-z_h)}} + \frac{\overline{\prod_{k \leq n} (t-z_k)}}{(z-t) \overline{\prod_{k \leq n} (z-z_k)}} .$$

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, borné, simplement connexe, contenant $z_0, \dots, z_n$, t , de frontière Γ .

Soit f une fonction entière dans D . En multipliant (6) par $\frac{1}{2i\pi} f(z)$ et en intégrant pour $z \in \Gamma$, on obtient :

$$f(t) = \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \frac{\overline{\prod_{k \leq \ell} (t-z_k)}}{\overline{\prod_{k \leq \ell} (z-z_k)}} + R_n(t)$$

où :

$$(7) \quad a_{\ell} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{\overline{\prod_{h \leq \ell} (z-z_h)}} \quad 0 \leq \ell \leq n ,$$

et :

$$R_n(t) = \frac{\overline{\prod_{k \leq n} (t-z_k)}}{\overline{\prod_{k \leq n} (z-z_k)}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-t) \overline{\prod_{h \leq n} (z-z_h)}} .$$

Remarque : Dans le cas où $z_0, \dots, z_n$ sont deux à deux distincts, on en déduit que le seul polynôme de degré $\leq n$ vérifiant les $n+1$ conditions :

$$P(z_k) = f(z_k) \quad 0 \leq k \leq n$$

est défini par :

$$(8) \quad P(t) = \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \prod_{k < \ell} \overline{(t-z_k)}$$

où a_{ℓ} est défini par (7).

Dans le cas où l'ensemble des points z_k , $0 \leq k \leq n$, est identique à l'ensemble des points $y_1, \dots, y_1, y_{\nu}, \dots, y_{\nu}$, où y_{ℓ} est répété p_{ℓ} fois, avec $\sum_{\ell=1}^{\nu} p_{\ell} = n+1$, et $y_i \neq y_j$ pour $i \neq j$, on en déduit que le polynôme :

$$(8)' \quad P(t) = \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \prod_{k < \ell} \overline{(t-z_k)} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \sum_{r=0}^{p_{\lambda+1}-1} a_{p_1+\dots+p_{\lambda}+r} \cdot \prod_{i=1}^{\lambda} \overline{(t-y_i)}^{p_i} \cdot (t-y_{\lambda+1})^r,$$

où a_{ℓ} est défini par (4), c'est-à-dire :

$$(7)' \quad a_{p_1+\dots+p_{\lambda}+r} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{\prod_{i=1}^{\lambda} \overline{(t-y_i)}^{p_i} (t-y_{\lambda+1})^{r+1}}$$

est un polynôme de degré $\leq n$ vérifiant les $n+1$ conditions :

$$(9) \quad P^{(s)}(y_k) = f^{(s)}(y_k) \quad \begin{matrix} 0 \leq s \leq p_k-1 \\ 1 \leq k \leq \nu \end{matrix}.$$

En effet, on a :

$$\left. \frac{d^s}{dz^s} \prod_{k \leq n} \overline{(t-z_k)} \right|_{z=z_h} = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} 0 \leq s \leq p_h-1 \\ 1 \leq h \leq \nu \end{matrix}.$$

Donc :

$$R_n^{(s)}(y_h) = 0, \text{ d'où (7).}$$

D'autre part, si deux polynômes P_1 et P_2 vérifient les $n+1$ conditions (9) et ont un degré $\leq n$, leur différence est un polynôme de degré $\leq n$ ayant $n+1$ racines (comptées avec leur ordre de multiplicité), donc $P_1 = P_2$.

Résumons ces résultats en un lemme :

LEMME 5. - Soient $p_1, \dots, p_v$ des nombres entiers positifs,
 $n = (\sum_{k=1}^v p_k) - 1$. Soient $y_1, \dots, y_v$ des nombres complexes deux à deux distincts.
Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, borné, simplement connexe, contenant
 $y_1, \dots, y_v$, de frontière Γ . Soit f une fonction entière dans D . Alors il
existe un polynôme et un seul dans $\mathbb{C}[X]$, de degré inférieur ou égal à n ,
vérifiant les $(n+1)$ conditions :

$$(9) \quad P^{(s)}(y_k) = f^{(s)}(y_k) \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} 0 \leq s \leq p_k - 1 \\ 1 \leq k \leq v \end{matrix}.$$

Ce polynôme P est déterminé par les relations :

$$(8)' \quad P(t) = \sum_{\lambda=0}^{v-1} \sum_{r=0}^{p_{\lambda+1}-1} a_{p_1+\dots+p_{\lambda}+r} \left(\prod_{i=1}^{\lambda} (t-y_i)^{p_i} \right) (t-y_{\lambda+1})^r,$$

$$(7)' \quad a_{p_1+\dots+p_{\lambda}+r} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{\left(\prod_{i=1}^{\lambda} (t-y_i)^{p_i} \right) (t-y_{\lambda+1})^{r+1}} \quad \begin{matrix} 0 \leq \lambda \leq v-1 \\ 0 \leq r \leq p_{\lambda+1}-1 \end{matrix}$$

§. 6. DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION

Le cofacteur $\Delta_{(i,j),\ell}$ de $\frac{(\ell-1)!}{(\ell-j)!} \omega_i^{\ell-1}$ dans le déterminant :

$$(3) \quad \Delta = \left[\frac{d^{\ell-1}}{dz^{\ell-1}} z^{j-1} e^{\omega_i z} \right]_{z=0} = \left[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} z^{\ell-1} \right]_{z=\omega_i}$$

vérifie les relations :

$$\sum_{\ell=1}^n \Delta_{(i,j),\ell} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} z^{\ell-1} \right]_{z=\omega_h} = \Delta \times \delta_{(i,j), (h,k)}$$

où
$$\delta_{(i,j), (h,k)} = \begin{cases} = 1 & \text{si } (i,j) = (h,k) , \\ = 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Donc, le polynôme :

$$\sum_{k=1}^n \Delta_{(i,j), k} z^{k-1} = Q_{i,j}(z)$$

vérifie les n relations :

$$Q_{i,j}^{(k-1)}(w_h) = \Delta \delta_{(i,j), (h,k)} \quad \begin{matrix} 1 \leq h \leq \ell \\ 1 \leq k \leq p_h \end{matrix} .$$

Donc le polynôme :

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_i} u^{j-1} e^{w_i u} Q_{i,j}(z) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k z^{k-1} , \end{aligned}$$

où a_k est défini par :

$$a_k = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_i} \Delta_{(i,j), k} u^{j-1} e^{w_i u} ,$$

vérifie les relations :

$$\begin{aligned} (10) \quad P^{(k-1)}(w_h) &= \Delta u^{k-1} e^{w_h u} \\ &= \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (\Delta e^{uz}) \right]_{z=w_h} \quad \begin{matrix} 1 \leq h \leq \ell \\ 1 \leq k \leq p_h \end{matrix} . \end{aligned}$$

Ecrivons le polynôme P sous la forme :

$$P(z) = \sum_{k=1}^n C_k \prod_{h \leq k} (z - \alpha_h)$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (w_1, \dots, w_1, \dots, w_\ell, \dots, w_\ell)$, w_h étant écrit p_h fois .

Autrement dit, étant donné un entier s avec $1 \leq s \leq n$, il existe deux entiers λ et r , uniques, $1 \leq \lambda \leq n$, $1 \leq r \leq p_\lambda$, tels que :

$$s = \sum_{i=1}^{\lambda-1} p_i + r .$$

On pose alors :

$$\alpha_s = w_\lambda .$$

On a alors, d'après la formule d'interpolation (7)' du lemme 5, et d'après (10) :

$$(11) \quad C_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Delta e^{u\gamma}}{\prod_{\ell \leq k} (\gamma - \alpha_{\ell})} d\gamma ,$$

où Γ est un cercle $|\gamma| = R_1$ contenant $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($R_1 > \Omega = \sup_{1 \leq h \leq \ell} |w_h|$).

Nous allons établir la relation :

$$(12) \quad \sum_{h=1}^n |a_h| \leq \sum_{k=1}^n |C_k| \overline{\prod_{h < k} (1 + |\alpha_h|)} .$$

Dans le cas où a_h , C_k et $-\alpha_h$ sont tous réels positifs, les deux membres sont égaux à $P(1)$. Dans le cas général, soit :

$$Q(z) = \sum_{k=1}^n |C_k| \overline{\prod_{h < k} (z + |\alpha_h|)} .$$

On a :

$$a_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{dz^i} P(z) \right]_{z=0} = \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^n C_k \left[\frac{d^i}{dz^i} \overline{\prod_{h < k} (z - \alpha_h)} \right]_{z=0}$$

or :

$$\left| \left[\frac{d^i}{dz^i} \overline{\prod_{h < k} (z - \alpha_h)} \right]_{z=0} \right| \leq \left[\frac{d^i}{dz^i} \overline{\prod_{h < k} (z + |\alpha_h|)} \right]_{z=0} .$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leq Q(1) .$$

Soit $\Omega = \max_{1 \leq i \leq \ell} |w_i|$, et $R_1 = \Omega + 1$.

On a, d'après (11) et (12), pour $|x| \leq R$,

$$|C_k| \leq |\Delta| (\Omega + 1) e^{R(\Omega + 1)}, \text{ et } \sum_{i=1}^n |a_i| \leq n (\Omega + 1) e^{R(\Omega + 1)} (\Omega + 1)^n \Delta .$$

Donc, en utilisant le lemme 4, pour la fonction f définie par (1) :

$$|\Delta| \max_{0 \leq s \leq n-1} |f^{(s)}(0)| \geq |\Delta| \max_{|u|=R} |f(u)|_x [n(\Omega + 1)^{n+1} e^{R(\Omega + 1)}]^{-1} .$$

Comme $\Delta \neq 0$, on en déduit :

$$(13) \quad \max_{0 \leq s \leq n-1} |f^{(s)}(0)| \geq \max_{|v|=R} |f(v)| \times [n(\Omega+1)^{n+1} e^{R(\Omega+1)}]^{-1}.$$

On utilise la relation (5) avec $F=f$.

Pour $R > \rho$ et $R > 1$, on a :

$$(14) \quad \left(\frac{R-\rho}{\rho+1} \right)^{\sigma} \leq n! (\Omega+1)^{n+1} \frac{R}{R-1} e^{R(1+\Omega)}.$$

Pour $\Omega = 0$, f est un polynôme et $\sigma \leq n$. Comme $R^n \leq n! e^R$, la relation (2) est vraie. Pour $\Omega > 0$, le nombre σ de zéros, dans le disque $|z| < \rho$, de la fonction $z \rightarrow f(z)$, est égal au nombre de zéros, dans le disque $|z| < \rho\Omega$, de la fonction $z \rightarrow f\left(\frac{z}{\Omega}\right)$, d'où :

$$(2) \quad \left(\frac{R-\rho\Omega}{\rho\Omega+1} \right)^{\sigma} \leq n! 2^{n+1} \frac{R}{R-1} e^{2R} \text{ pour tout } R > \rho\Omega + 1.$$

Remarque : Par une méthode différente, Tijdeman [18] a récemment amélioré cette inégalité en montrant que, pour tous réels $t > 0$ et $s > 1$, on a :

$$\sigma \leq \frac{1}{\text{Log } s} \left[(n-1) \text{Log } \frac{st+s+t}{t} + (st+s+2t)\rho\Omega + \frac{1}{s} \right].$$

En particulier, on a :

$$\sigma \leq 3(n-1) + 4\rho\Omega.$$

D'autre part, si :

$$\varepsilon > 0 \text{ et } \rho\Omega \leq n \exp\left(-\frac{6}{\varepsilon}\right),$$

alors :

$$\sigma \leq n(1+\varepsilon).$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAKER (A.). - A note on the Padé table, Nederl. Akad. Wet. Proc., Ser.A 69 (1966) p. 596-601.
- [2] COATES (J.). - On the algebraic approximation of functions, I, II, III, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Ser.A 69, 4 (1966), p. 421-461 ; IV, id, A 70 (1967) p. 205-212.

- [3] DANCES (S.) et TURAN (P.). - On the distribution of values of a class of entire functions, I, II, Publ. Math. Debrecen 11 (1964), p. 257-272.
- [4] DICKSON (D. G.). - Zeros of exponential sums, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), p. 84-89.
- [5] FEL'DMAN (N. I.). - Estimate for a linear form of logarithms of algebraic numbers, I, Math. U. S. S. R. Sbornik, 5 (1968) p. 291-307 ; II, id, 6 (1968), p. 393-406.
- [6] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers, Dover, New-York (1960).
- [7] GEL'FOND (A. O.). - Calcul des différences finies. Dunod, Paris (1963).
- [8] GEL'FOND (A. O.) et LINNIK (Yu. V.). - Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres. Gauthier-Villars, Paris 1965.
- [9] JAGER (H.). - A multidimensional generalization of the Padé table, I à VI, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., A. 67 (1964), p. 193-249.
- [10] LANGER (S. R. E.). - On the zeros of exponential sums and integrals, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), p. 213-239.
- [11] MAHLER (K.). - Zur approximation der exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II, J. Reine Angew. Math., 166 (1932), p. 118-150.
- [12] MAHLER (K.). - On a class of entire functions. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 18 (1967), p. 83-96.
- [13] PONTRJAGIN (L. S.). - On the zeros of some elementary transcendental functions, Izr. Akad. Nauk. S. S. S. R. Ser. Math. 6 (1942), p. 115-134.
- [14] POORTEN (A. J. Van der). - Generalisation of Turan's main theorems on lower bounds for sums of powers, Bull. Austral. Math. Soc. 2 (1970), p. 15-37.
- [15] POORTEN (A. J. Van der). - A generalisation of Turan's main theorems to binomials and logarithms. Bull. Austral. math. Soc. 2 (1970), p. 183-195.
- [16] SIEGEL (C. L.). - Transcendental numbers. Annals of Math. Studies n° 16 (1949).

- [17] SPIRA (R.). - A lemma in transcendental number theory. Trans. Amer. Math. Soc. 146 (1969), p. 457-464.
- [18] TIJDEMAN (R.). - On the number of zeros of general exponential polynomials. Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser.A (1971), p. 1-7.
- [19] TURAN (P.). - Eine neue methode in der Analysis und deren Anwendungen, Akademiai Kiado, Budapest (1953) (Trad. Angl. Interscience tracts series).
- [20] TURAN (P.). - On the distribution of zeros of general exponential polynomials; Publ. Math. Debrecen 7 (1960), p. 130-136.
- [21] WITTISCH (H.). - Bemerkung zur Wertverteilung von exponentialsummen, Arch. Math. 4 (1953), p. 202-209.

-:-:-:-

U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE