SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

MICHEL MENDÈS FRANCE

Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. nº 11, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A11_0>

LES SUITES A SPECTRE VIDE ET LA REPARTITION MODULO 1

par

Michel MENDES FRANCE

-:-:-:-:-:-

"The Ghost vanishes"
(Macbeth - Shakespeare)

Cet article se compose de trois sections. Dans la première partie, on s'intéresse aux suites $(\lambda_n + n\alpha)$ qui sont équiréparties (mod. 1) pour tout α réel. Dans la deuxième partie, on étudie les suites g-additives introduites par Gel'fond [3] . En combinant les résultats des deux parties, on montre par exemple que la suite $(x\,s([\alpha\, n]))$ est équirépartie (mod. 1) (x irrationnel, $\alpha > 0$ réel, $s(n)$ est la somme des chiffres de l'entier n écrit en base g , $[\,.\,]$ représente la partie entière). Enfin, dans la dernière partie, on donne des résultats complémentaires sur la répatition (mod. 1) liés à la suite $(s(n))$.

I. - SPECTRE D'UNE SUITE

§. 1 - Suites à caractère presque périodique

Soit $\mathbf{M} = (m_n)$ une suite non décroissante d'entiers positifs. Soit $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par :

$$\chi(k) = \operatorname{card} \{ n \in \mathbb{N} \mid m_n = k \} .$$

Si la suite $\mathbf{M}$ est strictement croissante, χ est la fonction caractéristique de $\mathbf{M}$. Dans le cas général, on dit que χ est la fonction caractéristique généralisée de $\mathbf{M}$.

Par définition, la suite $\mathbf{M}$ est dite à caractère pseudo-périodique (c p p) si la fonction caractéristique généralisée est presque périodique non nulle (au sens de Bésicovitch). On rappelle qu'une fonction presque-périodique est un élément de l'adhéren e de l'ensemble des polynômes trignométriques, la topologie étant ici définie par la semi-norme :

$$\| \cdot \| = \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} | \cdot (k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

laquelle est une norme dans un espace quotient convenable (espace $\mathfrak{M}^2$ de Bésicovitch-Marcinkiewicz).

Les propriétés dont nous aurons à nous servir par la suite sont les suivantes :

1. - Si χ est une fonction presque-périodique, alors $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite :

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi(k) \exp 2 i \pi \alpha k = c(\alpha)$$

existe et si de plus χ est une fonction caractéristique généralisée non nulle, on a $c(0) > 0$.

2. - L'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques généralisées presque-périodiques est dense dans l'ensemble des fonctions presque-périodiques.

3. - L'ensemble des fonctions presque-périodiques est fermé dans l'espace $\mathfrak{M}^2$ de Bésicovitch-Marcinkiewicz.

Donnons des exemples de suites à c p p.

Exemple 1 : Soit $\alpha > 0$ un nombre réel. La suite $([\alpha n])$ est à c p p (en particulier, si α est rationnel, la suite est une réunion finie de progressions arithmétiques). Pour voir cela, il suffit de constater que :

$$\chi(k) = -[\{-\frac{k}{\alpha}\} - \frac{1}{\alpha}] ,$$

expression dans laquelle $\{\cdot\}$ désigne la "partie fractionnaire".

Exemple 2 : Soit E une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$ telle que :

$$\sum_{n \in E} \frac{1}{n} < \infty .$$

Soit $\mathbb{M}(E)$ la suite des entiers k qui ne sont divisibles par aucun élément de E . Alors $\mathbb{M}(E)$ est à c p p (en particulier, ceci s'applique au cas où E est l'ensemble des carrés, auquel cas $\mathbb{M}(E)$ est la suite des entiers "quadratfrei"). Montrons en effet que $\mathbb{M}(E)$ est à c p p. Soit A un entier, soit $E(A) = E \cap [0, A]$ et soit respectivement χ et χ_A les fonctions caractéristiques de $\mathbb{M}(E)$ et $\mathbb{M}(E(A))$. χ_A est périodique.

Montrons alors que $\|\chi - \chi_A\|$ tend vers 0 avec $\frac{1}{A}$, ce qui, en vertu de la propriété 3 précédente établit que χ est presque-périodique. On a :

$$\|\chi - \chi_A\|^2 = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\chi(k) - \chi_A(k)|^2$$

$$= \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin \mathbb{M}(E) \\ k \in \mathbb{M}(E(A))}} 1$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{u\in E\\ u>A}} \frac{n}{u}$$

$$\leq \sum_{\substack{u\in E\\ u\geq A}} \frac{1}{u}$$

Cette quantité tend vers 0 quand A croît indéfiniment CQFD.
Ce dernier exemple m'a été communiqué par BESINEAU.

§. 2 - Spectre d'une suite.

Soit $\Lambda = (\lambda_n)$ une suite infinie de nombres réels. On appelle spectre de Λ $(sp(\Lambda))$ l'ensemble des nombres réels α tels que la suite $\Lambda + \alpha\mathbb{N} = (\lambda_n + n\alpha)$ ne soit pas équirépartie (mod. 1). L'ensemble $sp(\Lambda)$ est donc périodique, de période 1. Son complémentaire est l'ensemble des nombres réels β tels que pour tout entier $q \neq 0$, on ait :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi q(\lambda_k + k\beta) = 0.$$

En désignant par $c_n(\beta)$ l'expression sous le signe lim, on voit facilement que

$$\int_0^1 |c_n(\beta)|^2 \, d\beta$$

tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, suffisamment rapidement pour pouvoir affirmer que $c_n(\beta)$ tend vers 0 presque partout.

Il s'ensuit que $sp(\Lambda)$ est de mesure nulle. Un cas particulièrement intéressant est celui où $sp(\Lambda)$ est vide. On a en effet le théorème suivant :

THEOREME 1 : Soit $\Lambda = (\lambda_n)$ une suite infinie de nombres réels. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) le spectre de Λ est vide,

(ii) <u>Pour toute suite d'entiers non décroissante</u> $\mathbb{M} = (m_n)$ <u>à cpp</u>, <u>la suite</u> $\Lambda_{\mathbb{M}} = (\lambda_{m_n})$ <u>est équirépartie</u> (<u>mod. 1</u>).

En effet, montrons que la condition (i) implique la condition (ii). Soit Λ une suite à spectre vide et soit $\mathbb{M} = (m_n)$ une suite à cpp. On considère la somme de Weyl :

$$\sigma_n = \sigma_n(\ell) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp 2i\pi \ell \lambda_{m_k} \quad , (\ell \in \mathbb{Z}^*)$$

relative à la suite $\Lambda_{\mathbb{M}}$.

On a successivement :

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(k) \exp 2i\pi \ell \lambda_k$$

$$= \frac{m_n}{n} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(k) \exp 2i\pi \ell \lambda_k$$

où χ est la fonction caractéristique généralisée associée à $\mathbb{M}$. Soit θ un polynôme trigonométrique. On a :

$$\sigma_n = \frac{m_n}{n} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} \theta(k) \exp 2i\pi \ell \lambda_k$$

$$+ \frac{m_n}{n} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} (\chi(k) - \theta(k)) \exp 2i\pi \ell \lambda_k \ .$$

Comme $\mathbb{M}$ est à cpp , $\frac{m_n}{n}$ tend vers une limite finie A quand n croît indéfiniment (propriété 1 du §. 1). Comme $sp(\Lambda) = \emptyset$, le premier terme du second membre de la formule tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. L'inégalité de Schwarz appliquée au second terme montre alors que :

$$\limsup_{n \to \infty} \sigma_n \leq A \| \chi - \theta \| \ .$$

La quantité $\|\chi - \theta\|$ pouvant être rendue arbitrairement petite, on en conclut que σ_n tend vers 0.

Pour démontrer que la condition (ii) implique la condition (i), on effectue un raisonnement tout-à-fait analogue en approchant la fonction : $\varphi_\alpha(n) = \exp 2\, i \pi\, \alpha\, n$ par une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques généralisées presque-périodiques. CQFD

Il est facile de construire des suites Λ à spectre vide. Par exemple, si :

$$f(X) = a_\nu X^\nu + a_{\nu-1} X^{\nu-1} + \ldots + a_1 X + a_o \qquad (\nu \geq 2)$$

est un polynôme réel dont l'un des coefficients au moins $a_2, a_3, \ldots, a_\nu$ est irrationnel, alors la suite $(f(n))$ vérifie la propriété. On en déduit par exemple que la suite $(\sqrt{2}\,[\alpha\, n]^2)$ est équirépartie (mod. 1) pour tout $\alpha > 0$. On verra d'ailleurs, dans la suite de l'article d'autres exemples.

Ajoutons, pour conclure cette partie que <u>presque toutes les suites</u> $\Lambda \in (\mathbb{R}/_Z)^{\mathbb{N}}$ <u>ont un spectre vide</u> (le tore est supposé muni de la mesure de Haar). En effet, si :

$$n \xmapsto{\varphi_\Lambda} \exp 2\, i \pi \ell \lambda_n \qquad (\ell \in \mathbb{Z}^*)$$

est une fonction pseudo-aléatoire, alors il en est de même de la fonction :

$$n \longmapsto \exp 2\, i \pi \ell (\lambda_n + \alpha\, n) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Or, une fonction pseudo-aléatoire est de moyenne nulle, donc $sp(\Lambda) = \emptyset$. Cette remarque, associée au fait que presque toutes les suites Λ sont telles que φ_Λ est pseudo-aléatoire (voir [5]) prouve l'assertion.

II. - FONCTIONS g-ADDITIVES

§. 1 - Définition et caractérisation.

Lors de sa visite à Paris en Octobre 1966, GEL'FOND a défini la notion de fonction g-additive [3]. Soit $g \geq 2$ un entier fixé. Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est g-additive si f vérifie l'égalité :

$$f(k\,g^a + b) = f(k\,g^a) + f(b) \qquad (1)$$

pour tous entiers, a, k, b tels que $a \geq 0$, $k \geq 0$, $0 \leq b \leq g^a - 1$. Ainsi, par exemple, la fonction $f(n) = n$ est g-additive (il est amusant de constater que si une fonction est à la fois g-additive et h-additive où $\frac{\operatorname{Log} g}{\operatorname{Log} h}$ est irrationnel alors f est nécessairement linéaire : $f(n) = an$). Un autre exemple de fonction g-additive est la fonction s qui à l'entier n fait correspondre la somme des chiffres de n écrit en base g. Cette fonction sera d'ailleurs étudiée plus particulièrement dans la troisième partie.

Nous adopterons les notations suivantes. Soit n un entier non négatif. On écrit n en base g :

$$n = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n)\, g^p .$$

Les nombres $e_p(n)$ sont des entiers $0 \leq e_p(n) \leq g-1$ tous nuls pour $p \geq \left[\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} g}\right] + 1$. On considérera e_p comme une application de $\mathbb{N}$ sur $G = \{0, 1, \dots, g-1\}$. Soient $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p, \dots$ des applications réelles $G \to \mathbb{R}$ telles que pour tout indice p, on ait $\varphi_p(0) = 0$. Il est clair que :

$$f_\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p$$

est alors une fonction g-additive. On a en fait le théorème suivant :

THEOREME 2 : Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est g-additive si et seulement si il existe une suite infinie de fonctions réelles $\varphi_o , \varphi_1 , \ldots$ définies sur $G = \{0, 1, \ldots, g-1\}$, nulles en 0 et vérifiant :

$$f = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p .$$

Preuve : A cause de ce qui a été dit précédemment, il suffit de montrer que si f est g-additif, alors il existe des fonctions $\varphi_o , \varphi_1 , \ldots$ définies sur G, nulles en 0 et telles que $f = \Sigma\, \varphi_p \circ e_p$.

La fonction f étant g-additive, on voit en effet que :

$$f\Big(\sum_{p=0}^{\infty} e_p(n)\, g^p\Big) = \sum_{p=0}^{\infty} f(e_p(n)\, g^p).$$

On pose, pour $p \in \mathbb{N}$ et $a \in G$,

$$\varphi_p(a) = f(a\, g^p).$$

Il est alors immédiat de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p\,(e_p(n)) \qquad \text{CQFD.}$$

/ §.2 - Propriétés de moyennes. /

La technique que nous adoptons ici pour calculer la moyenne d'une fonction $n \mapsto \exp 2i\pi f(n)$ est assez voisine de la technique de GEL'FOND dans [3] ; toutefois nous pensons utile d'exposer en détail notre méthode qui semble d'ailleurs fournir des résultats un peu plus généraux.

THEOREME 3 : Soit f une fonction g-additive réelle :

$$f = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p .$$

On a alors l'égalité :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi f(k) \right| = \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right| .$$

Démontrons le théorème. A étant un ensemble arbitraire, on définit l'opérateur de translation $\tau : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ par :

$$(a_o, a_1, a_2, \ldots) \overset{\tau}{\mapsto} (a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

On note par τ^{ν} la translation d'ordre ν ($\tau^{\nu} = \tau \circ \tau^{\nu-1}$).

Ceci étant, soit :

$$f = f_{\varphi} = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p .$$

une fonction g-additive. On vérifie immédiatement que pour tout $a \in G = \{0, 1, \ldots, g-1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{\varphi}(gn + a) = \varphi_o(a) + f_{\tau\varphi}(n) \qquad (2).$$

Posons

$$\sigma_{\varphi}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi f_{\varphi}(k) .$$

On a successivement et compte tenu de (2) :

$$\sigma_{\varphi}(gn) = \sum_{k=0}^{gn-1} \exp 2i\pi f_{\varphi}(k)$$

$$= \sum_{a=0}^{g-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \exp 2i\pi f_{\varphi}(g\ell + a)$$

$$= \sum_{a=0}^{g-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \exp 2i\pi (f_{\tau\varphi}(\ell) + \varphi_o(a)).$$

Divisons les deux membres de l'égalité par gn et prenons la limite supérieure quand n croît indéfiniment. En posant :

$$\mathfrak{M}(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi f(k) \right| ,$$

on obtient :

$$\mathfrak{M}(f_\varphi) = \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_o(a) \right| \mathfrak{M}(f_{\tau\varphi}) .$$

En itérant cette égalité, il vient :

$$\mathfrak{M}(f_\varphi) = \left(\prod_{p=0}^{\nu-1} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right| \right) \mathfrak{M}(f_{\tau^\nu \varphi}) . \qquad (3)$$

Enfin, une moyenne d'exponentielle réelle étant majorée par 1, on obtient :

$$\mathfrak{M}(f_\varphi) \leq \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right| . \qquad (4)$$

Montrons à présent l'inégalité en sens inverse. On vérifie directement la relation suivante :

$$\frac{1}{g^n} \sum_{k=0}^{g^n-1} \exp 2i\pi f_\varphi(k) = \prod_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{g} \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right) .$$

d'où il suit :

$$\mathfrak{M}(f_\varphi) \geq \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right| . \qquad \text{CQFD.}$$

/§. 3 - Application à la répartition (mod. 1)/

Le théorème 3 permet de démontrer le résultat suivant :

<u>THEOREME 4 :</u> <u>Soit</u> $\varphi : \{0, 1, \ldots, g-1\} \to \mathbb{R}$ <u>une application dont une valeur au moins est irrationnelle et telle que</u> $\varphi(0) = 0$. <u>Soit</u> f_φ <u>la suite dont le</u> n^e <u>terme est</u> :

$$f_\varphi(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi(e_p(n)).$$

<u>Alors le spectre de</u> f_φ <u>est vide</u>. <u>En particulier, la suite</u> f_φ <u>est équirépartie</u> (mod. 1) .

<u>Preuve</u> : Soit $\ell \neq 0$ un entier et soit :

$$c(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi\ell(f_\varphi(k) + \alpha k) \right| .$$

Le théorème découle du fait que $c(\alpha) = 0$ pour tout α. C'est cette égalité que nous allons nous efforcer de montrer. D'après le théorème 3, on a :

$$c(\alpha) = \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi\ell(\varphi(a) + a\alpha g^p) \right|$$

Supposons, par l'absurde, que le produit infini converge pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ au moins. Alors pour tout $a \in G = \{0, 1, \ldots, g-1\}$, on a :

$$\lim_{p\to\infty} (\ell\varphi(a) + \ell\alpha a g^p) = 0 \qquad (\text{mod. } 1) ,$$

soit encore :

$$\ell\alpha a g^p \to -\ell\varphi(a) \qquad (\text{mod. } 1).$$

Or, si x est un nombre réel, la suite $(x g^p)$ ne peut tendre vers une limite L que si $L = 0$.

Mais par hypothèse, il existe au moins une valeur de $a \in G$ pour laquelle $\varphi(a) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Cette contradiction prouve le théorème. CQFD.

<u>Exemple d'application</u> : Soit d un entier non négatif (resp. un réel positif non entier). Soit $s^d(n)$ la somme des puissances d^e des chiffres du nombre n (avec la convention $0^d = 0$ pour tout $d \geq 0$) :

$$s^d = \sum_{p=0}^{\infty} (e_p)^d .$$

Soit enfin $\mathbb{M} = (m_n)$ une suite d'entiers non décroissante à cpp. Alors, d'après les théorèmes 1 et 4, la suite $(x\, s^d(m_n))$ est équirépartie (mod. 1) si et seulement si x est irrationnel (resp. non nul pour $g \geq 3$. Pour $g = 2$, $s^d = s$ et on retombe dans le premier cas).

Ce résultat contient en particulier ($d = 1$) des énoncés de Bésineau [2] et Gel'fond [3].

III - COMPLEMENTS SUR LA SOMME DES CHIFFRES.

/ §. 1 - Les corrélations multiples. /

Soit φ une application définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers non négatifs, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soient $p = (p_o, p_1, \dots, p_{\nu-1}) \in \mathbb{N}^\nu$ et $q = (q_o, q_1, \dots, q_{\mu-1}) \in \mathbb{N}^\mu$ deux suites d'entiers non négatifs ($\nu \geq 1$ et $\mu \geq 1$ sont des entiers donnés). On appelle corrélation multiple de φ la quantité

$$\gamma_\varphi(p\,;\,q) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{\nu-1} \overline{\varphi}(k+p_j) \prod_{j=0}^{\mu-1} \varphi(k+q_j) \right| .$$

Dans cette section, nous nous intéressons plus particulièrement aux corrélations multiples de la fonction :

$$n \mapsto \exp 2i\pi a\, s(n) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

où $s(n) = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n)$ représente la somme des chiffres de n écrit en base g.
A vrai dire, nous allons étudier une expression qui généralise la corrélation

multiple. Soit $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu-1}) \in \mathbb{R}^\nu$. On pose :

$$t(n) = t_\alpha(n,p) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j\, s(n+p_j) .$$

Soit par ailleurs f une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et désignons par A une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit les deux quantités :

$$\delta(p,f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi(t_\alpha(k,p) + f(k)) \right|$$

et :

$$\delta(p,A) = \sup_{f\in A} \delta(p,f) .$$

Soit à nouveau $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note pour $f_{g,j}$ l'application $f_{g,j}(k) = f(gk+j)$, ($g \geq 2$ représente toujours un entier fixé une fois pour toute). On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est adaptée si $f \in A \Rightarrow f_{g,j} \in A$ pour $j = 0, 1, \ldots, g-1$. Par exemple, $A = \{0\}$, $A = \mathbb{R}[X]$, $A = Q[X]$, ... sont des ensembles adaptés.

Nous montrons, dans cette partie le théorème suivant :

THEOREME 5 : Soit $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un ensemble adapté. Soit 0_ν l'origine dans $\mathbb{R}^\nu$. On a alors l'implication suivante :

$$\delta(0_\nu, A) = 0 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}^\nu, \quad \delta(p,A) = 0.$$

On en déduira les conséquences suivantes :

Corollaire 1 : Supposons que $a = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j$ soit irrationnel. Alors la suite $\Lambda = (\lambda_n)$ où :

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j\, s(n+p_j)$$

est à spectre vide. En particulier, la suite est équirépartie (mod. 1).

Corollaire 2 : Soit f un polynôme à coefficients rationnels. Alors la suite $x(f(n)+s(n))$ est équirépartie (mod. 1) si et seulement si x est irrationnel.

/ §.2 - Démonstration du théorème 5 /

Afin d'alléger l'écriture, on supposera $g = 2$. Soit :

$\varepsilon = (\varepsilon_o, \ldots, \varepsilon_{\nu-1}) \in \{0,1\}^{\nu}$ et soit $\alpha = (\alpha_o, \ldots, \alpha_{\nu-1}) \in \mathbb{R}^{\nu}$. On pose :

$$a = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j ,$$

$$u = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j \varepsilon_j ,$$

$$v = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j (1-\varepsilon_j) .$$

$p = (p_o, \ldots, p_{\nu-1})$ étant une suite d'entiers non négatifs, on considère l'expression :

$$t_{\alpha}(k, 2p+\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j\, s(k + 2p_j + \varepsilon_j) .$$

Les deux formules élémentaires

$$\begin{cases} s(2n) = s(n) \\ s(2n+1) = 1 + s(n) \end{cases}$$

conduisent aux formules

$$\begin{cases} t_{\alpha}(2k, 2p+\varepsilon) = u + t_{\alpha}(k, p) \\ t_{\alpha}(2k+1, 2p+\varepsilon) = v + t_{\alpha}(k, p+\varepsilon). \end{cases}$$

Posons :

$$\sigma(n,p,f) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi\,(t_\alpha(k,p) + f(k))$$

où f est une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui appartient à un ensemble adapté A, c'est-à-dire telle que les deux fonctions :

$$k \overset{f_o}{\mapsto} f(2k)$$

$$k \overset{f_1}{\mapsto} f(2k+1)$$

soient dans A. Les relations de récurrences précédentes permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
\sigma(2n, 2p+\varepsilon, f) &= \sum_{k=0}^{2n-1} \exp 2i\pi\,(t_\alpha(k, 2p+\varepsilon) + f(k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi\,(t_\alpha(2k, 2p+\varepsilon) + f(2k)) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi\,(t_\alpha(2k+1, 2p+\varepsilon) + f(2k+1)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi\,(t_\alpha(k,p) + f_o(k) + u) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi\,(t_\alpha(k, p+\varepsilon) + f_1(k) + v)\,.
\end{aligned}$$

On divise les deux membres de l'égalité par $2n$ et on en prend la limite supérieure quand n croît indéfiniment. On obtient ainsi :

$$\delta(2p+\varepsilon, f) \leq \frac{1}{2}\,\delta(p, f_o) + \frac{1}{2}\,\delta(p+\varepsilon, f_1)\,.$$

Enfin, compte tenu du fait que f, f_o, et f_1 sont des éléments de A, on aboutit à l'inégalité fondamentale :

$$\delta(2p+\varepsilon, A) \leq \frac{1}{2}\,\delta(p, A) + \frac{1}{2}\,\delta(p+\varepsilon, A)\,, \qquad (5)$$

laquelle va nous permettre de démontrer le théorème.

En effet, supposons, par hypothèse que l'on ait $\delta(0_\nu, A) = 0$. Dans l'inégalité (5), on choisit $p = 0$, d'où :

$$\delta(\varepsilon, A) \leq \frac{1}{2} \delta(\varepsilon, A).$$

On en déduit aussitôt la nullité de $\delta(\varepsilon, A)$ pour tout $\varepsilon \in \{0, 1\}^\nu$.

Soient alors ε et ε' deux éléments orthogonaux de $\{0, 1\}^\nu$, $\left(\sum_{j=0}^{\nu-1} \varepsilon_j \varepsilon'_j = 0\right)$. Dans l'inégalité (5), on choisit $p = \varepsilon'$. Il vient :

$$\delta(2\varepsilon' + \varepsilon, A) \leq \frac{1}{2} \delta(\varepsilon', A) + \frac{1}{2} \delta(\varepsilon + \varepsilon', A).$$

Or, de par le lien qui existe entre ε et ε', le point $\varepsilon + \varepsilon'$ appartient à $\{0, 1\}^\nu$. Donc le second membre de l'inégalité précédente est nul. Par ailleurs, $2\varepsilon' + \varepsilon$ engendre $\{p \in \mathbb{N}^\nu \mid \|p\| \leq 2\}$. Ici, comme dans ce qui suit, $\|\cdot\|$ représente la norme ℓ^∞ dans $\mathbb{R}^\nu$.

Un raisonnement par récurrence va maintenant achever la démonstration du théorème. Soit $\rho \geq 0$ un entier et soit :

$$B(\rho) = \{p \in \mathbb{N}^\nu \mid \|p\| \leq \rho\}.$$

Supposons par hypothèse que l'on ait pour un certain $\rho \geq 2$ l'implication :

$$p \in B(\rho) \Rightarrow \delta(p, A) = 0.$$

Soit alors $q \in B(\rho - 1)$. L'inégalité (5) s'écrit :

$$\delta(2q + \varepsilon, A) \leq \frac{1}{2} \delta(q, A) + \frac{1}{2} \delta(q + \varepsilon, A).$$

Les deux termes du second membre de l'inégalité sont nuls car $q \in B(\rho - 1) \subset B(\rho)$ et $q + \varepsilon \in B(\rho)$. Par ailleurs, lorsque q parcourt $B(\rho - 1)$ et lorsque ε parcourt $\{0, 1\}^\nu = B(1)$, le point $2q + \varepsilon$ parcourt $B(2\rho - 1) \supset B(\rho + 1)$. L'hypothèse de récurrence se trouve donc vérifiée à l'ordre $\rho + 1$. CQFD.

/ §.3 - Démonstration du corollaire 1 /

On applique le théorème 5 au cas où A est l'ensemble des polynômes du premier degré. On voit alors que le spectre de la suite $\Lambda = (\lambda_n)$

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j \, s(n + p_j)$$

est vide sitôt que le spectre de la suite $\Lambda' = (\lambda'_n)$

$$\lambda'_n = \Big(\sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j \Big) \, s(n)$$

est vide. Or, le théorème 4 indique que Λ' est de spectre vide lorsque $a = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j$ est irrationnel. Cela achève la preuve du corollaire.

/ §.4 - Démonstration du corollaire 2 /

Soit $f \in \mathbb{Q}[X]$. Il est alors clair que la suite $x(f(n) + s(n))$ n'est pas équirépartie (mod. 1) pour x rationnel.

Supposons maintenant que x soit irrationnel. Si le degré de f est 1, le corollaire 1 montre que $x(f(n) + s(n))$ est équirépartie (mod. 1).

Si le degré ν du polynôme f est strictement supérieur à 1, on fait appel au raisonnement suivant. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. On considère la suite (μ_n)

$$\mu_n = x(f(n+k) - f(n) + s(n+k) - s(n)).$$

On applique alors le théorème 5 au cas où A est l'ensemble des polynômes de degré $\nu - 1$ dont le coefficient du terme de degré $\nu - 1$ est irrationnel. La suite (μ_n) est équirépartie (mod. 1) sitôt que l'est la suite (μ'_n)

$$\mu'_n = x(f(n+k) - f(n)).$$

Or, il est bien connu qu'une telle suite est équirépartie (mod. 1). On en conclut que pour tout entier $k \neq 0$, la suite (μ_n) est équirépartie (mod. 1). Le théorème de Van der Corput montre alors que $x(f(n) + s(n))$ est équirépartie (mod. 1). CQFD.

/ §.5 - Remarques finales. /

On pourrait multiplier les exemples de suites équiréparties (mod. 1) en appliquant le théorème 5. Tous ces exemples sont des conséquences du principe suivant : si pour $j = 0, 1, \ldots, g-1$ les suites $\Lambda^j = (\lambda_n^j)$

$$\lambda_n^j = \mu_{gn+j} + \left(\sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_k\right) s(n)$$

sont équiréparties (mod. 1), alors la suite $\Lambda = (\lambda_n)$

$$\lambda_n = \mu_n + \sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_k \, s(n + p_k)$$

est équirépartie (mod. 1).

En particulier, soient $g_1, g_2, \ldots, g_t$ des entiers strictement supérieurs à 1 et soit $s_i(n)$ la somme des chiffres de n écrit en base g_i. Soit f un polynôme réel dont un coefficient d'un terme de degré $\delta \geq 2$ est irrationnel. Alors, on peut montrer que la suite

$$\lambda_n = f(n) + \sum_{k=1}^{t} \alpha_k \, s_k(n + p_k)$$

est équirépartie (mod. 1), et ceci pour tout $p \in \mathbb{N}^t$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^t$.

La limitation sur δ est sans doute trop restrictive ($\delta \geq 1$ devrait suffire). Pour $\delta = 0$, il faut évidemment apporter une restriction sur α pour obtenir l'équirépartition (mod. 1). Dans cette direction, il faut citer le résultat suivant de BESINEAU : si $(g_1, g_2) = 1$ et si l'un au moins des nombres α_1 et α_2 est irrationnel, alors la suite $(\alpha_1 s_1(n) + \alpha_2 s_2(n))$ est équirépartie (mod. 1).

-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS J. P. - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p . Bulletin de la Soc. Math. de France, Mémoire 5, 1966, p. 1-106.

[2] BESINEAU J. - Sur un problème de Gel'fond relatif à la fonction somme des chiffres. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (à paraître).

[3] GEL'FOND A. O. - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. Acta Arithmetica, 13, 1968, p. 259-265.

[4] KAHANE J. P. - Sur les fonctions presque-périodiques généralisées dont le spectre est vide. Studia Mathematica, 21, 1962, p. 231-236.

[5] MENDES FRANCE M. - Nombres normaux. Application aux fonctions pseudo-aléatoires. Journal d'Analyse Mathématique, 20, 1967, p. 1-56.

[6] MENDES FRANCE M. - La réunion des ensembles normaux. Journal of Number Theory, 2, 1970, p. 345-351.

-:-:-:-:-:-

Université de Bordeaux 1
U. E. R. de Mathématiques et Informatique
33 - TALENCE (France)