

EVE HELSMOORTEL

**Module de continuité des polynômes binomiaux dans $\mathbb{Z}_p$,
application aux fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$**

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 5, p. 1-24

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969__A5_0

© Université Bordeaux 1, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULE DE CONTINUITÉ DES POLYNÔMES BINOMIAUX DANS $\mathbb{Z}_p$,
 APPLICATION AUX FONCTIONS CONTINUES SUR $\mathbb{Z}_p$

par

Eve HELSMOORTELT

INTRODUCTION.

Dans le corps $\mathbb{Q}_p$ la valuation est supposée normalisée de telle sorte que $v(p) = 1$. Étant donné deux entiers positifs n et k , et le n ème polynôme binomial Q_n :

$$Q_n(x) = \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!} ,$$

on considère la quantité :

$$w_{Q_n}(k) = \inf_{\substack{v(x-y)=k \\ v(x) \geq 0, v(y) \geq 0}} v(Q_n(x) - Q_n(y)) .$$

et on établit le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \text{si } n < p^k \quad w_{Q_p}(k) &= k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] , \\ \text{si } n \geq p^k \quad w_{Q_n}(k) &= 0 . \end{aligned}$$

Dans une seconde partie on considère alors une fonction f continue sur $\mathbb{Z}_p$ et sa série d'interpolation :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x) ,$$

et on déduit de l'ordre de croissance des $|a_n|$, une condition de Lipschitz d'un certain ordre.

1. - NOTATIONS.

Pour tout entier naturel n , on note h le nombre de chiffres de n dans le système de numération de base p dans lequel n s'exprime par :

$$1-1. : \quad n = n_0 + n_1 p + \dots + n_{h-1} p^{h-1} ,$$

$$n_{h-1} \neq 0 , \quad h = 1 + \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] ,$$

$[\lambda]$ représentant la partie entière du nombre réel λ .

L'entier n étant fixé, on associe à tout élément x de $\mathbb{Z}_p$ les entiers naturels ρ et ρ' , N et N' , définis à partir du développement de Hensel de x :

$$1-2. : \quad x = x_0 + x_1 p + \dots + x_{N-1} p^{N-1} + x_{N'} p^N + \dots .$$

N est le rang maximum tel que :

$$x_{N-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad \rho = x_0 + \dots + x_{N-1} p^{N-1} < n ,$$

ρ est ainsi une des racines de Q_n les plus proches de x .

$$N' = v(x - \rho) \quad \text{et} \quad \rho' = \rho + x_{N'} p^{N'} \geq n ;$$

enfin : $N-1 \leq h-1$ et $N' \geq h-1$, et si $N' = h-1$, $N-1 < h-1$.

Si $h = 1$ et si $x_0 \geq n_0$, on posera par convention : $\rho = 0$, $N = 1$, $N' = 0$, $\rho' = x_0$.

D'autre part, étant donné un entier positif k , on pose :

$$1-3. : \quad r = x_0 + x_1 p + \dots + x_{k-1} p^{k-1}.$$

2. - PRELIMINAIRES.

a) Si deux éléments x et y de Z_p sont tels que $v(x-y) = k$, alors par 1-3 on leur associe le même entier r ; pour n et r fixés, $r < p^k$, on a les inégalités :

$$2-1. : \quad \inf_{v(x-r) \geq k} v(Q_n(x) - Q_n(r)) \leq \inf_{\substack{v(x-y)=k \\ v(x-r) \geq k}} v(Q_n(x) - Q_n(y)) \leq \inf_{v(x-r)=k} v(Q_n(x) - Q_n(r)).$$

b) Calcul de $v(Q_n(x))$ pour $v(x) \geq 0$:

$$v(Q_n(x)) = \sum_{j=0}^{n-1} v(x-j) - v(n!).$$

Si $j \neq \rho$, on vérifie que $v(x-j) = v(\rho-j)$,

Si $j = \rho$, $v(x-\rho) = N'$,

$$v(Q_n(x)) = \sum_{j=0}^{\rho-1} v(\rho-j) + v(x-\rho) + \sum_{j=\rho+1}^{n-1} v(j-\rho) - v(n!).$$

Soit :

$$2-2. : \quad v(Q_n(x)) = N' + v(\rho!) + v((n-\rho-1)!) - v(n!).$$

c) LEMME : Etant donné deux entiers n et q tels que $0 \leq q < n$, on a :

$$2-3. : \quad v(q!) + v((n-q-1)!) - v(n!) \geq - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] = 1-h .$$

L'égalité est réalisée si et seulement si q obéit à la définition suivante :

On dit que q est "bon pour n " lorsque les chiffres q_i de q dans le
système de base p vérifient les inégalités :

$$q_0 \geq n_0, \dots, q_{h-2} \geq n_{h-2} , \quad \text{et} \quad q_{h-1} < n_{h-1} .$$

(si $h = 1$ seule subsiste l'inégalité $q_0 < n_0$) .

L'inégalité 2-3 peut encore s'exprimer ainsi :

$$v(c_n^q) \leq \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] + v(n-q) ,$$

ou

$$v(c_{n-1}^q) \leq \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] - v(n) .$$

et dans chaque cas l'égalité est réalisée si et seulement si q est bon pour n .

Démonstration : si $h = 1$ et si $q_0 < n_0$, 2-3 devient trivialement une égalité.

En se référant à l'expression 1-1 de n , on définit la quantité

$S(n) = n_0 + n_1 + \dots + n_{h-1}$, et on démontre que :

$$v(n!) := \frac{n - S(n)}{p - 1} .$$

Alors :

$$v(q!) + v((n-q-1)!) - v(n!) = \frac{S(n) - S(q) - S(n-q-1) - 1}{p-1}$$

et donc :

$$2-3 \Leftrightarrow S(n) - S(q) - S(n-q-1) - 1 \geq (p-1)(1-h) . \quad 2-3' .$$

Dans le système de base p :

$$q = q_0 + q_1 p + \dots + q_{h-1} p^{h-1} ,$$

$$n-q-1 = b_0 + b_1 p + \dots + b_{h-1} p^{h-1} .$$

Soit $v = v(n)$,

$$n = n_v p^v + n_{v+1} p^{v+1} + \dots + n_{h-1} p^{h-1} , \quad n_v \cdot n_{h-1} \neq 0 ,$$

et

$$n-1 = (p-1) + \dots + (p-1) p^{v-1} + (n_v - 1) p^v + \dots + n_{h-1} p^{h-1} ,$$

les v premiers termes disparaissent si $v = 0$.

Pour calculer l'expression $s(n) - s(q) - s(n-q-1)$, effectuons, dans le système de base p , la soustraction $(n-1)-q$.

On obtient tout d'abord :

$$q_0 + b_0 = p-1 , \dots , \quad q_{v-1} + b_{v-1} = p-1 ,$$

et par suite :

$$q_0 + q_1 + \dots + q_{v-1} + b_0 + \dots + b_{v-1} = (p-1) v .$$

Au rang v :

$$\text{si} \quad q_v \leq n_v - 1 , \quad q_v + b_v = n_v - 1 ,$$

$$\text{si} \quad q_v \geq n_v , \quad \text{il y a une retenue et} \quad q_v + b_v = (n_v - 1) + p .$$

Puis :

$$\begin{aligned} & 0 \quad \text{si} \quad q_{v+1} < n_{v+1} \\ & q_{v+1} + b_{v+1} + 1 = n_{v+1} + \\ & p \quad \text{si} \quad q_{v+1} \geq n_{v+1} , \end{aligned}$$

et :

$$q_v + q_{v+1} + b_v + b_{v+1} = (n_v - 1) + n_{v+1} + p - 1 + \frac{0}{p} ;$$

la retenue au rang v a eu pour effet d'ajouter une fois $p-1$ et il en est de même pour chaque retenue. S'il y a R retenues, on obtient ainsi la relation :

$$s(n) - s(q) - q(n-q-1) - 1 = - (p-1) (R+v) ,$$

or il y a au plus $h-v-1$ retenues, ce qui implique l'inégalité 2-3' ; l'égalité en 2-3 est réalisée si et seulement si il y a $h-v-1$ retenues, c'est-à-dire si

$$q_v \geq n_v , \dots , q_{h-2} \geq n_{h-2} ,$$

compte tenu de ce que $v = v(n)$, on a, trivialement si $v \geq 1$,

$$q_0 \geq n_0 , \dots , q_{v-1} \geq n_{v-1} ,$$

et, comme $q < n$, $q_{h-1} < n_{h-1}$.

3. - ETUDE DE $v(Q_n(x) - Q_n(r))$ et $v(Q_n(x) - Q_n(y))$

POUR $n < p^k$, $v(x-y) = k$, $v(x-r) \geq$ et $0 \leq r < p^k$.

a) Si $r < n$,

$Q_n(r) = 0$ et, compte tenu de 2-2 et du lemme, on obtient :

$$3-1. : \quad v(Q_n(x) - Q_n(r)) \geq k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] ,$$

l'égalité est réalisée si et seulement si $v(x-r) = k$ et r bon pour n .

b) si $r \geq n$

à x et r correspondent les mêmes entiers ρ et N' ,

$$v(Q_n(r)) = N' + v(\rho!) + v(n - \rho - 1!) - v(n!) ,$$

$$\frac{Q_n(x)}{Q_n(r)} - 1 = p^k \alpha + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j} + p^{2k} \alpha^2 \Sigma_2(r) + \dots + p^{nk} \alpha^n \Sigma_n(r) ,$$

avec $p^k \alpha = x - r$, $v(\alpha) \geq 0$, et $\Sigma_m(r) = \sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n-1} \frac{1}{(r-j_1) \dots (r-j_m)}$;

comme $\sup v(r-j) = N'$, on en déduit que :

$$v\left(\frac{Q_n(x)}{Q_n(r)} - 1\right) \geq k - N' ,$$

et par conséquent que :

$$3-2. : \quad v(Q_n(x) - Q_n(r)) \geq k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] ,$$

l'égalité est réalisée si et seulement si :

$$v(x-r) = k , \quad \rho \text{ "bon pour } n" \text{ et } v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\right) = -N' .$$

Les inégalités 2.1 permettent alors de conclure que :

$$3-3. : \quad w_{Q_n}(k) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] \quad \text{si } n < p^k .$$

c) Caractérisation des couples (x, r) tels que, pour $n < p^k$

$$|v(x-r) = k \quad \text{et} \quad v(Q_n(x) - Q_n(r)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] .$$

Etant donné x et l'entier ρ associé à x et n , on peut remarquer que :

si ρ est bon pour n : $N' > h-1$ $\rho = x_0 + \dots + x_{h-1} p^{h-1}$ et donc $x_{h-1} < n_{h-1}$,

$$N' = h-1 \quad \rho = x_0 + \dots + x_{h-2} p^{h-2} ,$$

$$\rho + x_{h-1} p^{h-1} \geq n \text{ et donc } x_{h-1} \geq n_{h-1} .$$

Par suite :

$$\text{si } \rho \text{ est bon pour } n , \quad N' > h-1 \Leftrightarrow x_{h-1} < n_{h-1} ,$$

$$N' = h-1 \Leftrightarrow x_{h-1} \geq n_{h-1} .$$

Soit G l'ensemble des couples (x, r) considérés.

Pour $r < n$: r est la racine de Q_n la plus proche de x ; d'après 3.1 :

$$(x, r) \in G \Leftrightarrow r = \rho \text{ bon pour } n .$$

Dans ce cas $h \leq k \leq N'$, et en explicitant on obtient le résultat

$$\begin{aligned} \text{si } r < n \quad (x, r) \in G \Leftrightarrow x_0 \geq n_0 , \dots , x_{h-2} \geq n_{h-2} \\ \text{et } x_{h-1} < n_{h-1} . \end{aligned}$$

Pour $r \geq n$, d'après 3.2 :

$$\begin{aligned} (x, r) \in R \Leftrightarrow \rho \text{ bon pour } n \\ \text{et } v \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j} \right) = -N' \end{aligned}$$

si $N' > h-1$, ρ est la racine de Q_n la plus proche de x , et donc

$$v \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j} \right) = -N' \text{ est réalisé, et on obtient comme condition :}$$

$$x_0 \geq n_0 , \dots , x_{h-2} \geq n_{h-2} \quad \text{et} \quad x_{h-1} < n_{h-1} .$$

Si $N' = h-1$

$$v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\right) = 1-h \Leftrightarrow v\left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ v(r-i)=h-1}} \frac{1}{r-i}\right) = 1-h.$$

Les entiers i définis par : $0 \leq i \leq n-1$ et $v(r-i) = h-1$, sont les racines de Q_n les plus proches de x , ils sont de la forme :

$$i = \rho + d \cdot p^{h+1},$$

$$d \text{ entier, } v(d-x_{h-1}) = 0, \quad 0 \leq d p^{h-1} < n-\rho = n_{h-1} p^{h-1} - ((x_o - n_o) + \dots + (x_{h-2} - n_{h-2}) p^{h-2}),$$

si ρ est bon pour n , cette inégalité devient $0 \leq d < n_{h-1}$, et comme dans ce cas $n_{h-1} \leq x_{h-1}$, cela implique que $v(d-x_{h-1}) = 0$.

Donc tous les entiers i sont tous des entiers de la forme :

$$i = \rho + d p^{h-1} \quad 0 \leq d < n_{h-1}.$$

$$v\left(\sum_i \frac{1}{r-i}\right) = 1-h \Leftrightarrow v\left(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1} - d}\right) = 0,$$

$$\text{car } r-i = (x_{h-1} - d) p^{h-1} + x_h p^h + \dots + x_{h-1} p^{k-1}.$$

Ceci permet de conclure que :

$$\text{pour } n < p^k, \text{ et } v(x-r) \geq k:$$

$$v(Q_n(x) - Q_n(r)) = k - \left\lfloor \frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right\rfloor \Leftrightarrow (\alpha) \quad x_0 \geq n_0, \dots, x_{h-2} \geq n_{h-2},$$

$$(\beta) \quad x_{h-1} < n_{h-1},$$

ou

$$x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et}$$

$$v\left(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1}^d}\right) = 0$$

$$(\gamma) \quad v(x-r) = k.$$

Remarque : si $h = 1$ la condition (α) disparaît.

d) Caractérisation des couples (x, y) tels que :

$$(\text{pour } n < p^k) \quad v(x-y) = k$$

$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left\lfloor \frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right\rfloor.$$

Si $v(x-y) = k$, alors, pour l'entier r associé à x et y :

$$v(x-r) \geq k \quad \text{et} \quad v(y-r) \geq k,$$

l'égalité étant réalisée pour l'une au moins de ces inégalités ; donc :

$$v(Q_n(x) - Q_n(r)) \geq k - \left\lfloor \frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right\rfloor \quad \text{et} \quad v(Q_n(y) - Q_n(r)) \geq k - \left\lfloor \frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right\rfloor.$$

Si de plus $v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left\lfloor \frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right\rfloor$, l'une au moins de ces deux dernières inégalités est une égalité.

Supposons que :

$$v(x-y) = k, \quad v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left\lfloor \frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right\rfloor \quad \text{et, par exemple,}$$

$$v(x-r) = k.$$

si $v(y-r) = k' > k$

$$\text{alors } v(Q_n(y) - Q_n(r)) > k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] ,$$

$$\text{donc } v(Q_n(x) - Q_n(r)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] ,$$

et les h premiers chiffres de x , qui sont aussi ceux de y puisque $h \leq k$, satisfont aux conditions (α) et (β) .

si $v(y-r) = k$

$$\text{alors, par exemple, } v(Q_n(x) - Q_n(r)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right]$$

et les n premiers chiffres de x et y vérifient (α) et (β) .

Conclusion : si x et y sont tels que :

$$v(x-y) = k \quad \text{et} \quad v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] \quad (n < p^k) ,$$

alors les h premiers chiffres de x et y satisfont aux conditions :

$$(\alpha) \quad x_0 \geq n_0, \dots, x_{h-2} \geq n_{h-2} ,$$

$$(\beta) \quad x_{h-1} < n_{h-1} \quad \text{ou bien : } x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et} \quad v\left(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1}^{-d}}\right) = 0 .$$

Inversement :

Soient x et y tels que : $v(x-y) = k$, et tels que leur h premiers chiffres satisfassent aux conditions (α) et (β) .

Si $v(x-r) = k$ et si $v(y-r) > k$

$$\text{alors, comme on l'a vu, } v(Q_n(y) - Q_n(r)) > k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] ,$$

$$v(Q_n(x) - Q_n(r)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] ,$$

et donc :
$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right]$$

Si $v(x-r) = v(y-r) = v(x-y) = k$:

Les conditions (α) et (β) impliquent que l'entier ρ associé à x et à y est bon pour n , et donc, d'après 2-2 et le lemme :

$$v(Q_n(y)) = N' - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right] ,$$

où N' est associé à y

$$\frac{Q_n(x)}{Q_n(y)} - 1 = \lambda \sum_0^{n-1} \frac{1}{y-j} + \lambda^2 \Sigma_2(y) + \dots + \lambda^n \Sigma_n(y) ,$$

où $\lambda = x-y$, et $\Sigma_m(y) = \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n-1} \frac{1}{(y-j_1) \dots (y-j_m)} .$

Si $j \neq \rho$, $v(y-j) = v(\rho-j) \leq N'$, et $v(y-\rho) = N'$;

donc :
$$v(\lambda^m \Sigma_m(y)) \geq m(k-N') .$$

Si $N' = k$ c'est que $r < n$, et r est la racine de Q_n la plus proche de y , donc :

$$v\left(\sum_0^{n-1} \frac{1}{y-j}\right) = -k ,$$

et d'autre part $v(\Sigma_m(y)) \geq m-1-mk$,

par suite :
$$v\left(\frac{Q_n(x)}{Q_n(y)} - 1\right) = 0 ,$$

ce qui implique que
$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right]$$

Si $N' < k$, c'est que $r \geq n$

alors $v(y-j) = v(r-j) \leq N'$ pour tout j , $0 \leq j \leq n-1$, et

$$v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{y-j}\right) = -N' \Leftrightarrow v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\right) = -N' ;$$

Mais d'après les conditions (α) et (β) , $v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\right) = -N'$, donc :

$$v\left(\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{y-j}\right) = k - N' ,$$

et
$$v\left(\frac{Q_n(x)}{Q_n(y)} - 1\right) = k - N' ,$$

et par suite :
$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}\right] .$$

Ceci permet d'énoncer le résultat suivant :

THEOREME 1. Si $n < p^k$, les éléments x et y de Z_p tels que :

$$v(x-y) = k ,$$

ce qui implique que x et y ont les mêmes k premiers chiffres, et

$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}\right] = k + 1 - h ,$$

sont caractérisés par les inégalités suivantes portant sur leur h premiers chiffres :

$$(\alpha) \quad x_i \geq n_i \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq h-2 ,$$

$$(\beta) \quad x_{h-1} < n_{h-1} \quad \text{ou bien : } x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et} \quad v\left(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1}^{-d}}\right) = 0 .$$

4. - Etude de $N(Q_n(x) - Q_n(y))$ pour $n \geq p^k$:

D'après 2-2 et le lemme :

$$v(Q_n(x)) \geq N' - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } \hat{p}} \right] = N' + 1 - h \geq 0 ,$$

et donc :

$$v(Q_n(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \rho \text{ bon pour } n , \text{ et} \\ N' = h-1 . \end{array}$$

Lorsque $N' = h-1$, $\rho = x_0 + \dots + x_{h-2} p^{h-2}$, et on a vu que :

$$\begin{array}{l} \rho \text{ bon pour } n \quad \quad \quad x_{h-1} \geq n_{h-1} , \\ \text{et} \quad \quad \quad \Leftrightarrow \\ N' = h-1 \quad \quad \quad x_0 \geq n_0 , \dots , x_{h-2} \geq n_{h-2} , \end{array}$$

et par conséquent :

$$4-1. : \quad v(Q_n(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\delta) \quad x_i \geq n_i , \quad 0 \leq i \leq h-1 .$$

ce qui implique :

$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) \geq 0 ;$$

si les h premiers chiffres de x satisfont à (δ) et si $x_h \neq 0$, alors

$$v(x-r) = k , \quad r < p^k \leq n ,$$

$$\text{donc :} \quad v(Q_n(x) - Q_n(r)) = v(Q_n(x)) = 0 ,$$

$$\text{et :} \quad \omega_{Q_n}(k) = 0 .$$

Si pour un nombre réel λ on note $(\lambda)^+ = \sup(\lambda, 0)$ alors on peut conclure que :

THEOREME 2. Pour tout entier naturel n :

$$\omega_{Q_n}(k) = (k - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}])^+$$

5. - APPLICATION AUX FONCTIONS CONTINUES SUR Z_p :

On définit de même, pour une fonction f continue sur Z_p :

$$\omega_f(k) = \inf_{v(x-y)=k} v(f(x)-f(y)) .$$

Si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x)$ est la série d'interpolation de f , on a :

$$5-1. : \quad \omega_f(k) \geq \rho_f(k) = \inf_{\substack{n \geq 0 \\ v(x-y)=k}} (v(a_n) + v(Q_n(x) - Q_n(y))) .$$

Posons :

$$\lambda_h = \inf v(a_n) \quad \text{pour} \quad p^{h-1} \leq n < p^h ,$$

alors :

$$\rho_f(h) = \inf_{h \geq 1} (\lambda_h + (k+1-h)^+) .$$

Pour étudier $\rho_f(k)$, on considère le polygone de Newton P de l'ensemble E des points (h, λ_h) , l'ordonnée du point d'abscisse k sur P est notée $Nw(k)$.

$\lambda_k - h$ est l'ordonnée à l'origine de la droite de pente un passant par le point (h, λ_h) ; deux cas se présentent :

a) Si P admet une droite d'appui de pente un D .

Ceci se produit lorsque

$$\inf_{h \geq 1} (\lambda_h - h) = C_o \text{ est fini}$$

c'est-à-dire lorsque

$$v(a_n) \geq C_o + 1 + \left[\frac{\log n}{\log p} \right] \quad \forall n \geq 1,$$

ce qui entraîne, en revenant aux valeurs absolues, que :

$$|a_n| < \frac{1}{p^{C_o}} \cdot \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$

et l'hypothèse a) est équivalente à : il existe $K > 0$ tel que $|a_n| \leq \frac{K}{n} \quad \forall n \geq 1$.

D contient ou bien un seul sommet de P , ou tout un côté de P .

Si il n'y a qu'un nombre fini de points de E situés sur D , soit h_o l'abscisse maxima de ces points, c'est encore le plus grand entier h_o tel que :

$$C_o = \lambda_{h_o} - h_o.$$

Prenons $k > h_o$, ce qui correspond à $|x-y| < \frac{1}{p^{h_o}}$, alors, pour $h > k$

$$\lambda_h \geq h + 1 + c_o > k + 1 + c_o$$

et pour $1 \leq h \leq k$ $\lambda_k \geq h + C_o$ et $\lambda_k + 1 + k - h \geq k + 1 + c_o$,

l'égalité étant en particulier réalisée pour h_o , donc :

$$\rho_f(k) = k + 1 + c_o \quad \text{pour } k > h_o.$$

Si il y a une infinité de points de E situés sur D , (P a un côté infini de pente un) soit h_0 l'abscisse de l'un d'eux, alors :

$$\rho_f(k) \geq k + 1 + C_0 \quad \text{pour } k > h_0 .$$

Dans les deux cas, on a :

$$v(f(x) - f(y)) \geq v(x-y) + 1 + C_0 ,$$

on en déduit que :

THEOREME 3. S'il existe $K > 0$ tel que :

$$|a_n| \leq \frac{K}{n} \quad \forall n \geq 1 ,$$

alors il existe $K' > 0$ et $\delta > 0$ tels que :

$$\text{pour } |x-y| \leq \delta , \quad |f(x)-f(y)| \leq K' |x-y| .$$

b) Si P n'admet pas de droite d'appui de pente un, soit $(h_i)_{i \geq 1}$ la suite des abscisses des sommets de P :

$$h_1 < \dots < h_i < h_{i+1} < \dots$$

et m_i la pente du côté qui se projette en (h_i, h_{i+1}) ; la suite m_i est croissante, majorée par un d'après l'hypothèse b) , elle tend donc vers une limite μ , $0 < \mu \leq 1$.

Soit i_0 tel que pour $i > i_0$, $m_i > 0$, prenons $k > k_{i_0}$.

Pour $h > k$: $\lambda_h \geq Nw(h) > Nw(k)$,

pour $1 \leq h \leq k$, les points correspondants de P sont au-dessus de la droite de pente un passant par le point $(k, Nw(k))$

$$\lambda_h - h + k + 1 \geq Nw(k) + 1 .$$

On en déduit donc que :

$$\rho_f(k) \geq 1 + [Nw(k)] > Nw(k) \quad \text{pour } k > h_{i_0},$$

et en un sommet de P :

$$\rho_f(h_i) = 1 + Nw(h_i).$$

Pour tout nombre réel β , $0 < \beta < \mu$, P admet une direction admissible de pente β et :

$$Nw(k) \geq \beta k + C,$$

donc :

$$\rho_f(k) > \beta k + C \quad \text{pour } k > h_{i_0},$$

ce qui établit le résultat suivant :

THEOREME 4. S'il existe $K > 0$ et $\beta \in]0, 1[$ tels que :

$$|a_n| \leq \frac{K}{n^\beta} \quad \forall n \geq 1,$$

alors il existe $K' > 0$ et $\delta > 0$ tels que :

$$\text{pour } |x-y| \leq \delta, \quad |f(x)-f(y)| \leq K' |x-y|^\beta.$$

On peut alors conclure, en réunissant ces deux théorèmes que :

THEOREME 5. S'il existe $K > 0$ et $\gamma > 0$ tels que :

$$|a_n| \leq \frac{K}{n^\gamma} \quad \forall n \geq 1,$$

alors il existe $K' > 0$ et $\delta > 0$ tels que :

$$\text{pour } |x-y| \leq \delta, \quad |f(x)-f(y)| \leq K' |x-y|^{\inf(\gamma, 1)}.$$

Appendice : I - Etude de la condition (8) :

$$x_{h-1} < n_{h-1} ,$$

$$\text{ou } x_{h-1} \geq n_{h-1} \text{ et } v\left(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1} - d}\right) = 0 ,$$

$$x_{h-1} \text{ et } n_{h-1} \text{ appartenant à } [0, p-1] , n_{h-1} \neq 0 .$$

Soit $b \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, et a , $b \leq a \leq p-1$; posons :

$$S(a, b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a-1} + \dots + \frac{1}{a-b+1} ,$$

et $v(a, b) = v(S(a, b)) .$

On obtient les propriétés suivantes :

$$(1) \quad v(a, 1) = 0 \quad \forall a \in [1, p-1] ,$$

$$(2) \quad v(a, b) > 0 \Rightarrow v(a, b+1) = 0 \quad \text{et} \quad v(a+1, b+1) = 0 .$$

Soit b et b' : $1 \leq b < b' \leq p-1$:

$$(3) \quad v(a, b') > 0 \Rightarrow v(a, b) = 0 \Leftrightarrow v(a-b, b'-b) = 0 ,$$

$$v(a, b) > 0 \Rightarrow v(a, b') = 0 \Leftrightarrow v(a-b, b'-b) = 0 .$$

$$S(a, 2) = \frac{2a-1}{a(a-1)} , \quad \text{on en déduit que :}$$

$$(4) \quad v(a, 2) > 0 \Leftrightarrow a = \frac{p+1}{2} .$$

$$(5) \quad v\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a-d}\right) > 0 \Leftrightarrow d \text{ impair et } a = \frac{p+d}{2} .$$

Ce qui entraîne la propriété suivante :

$$(6) \quad 1 \leq m \leq \frac{p-1}{2} , \Rightarrow v\left(\frac{p+2m-1}{2}, 2m\right) \geq 1 ,$$

$$\text{en particulier } v(p-1, p-1) \geq 1 ,$$

enfin : (7) $v(a, b) > 0 \Rightarrow v(a+1, b) = 0$ si $a \leq p-2$ et $v(a, b-1) = 0$
si $b \geq 2$.

On peut porter dans un tableau triangulaire les valeurs de $v(a, b)$; les remarques précédentes permettent déjà de déterminer des couples (a, b) tels que $v(a, b) > 0$, et d'autres tels que $v(a, b) = 0$; un tel tableau est facile à construire dès que l'on connaît p ; enfin on peut remarquer que pour tout b appartenant à $\{1, \dots, p-2\}$ il existe a tel que $a \geq b$ et $v(a, b) = 0$.

La condition (β) peut encore s'exprimer par :

$$(\beta) \Leftrightarrow x_{h-1} < n_{h-1} \quad \text{ou} \quad x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et} \quad v(x_{h-1}, n_{h-1}) = 0,$$

et la condition contraire :

$$\text{non } (\beta) \Leftrightarrow x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et} \quad v(x_{h-1}, n_{h-1}) > 0.$$

II - Condition suffisante pour que $w_f(k) = \rho_f(k)$:

Nous nous placerons seulement dans le cas où P admet une droite d'appui D de pente un, P n'ayant qu'un sommet sur D :

$$\inf (\lambda_h - h) = C_o = \lambda_{h_o} - h_o,$$

$$h \neq h_o, \quad \lambda_h - h > C_o.$$

On se pose alors le problème suivant :

Problème : Soit $A = \{n ; v(a_n) = \lambda_{h_o} \text{ et } p^{h_o-1} \leq n < p^{h_o}\}$ et soit $k > h_o$, existe-t-il : $\bar{n} \in A$, X et $Y \in Z_p$ tels que :

$$1) \quad v(X-Y) = k,$$

$$2) \quad v(Q_n(X) - Q_n(Y)) = k+1-h_o,$$

$$3) \quad \forall n \neq \bar{n}, \quad n \in A, \quad v(Q_n(X) - Q_n(Y)) > k+1-h_o.$$

Si ce problème admet une solution, alors pour le couple X, Y trouvé :

$$v(a_n) + v(Q_n(X) - Q_n(Y)) = k+1 - C_o = \rho_f(k) ,$$

et pour tout n strictement positif distinct de $\bar{n}$:

$$v(a_n) + v(Q_n(X) - Q_n(Y)) > k+1 + C_o ,$$

cela soit à cause de $v(a_n)$ si $n \notin A$, soit à cause de 3) si $n \in A$; par conséquent si ce problème est résolu :

$$\omega_f(k) = \rho_f(k) .$$

Les éléments X et Y cherchés sont caractérisés par les conditions suivantes, portant sur leur h_o premiers chiffres :

$$(\alpha) \text{ pour } \bar{n} : x_o \geq n_o \dots x_{h_o-2} \geq \bar{n}_{h_o-2} ,$$

$$\text{et } (\beta) \text{ pour } \bar{n} : x_{h_o-1} < \bar{n}_{h_o-1} \text{ ou } x_{h_o-1} \geq \bar{n}_{h_o-1} \text{ et } v(x_{h_o-1}, \bar{n}_{h_o-1}) = 0 ,$$

$$\text{et pour } n \neq \bar{n} \text{ non } (\alpha) : \exists i(n) \leq h_o-2 , x_i < n_i ,$$

$$n \in A \quad \text{ou}$$

$$\text{non } (\beta) : x_{h_o-1} \geq n_{h_o-1} \quad v(x_{h_o-1}, n_{h_o-1}) > 0 .$$

Pour avoir (α) pour $\bar{n}$ et non (α) pour le plus possible d'éléments de A , il y a intérêt à avoir un $\bar{n}$ dont les chiffres soient assez petits.

Associons à l'ensemble A , l'ensemble A' ainsi défini :

$$A' = \{n' = n_o + \dots + n_{h_o-2} p^{h_o-2} \quad \exists n_{h-1} , n' + n_{h_o-1} p^{h_o-1} = n \in A\} ,$$

sur A' , la relation :

$$n' < \bar{n}' \Leftrightarrow n_i \leq \bar{n}_i , \quad 0 \leq i \leq h-2 ,$$

est une relation d'ordre ; A' admet des éléments minimaux pour cette relation d'ordre.

Si l'un d'eux $\bar{n}'$ correspond à un seul $\bar{n}$ de A , on choisit cet $\bar{n}$.

Si tout élément minimal $\bar{n}'$ correspond à plusieurs $\bar{n}$ de A on associe à chacun des éléments minimaux $\bar{n}'$ l'ensemble :

$$B(\bar{n}') = \{n_{h_o-1}, \bar{n}' + n_{h_o-1} p^{h_o-1} \in A\}.$$

Dans le premier cas où $\bar{n}$ est le seul élément de A correspondant à un élément minimal $\bar{n}'$ alors par construction, pour :

$$x_o = \bar{n}_o, \dots, x_{h_o-2} = \bar{n}_{h_o-2} \quad \text{et} \quad x_{h_o-1} < \bar{n}_{h_o-1},$$

les conditions : (α) pour $\bar{n}$, (β) pour $\bar{n}$, et non (α) pour $n \neq \bar{n}$ seront satisfaites et on aura obtenu une solution du problème.

Dans le deuxième cas, pour un des $\bar{n}'$, minimaux, on choisit $(x_i = \bar{n}_i \quad 0 \leq i \leq h_o-2)$; ainsi pour tout n associé à $\bar{n}'$ on aura (α) , et non (α) pour tout n non associé à $\bar{n}'$. Il reste à obtenir x_{h_o-1} et $\bar{n}_{h_o-1} \in B(\bar{n}')$ pour que :

$$(\beta) \text{ pour } x_{h_o-1} \text{ et } \bar{n}_{h_o-1},$$

et non (β) pour x_{h_o-1} et $n_{h_o-1} \in B(\bar{n}')$, $n_{h_o-1} \neq \bar{n}_{h_o-1}$, c'est-à-dire :

$$x_{h_o-1} \geq n_{h_o-1} \quad \text{et} \quad v(x_{h_o-1}; n_{h_o-1}) > 0,$$

$$\forall n_{h_o-1} \neq \bar{n}_{h_o-1}, \quad n_{h_o-1} \in B(\bar{n}'),$$

si nous définissons, pour $a = 1, \dots, p-1$:

$$I_a = \{1 \leq b \leq a, \quad v(a, b) > 0\},$$

l'étude faite dans I permet de remarquer que I_a contient au plus $\frac{a+1}{2}$ éléments, et donc que son complémentaire en contient au moins $p-1 - \frac{a+1}{2}$; d'autre part non (β) pour a et b signifie que $b \in I_a$.

On obtient alors la condition suffisante suivante :

Si pour les $\bar{n}'$ minimaux, il existe un $\bar{n}'$ tel que l'on puisse trouver x_{h_0-1} tel que $B(\bar{n}') \cap I_{x_{h_0-1}}$ soit réduit à un seul élément $\bar{n}_{h_0-1}$ (ce qui est réalisé en particulier si $B(\bar{n}')$ n'a qu'un élément), alors :

$$x_0 = \bar{n}_0, \dots, x_{h_0-2} = \bar{n}_{h_0-2} \text{ et } x_{h_0-1},$$

sont les h_0 premiers chiffres de X et Y , et $\bar{n} = \bar{n}' + \bar{n}_{h_0-1} \cdot p^{h_0-1}$,
et le problème posé a une solution $(\bar{n}, X, Y)$.

Cette condition ne sera pas réalisée si $B(\bar{n}')$ a trop d'éléments.

Résultats ultérieurs

Si K est un corps local, π une uniformisante, A l'anneau de valuation et M un compact régulier [1] contenu dans A :

$$M = \varprojlim M_k, \quad M_k = M / \pi^{k_M} M, \quad N_k = \text{card } M_k = q_1, \dots, q_k,$$

les résultats précédents se généralisent à l'espace $\mathcal{C}(M, A)$ [2]. De plus pour une fonction $f \in \mathcal{C}(M, A)$, on obtient [3] la généralisation des résultats de Mahler [4] pour l'existence de $f'(x)$, et aussi une condition nécessaire et suffisante pour que f soit uniformément et continûment dérivable dans M , condition portant sur les coefficients a_n d'interpolation de f sur une suite $TBRBO$ [1], [2] dans M . En particulier :

. si pour un entier positif n , on note $h(n)$ l'entier tel que

$$N_{h(n)-1} \leq n < N_{h(n)},$$

alors :

. si $v(a_n) - m h(n) v(\pi)$ tend vers l'infini avec n , f est m fois uniformément et continûment dérivable

et

. une condition nécessaire et suffisante pour que f soit Lipschitzienne dans M est qu'il existe C tel que :

$$v(a_n) - h(n) v(\pi) \geq C v(\pi) \quad \forall n \geq 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. AMICE. - Bull. Soc. Math. Fr. , 92 , 1964, p. 117-180
(Thèse math. , Paris, 1963).
- [2] E. HELSMOORTEL. - Comptes rendus, 268, 1969, p. 1168.
- [3] E. HELSMOORTEL. - Comptes rendus, (à paraître).
- [4] K. MAHLER. - J. Reine. Angew. Math. , 199, 1958, p. 23-34.
