

GUY TERJANIAN

La propriété C_i des corps

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1969-1970), exp. n° 8, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1969-1970____A8_0

© Université Bordeaux 1, 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA PROPRIÉTÉ C_1 DES CORPS

par

Guy TERJANIAN

-:-:-:-:-

a) Introduction.

Nous ferons un exposé historique du sujet qui est assez neuf puisqu'il commence en 1933 ; nous ne prétendons pas à la rigueur historique ; nous voulons surtout montrer l'enchaînement des idées.

Sauf mention expresse du contraire, tous les corps considérés sont commutatifs. Il est commode de poser une définition :

Définition. - Soient K un corps commutatif et $i \geq 0$ un entier, on dit que K a la propriété C_i (resp. la propriété C_i forte), si, pour tout couple (d, n) d'entiers ≥ 0 tels qu'on ait $n > d^i$ et pour tout élément f de $K[X_1, \dots, X_n]$ non nul, de degré d et homogène (resp. sans terme constant), f possède un zéro non banal dans K .

On voit immédiatement que, pour qu'un corps ait la propriété C_0 , il faut et il suffit qu'il soit algébriquement clos.

b) La période 1933-1936.

En 1933, C. Tsen démontre, dans [14], que si K est un corps algébriquement clos, le groupe de Brauer du corps $K(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans K est nul. Analysant le travail de Tsen,

Emil Artin pose la définition de la propriété C_1 , à la terminologie près, car il appelle quasi algébriquement clos un corps qui a la propriété C_1 ; il remarque alors que Tsen démontre deux choses : d'abord qu'un corps de fractions rationnelles à coefficients dans un corps algébriquement clos est C_1 , ensuite que si un corps possède la propriété C_1 , son groupe de Brauer est nul.

Vu le théorème de Wedderburn qui affirme que tout corps fini est commutatif, Artin conjecture qu'un corps fini est C_1 , conjecture faite auparavant par Dickson ; ceci est prouvé en 1935 par Chevalley dans [7] ; en fait Chevalley prouve qu'un corps fini a la propriété C_1 forte. Ce résultat a été précisé par Warning en 1935 dans [17], résultat qui, à son tour, a été précisé par J. AX en 1964, dans [2].

Soit Ω le corps obtenu en adjoignant au corps des rationnels, toutes les racines de l'unité, la théorie du corps de classes permet de montrer que le groupe de Brauer de Ω est nul ; Artin conjecture que Ω est C_1 ; nous dirons que c'est la 1^{ère} conjecture d'Artin ; on sait qu'elle est vérifiée pour les formes quadratiques, mais on ignore si elle est vraie.

Soient K un corps et $i \geq 0$ un entier, nous appellerons forme normique d'ordre i , tout élément de $K[X_1, \dots, X_n]$, homogène, non nul, de degré d , avec $n = d^i$, n'ayant que le zéro banal dans K .

Soient K un corps muni d'une valuation discrète, de corps résiduel k , on voit aisément que si k possède une forme normique d'ordre i , K possède une forme normique d'ordre $i + 1$; soit K un corps fini, les normes des extensions finies de K nous donnent des formes normiques d'ordre 1 ; donc le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p -adiques possède des formes normiques d'ordre 2 ; Artin a conjecturé que, pour tout nombre premier p , le corps $\mathbb{Q}_p$ est C_2 ; nous dirons que c'est la 2^{ème} conjecture d'Artin ; en 1936, époque où cette

conjecture a été faite, on savait, comme conséquence des travaux de Hasse [10], qu'elle est satisfaite pour les formes quadratiques ; on verra plus loin que cette conjecture est fausse.

c) La période 1945-1963.

En 1952, Lewis [12] et Demyanov [8] démontrent que la 2^e conjecture d'Artin est vraie pour les formes de degré 3. A la même époque, Lang [11] démontre divers résultats généraux sur les corps qui ont la propriété C_1 et qui, de plus, possèdent des formes normiques d'ordre i . Dans le même article, Lang démontre que, si un corps K , muni d'une valuation discrète v , est hensélien pour v , a un corps résiduel algébriquement clos et est tel que $\hat{K}$, son complété, soit séparable sur K , alors K est C_1 . Ceci milite en faveur de la 1^{ère} conjecture d'Artin, puisque il en résulte que les complétés $\hat{\Omega}$ du corps Ω défini en b), pour ses diverses valuations sont C_1 .

Lang remarque en 1953, dans un article aux Annals of Math. que l'on peut définir une propriété C_1 restreinte à des polynômes homogènes dont les degrés appartiennent à une partie stable par la multiplication des entiers ≥ 1 et que l'on peut étendre à cette propriété C_1 les résultats qu'il a obtenus dans [11].

En 1957, Nagata étend les résultats de Lang aux corps qui ont la propriété C_1 , mais ne possèdent pas nécessairement de formes normiques d'ordre i ; en particulier, il démontre que si K est un corps C_1 , toute suite $(f_i)_{i=1, \dots, r}$ d'éléments de $K[X_1, \dots, X_n]$, telle que chacun des f_i soit homogène de degré d et qu'on ait $n > r d^i$ a un zéro non banal dans K ; il démontre aussi que si K est un corps C_1 , le corps $K(X)$ est C_{i+1} ; enfin, il remarque qu'on peut définir la propriété C_i pour tout nombre réel $i \geq 0$ et qu'elle jouit des mêmes propriétés que la propriété C_i où i est un entier [13].

Signalons aussi, dans cette période, les travaux de Brauer [5] et de Birch et Lewis [4].

d) La période 1964-1970.

En 1964, Ax et Kochen, dans [3], démontrent la chose suivante : pour tout entier $d \geq 1$, il existe un entier $m(d)$ tel que, pour tout nombre premier $p \geq m(d)$, tout élément de $\mathbb{Q}_p[X_1, \dots, X_n]$, homogène, de degré d et tel qu'on ait $n > d^2$ a un zéro non banal dans K .

En 1966, Terjanian [15] montre par un exemple que la 2^{ème} conjecture d'Artin est fausse. Browkin construit d'autres exemples qui montrent que, si pour un nombre premier p et un nombre réel $i \geq 0$, le corps $\mathbb{Q}_p$ est C_i , alors on a $i \geq 3$.

En 1966, Greenberg [9] montre que si K a la propriété C_i , le corps $K((X))$ des séries formelles à coefficients dans K a la propriété C_{i+1} .

Soient n un entier ≥ 1 et f un élément d'une algèbre de polynômes $A[X_i]_{i \in I}$, on dit que f est n -homogène, si les degrés des composantes homogènes de f qui ne sont pas nulles sont congrus entre eux modulo n .

En 1969, Terjanian, aidé par Serre, [16] démontre : soient p un nombre premier, K un corps dont toute extension finie a pour degré une puissance de p et $(f_i)_{i=1, \dots, r}$ une suite d'éléments de $K[X_1, \dots, X_n]$ telle qu'on ait $n > r$, que chacun des f_i soit p -homogène et de degré étranger à p , alors f a un zéro non banal dans K .

Ce résultat conduit à définir une notion de propriété $C_i^{(p)}$, p étant un nombre premier, en se restreignant dans la définition de la propriété C_i aux polynômes p -homogènes et de degré étranger à p . On constate [16] que cette propriété $C_i^{(p)}$ a un comportement analogue à celui de la propriété C_i .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARTIN - The collected papers. Addison-Wesley, Reading, Mass.,
U.S.A., 1965, page X..
- [2] J. AX - Zeroes of polynomials over finite fields. Amer. J. Math., 86,
1964, p. 255-261.
- [3] J. AX et S. KOCHEN - Diophantine problems over local fields. I, II,
Amer. J. Math., 87, 1965, p. 605-648 ; III. Ann.
Math., 83, 1966, p. 437-456.
- [4] B. J. BIRCH et D. J. LEWIS - Systems of three quadratic forms. Acta
arithmetica, 10, 1964/65, p. 423-442.
- [5] R. BRAUER - A note on systems of homogeneous algebraic equations.
Bull. Amer. Math. Soc., 51, 1945, p. 749-755.
- [6] J. BROWKIN - On forms over p-adic fields. Bull. Acad. Pol. Sci., 14,
1966, p. 489-492.
- [7] C. CHEVALLEY - Démonstration d'une hypothèse de M. Artin. Abh.
Math. Sem. Hamburg, 11, 1936, p. 73-75.
- [8] V. B. DEMYANOV - On cubic forms in discretely normed fields. Dokl.
Akad. Nauk. U. R. S. S., 74, 1950, p. 889-891. (en russe).
- [9] J. M. GREENBERG - Rational points in henselian discrete valuation rings.
Publ. I. H. E. S. n° 31, 1966, p. 59-64.
- [10] H. HASSE - Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in
einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. J. f. reine u.
angew. Math., 153, 1924, p. 113-130.
- [11] S. LANG - On quasi-algebraic closure. Ann. Math. 55, 1952, p. 373-390.
- [12] D. J. LEWIS - Cubic homogeneous polynomials over p-adic number
fields. Ann. Math., 56, 1952, p. 473-478.

- [13] M. NAGATA - Note on a paper of Lang concerning quasi-algebraic closure. Mem. Univ. Kyoto, Ser. A, 30, 1957, p. 237-241.
- [14] C. C. TSEN - Divisionalgebren über Funktionkörpern. Nach. Ges. Wiss., Göttingen, 1933, p. 335-339.
- [15] G. TERJANIAN - Un contre-exemple à une conjecture d'Artin. C. R. Acad. Sci. Paris, 262, 1966, p. 612.
- [16] G. TERJANIAN - Dimension arithmétique d'un corps. (Thèse à paraître).
- [17] E. WARNING - Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herrn Chevalley. Abh. Math. Sem. Hamburg, 11, 1936, p. 76-83.

-:-:-:-:-

Guy TERJANIAN
53, rue Roger Salengro
92 - ANTONY