Séminaire "Sophus Lie"

P. Cartier

Cohomologie des coalgèbres

Séminaire "Sophus Lie", tome 2 (1955-1956), exp. n° 5, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1955-1956__2__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire "Sophus LIE"
Année 1955/56
-:-:-:-

Exposé n° 5

COHOMOLOGIE DES COALGÈBRES

(Exposé de P. CARTIER, le 17.2.1956)

1.- Rappels sur les complexes.

Soit K un anneau commutatif avec unité. On rappelle qu'un K-module gradué est un module M muni d'une décomposition en somme directe de sous-modules M^p ($p \in \mathbb{Z}$) ; si M et N sont deux modules gradués, un homomorphisme f de M dans N est dit de degré s si l'on a $f(M^p) \subset N^{p+s}$ pour tout p. Les homomorphismes de degré s de M dans N forment un sous-module $\mathfrak{L}_K(M, N)_s$ du module $\mathfrak{L}_K(M, N)$ de toutes les applications linéaires de M dans N. On note $\mathfrak{L}'_K(M, N)$ le sous-module de $\mathfrak{L}_K(M, N)$ somme des $\mathfrak{L}_K(M, N)_s$; ces derniers modules définissent alors une graduation de $\mathfrak{L}'_K(M, N)$. Si $f \in \mathfrak{L}'_K(M, N)$ et si $g \in \mathfrak{L}'_K(N, P)$, alors $g \circ f$ appartient à $\mathfrak{L}'_K(M, P)$: plus précisément, si f est de degré s et g de degré t, alors $g \circ f$ est de degré $s + t$.

Un complexe $\mathcal{M} = (M, d)$ est un module gradué muni d'un opérateur d de degré 1 tel que $d \circ d = 0$ (d est la "différentielle" de $\mathcal{M}$). Les éléments de M^p annulés par d forment un sous-module $Z^p(\mathcal{M})$ de M^p, le groupe des "cycles" ; l'image $d.M_{p-1}$ de d dans M_p est le groupe $B^p(\mathcal{M})$ des "bords". Le quotient $H^p(\mathcal{M}) = Z^p(\mathcal{M})/B^p(\mathcal{M})$ est le p-ème groupe d'homologie ; on note $H^*(\mathcal{M}) = H^*(M, d)$ le module gradué somme directe des $H^p(\mathcal{M})$. Le complexe $\mathcal{M}$ est dit acyclique si $H^*(\mathcal{M}) = 0$, ou, ce qui revient au même, si la suite des homomorphismes $d : M^p \longrightarrow M^{p+1}$ est exacte.

Soient $\mathcal{M} = (M, d)$ et $\mathcal{M}' = (M', d')$ deux complexes ; un homomorphisme de complexes de degré s de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ est une application linéaire f de degré s de M dans M' telle que $d' \circ f = (-1)^s f \circ d$; de plus, les homomorphismes f et g de degré s de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ seront dits homotopes s'il existe une application linéaire p de degré $s-1$ de M dans M' telle que $f - g = d' \circ p - (-1)^{s-1} p \circ d$. Un homomorphisme f de degré s de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ applique $Z^p(\mathcal{M})$ dans $Z^p(\mathcal{M}')$ et $B^p(\mathcal{M})$ dans $B^p(\mathcal{M}')$; par passage au

quotient f définit alors une application linéaire f^* de degré s de $H^*(\mathcal{M})$ dans $H^*(\mathcal{M}')$.

On aura $f^* = g^*$ si f et g sont homotopes ; de plus si $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ et $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}''$ sont des homomorphismes de complexes, il en est de même de $g \circ f$ et l'on a $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$. Pour toute suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{M}' \xrightarrow{g} \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$ d'homomorphismes de degré 0 de complexes, on peut définir un opérateur de degré 1 , soit ∂ , qui applique $H^*(\mathcal{M}'')$ dans $H^*(\mathcal{M})$. On a alors une suite exacte :

$$\longrightarrow H^p(\mathcal{M}) \xrightarrow{f^*} H^p(\mathcal{M}') \xrightarrow{g^*} H^p(\mathcal{M}'') \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(\mathcal{M}') \xrightarrow{g^*}$$

appelée <u>suite exacte d'homologie</u> ; de plus si l'on a un diagramme commutatif dont les deux lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow[f']{} & N' & \xrightarrow[g']{} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

alors on a : $\alpha^* \circ \partial = \partial \circ \gamma^*$.

Si M et N sont deux complexes, leur <u>produit tensoriel</u> est défini par le module $M \otimes N$ gradué par les sous-modules $\sum_{p+q=n} M^p \otimes N^q$ et par la différentielle d définie par $d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^p x \otimes dy$ si x est de degré p .

Un <u>complexe augmenté</u> $(\mathcal{M} , \varepsilon)$ est un complexe $\mathcal{M}$ tel que $M^p = 0$ pour $p < 0$, muni d'un homomorphisme ε de K dans M^0 tel que $d \circ \varepsilon = 0$. Il sera dit acyclique si la suite $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\varepsilon} M^0 \xrightarrow{d} M^1 \xrightarrow{d} \ldots$ est exacte, ou ce qui revient au même, si $H^p(\mathcal{M}) = 0$ pour $p > 0$ et si ε induit un isomorphisme de K sur $H^0(\mathcal{M})$.

Une suite exacte $f^i : M^i \longrightarrow M^{i+1}$ $(i \in [a , b[\,)$ sera dite <u>scindée</u> si elle vérifie l'une des conditions suivantes équivalentes :

a) Pour tout i , le sous-module $f^i(M^i)$ est facteur direct dans M^{i+1}

b) Pour tout module N , le foncteur $M \longrightarrow \mathcal{L}_K(M , N)$ transforme la suite exacte donnée en une suite exacte.

b') Idem que b) avec le foncteur $M \longrightarrow \mathcal{L}_K(N , M)$.

c) Il existe une suite d'homomorphisme $s^i : M^i \longrightarrow M^{i-1}$ $(i \in]a, b])$ tels que $s^{i+1} \circ f^i + f^{i-1} \circ s^i$ soit l'identité dans M^i pour $i \in]a, b[$.

Si pour tout i , le sous-module $f^i(M^i)$ est libre, la suite exacte formée par les f^i sera scindée ; il en est en particulier ainsi lorsque les M^i sont des modules libres sur un anneau principal.

Un <u>complexe augmenté</u> $(\mathcal{M}, \varepsilon)$ sera dit <u>scindé</u> si la suite $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\varepsilon} M^0 \xrightarrow{d} M^1 \longrightarrow \ldots$ est une suite exacte scindée. Si les complexes augmentés $(\mathcal{M}, \varepsilon)$ et $(\mathcal{M}', \varepsilon')$ sont scindés, il en sera de même du complexe augmenté $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}', \varepsilon \otimes \varepsilon')$ et du complexe augmenté déduit de $(\mathcal{M}, \varepsilon)$ par toute extension de l'anneau des scalaires.

Un <u>bicomplexe</u> $\mathcal{F}$ est un K-module F muni d'une décomposition en somme directe de sous-modules $F^{p,q}$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ et de deux opérateurs linéaires d_I et d_{II} jouissant des propriétés suivantes :

(1) $\qquad d_I d_I = d_I d_{II} + d_{II} d_I = d_{II} d_{II} = 0$

(2) $\qquad d_I(F^{p,q}) \subset F^{p+1,q} \qquad\qquad d_{II}(F^{p,q}) \subset F^{p,q+1}$

A ce bicomplexe $\mathcal{F}$, on peut associer un certain nombre de complexes : tout d'abord $\mathcal{F}^{*,q}$ est le complexe défini par le module $\sum_p F^{p,q}$ gradué par les modules $F^{p,q}$ $(p \in \mathbb{Z})$, et par la différentielle d_I ; le complexe $\mathcal{F}^{p,*}$ est défini de manière symétrique ; enfin si l'on pose $\hat{F}^s = \prod_{p+q=s} F^{p,q}$, le module gradué $\sum_s \hat{F}^s$ et la différentielle $d = d_I + d_{II}$ définissent un complexe $\hat{\mathcal{F}}$. Les éléments de $\hat{F}^s$ sont donc les suites f d'éléments $f^p \in F^{p,s-p}$ et l'on a

(3) $\qquad (df)^p = d_I f^{p-1} + d_{II} f^p$

Considérons un bicomplexe $\mathcal{F}$ tel que l'on ait $F^{p,q} = 0$ pour $p > a$, a étant un entier fixé. L'image de l'application linéaire $d_I : \mathcal{F}^{a,*} \longrightarrow \mathcal{F}^{a-1,*}$ est un sous-complexe de $\mathcal{F}^{a,*}$ puisque d_I et d_{II} anticommutent ; nous appellerons $\mathcal{G}$ le complexe $\mathcal{F}^{a,*}/d_I \mathcal{F}^{a-1,*}$ et π l'homomorphisme canonique de complexes de $\mathcal{F}^{a,*}$ sur $\mathcal{G}$. Dans ces conditions, l'application ρ : $h \longrightarrow \pi(h^a)$ de $\hat{\mathcal{F}}$ dans $\mathcal{G}$ est de degré $-a$, car pour $h \in \hat{F}^s$ on a $h^a \in F^{a,s-a}$ et $\rho(h) = \pi(h^a) \in G^{s-a}$; de plus, ρ commute aux différentielles

de $\hat{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{G}$, car on a :

$$\rho(dh) = \pi((dh)^a) = \pi(d_I(h^{a-1})) + \pi(d_{II}(h^a)) = d(\pi(h^a)) = d(\rho(h))$$

étant donné que $\pi \circ d_I = 0$ par définition de π .

Nous allons alors prouver le lemme suivant :

LEMME 1.- Soit $\mathcal{F}$ un bicomplexe et soient a et s deux entiers. On suppose :

a) $F^{p,q} = 0$ pour $p > a$.

b) $H^i(d_I, \mathcal{F}^{*,q}) = 0$ pour $q > s-a$, $i < a$

Dans ces conditions, l'application ρ de $\hat{\mathcal{F}}$ dans $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{a,*}/d_I\mathcal{F}^{a-1,*}$ définit un isomorphisme de $H^s(\hat{\mathcal{F}})$ sur $H^{s-a}(\mathcal{G})$.

Nous gardons les notations introduites plus haut.

a) tout cycle de degré s-a de G est l'image par ρ d'un cycle de degré s de $\hat{F}$.

Soit $x \in G^{s-a}$ tel que $dx = 0$ et soit $h^a \in F^{a,s-a}$ tel que $x = \pi(h^a)$. Si l'on pose $h^i = 0 \in F^{i,s-i}$ pour $i > a$, l'égalité

$$(E_i) \qquad d_I h^{i-1} + d_{II} h^i = 0$$

est trivialement vérifiée pour $i > a$ puisque le premier membre de (E_i) appartient à $F^{i,s-i+1}$ qui est réduit à 0 pour $i > a$ d'après a) .

Soit alors b un entier $\leqslant a$ quelconque et supposons définis pour $i \geqslant b$ des éléments $h^i \in F^{i,s-i}$ tels que l'on ait (E_i) pour $i > b$. En particulier, on aura pour $i = b + 1$

$$(4) \qquad d_I h^b + d_{II} h^{b+1} = 0 \quad .$$

Si $b = a$, on a $\pi(d_{II}(h^a)) = d(\pi(h^a)) = dx = 0$ et par conséquent, comme le noyau de π est $d_I\mathcal{F}^{a-1,*}$, il existe $h^{a-1} \in F^{a-1,s-a+1}$ tel que $d_{II}h^a = -d_I h^{a-1}$ et la condition (E_a) est vérifiée. Si au contraire, on a $b < a$, on aura $d_I(d_{II}h^b) = -d_{II}d_I h^b = d_{II}d_{II}h^{b+1} = 0$ d'après (4), autrement dit $d_{II}h^b \in Z^b(\mathcal{F}^{*,s-b+1})$; d'après l'hypothèse b) applicable car $s-b+1 > s-a$ et $b < a$, il existe un élément $h^{b-1} \in F^{b-1,s-b+1}$ tel que $d_{II}h^b = -d_I h^{b-1}$ et la condition (E_b) est vérifiée.

Par récurrence, on construit alors une suite h d'éléments $h^i \in F^{i,s-i}$ vérifiant (E_i) pour tout i , donc telle que $dh = 0$, et telle que $\pi(h^a) = x$.

b) Tout cycle h de degré s de $\hat{F}$ tel que $\pi(h^a)$ soit le bord d'un élément de G^{s-a-1} , est un bord.

On a donc $\pi(h^a) = dx$ avec $x \in G^{s-a-1}$; soit alors $p^a \in F^{a,s-a-1}$ tel que $\pi(p^a) = x$ et soit pour $i > a$, $p^i = 0 \in F^{i,s-i-1}$. Dans ces conditions, l'égalité :

$$(F_i) \qquad h^i = d_I p^{i-1} + d_{II} p^i$$

sera vérifiée pour $i > a$, puisque les deux membres appartiennent à $F^{i,s-i}$ qui est réduit à 0 pour $i > a$.

Soit alors b un entier $\leq a$ et supposons construits pour $i \geq b$ des éléments $p^i \in F^{i,s-i-i}$ de sorte que les égalités (F_i) soient vérifiées pour $i > b$. Si $b = a$, on a $\pi(h^a) = d(\pi(p^a)) = \pi(d_{II}(p^a))$ et par suite π annule $h^a - d_{II}p^a$; il en résulte l'existence d'un élément p^{a-1} de $F^{a-1,s-a}$ tel que $h^a - d_{II}p^a = d_I p^{a+1}$. Si, au contraire, on a $b < a$, on aura :

$$d_I(h^b - d_{II}p^b) = - d_{II}h^{b+1} + d_{II}d_I p^b = - d_{II}(h^{b+1} - d_I p^b) = - d_{II}d_{II}p^{b+1} = 0$$

d'après la condition (F_{b+1}) . Autrement dit $h^b - d_{II}p^b$ appartient à $Z^b(\mathfrak{F}^{*,s-b})$; comme on a $b < a$ et $s-b > s-a$, on peut appliquer l'hypothèse b) et on en déduit l'existence de $p^{b-1} \in F^{b-1,s-b}$ tel que $h^b - d_{II}p^b = d_I p^{b-1}$. Dans les deux cas envisagés, on a construit $p^{b-1} \in F^{b-1,s-b}$ vérifiant (F_b) ; par récurrence, on construit donc $p = (p^i) \in \hat{F}^s$ tel que toutes les égalités (F_i) soient satisfaites, ce qui signifie $h = dp$.

C.Q.F.D.

2.- Définition des foncteurs Ext de modules sur une coalgèbre.

Nous supposons désormais fixée une coalgèbre A sur l'anneau K .

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux complexes de A-modules (Exposé 4, numéro 7). On définit un bicomplexe $\mathfrak{F} = F(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ de la manière suivante : $F^{p,q} = \mathrm{Hom}_A(M^{-p}, M'^q)$ et pour $f \in F^{p,q}$, on pose $d_I f = f \circ d_{-p-1}$ et $d_{II}f = (-1)^{p+q} d'_q \circ f$. Le module $\hat{F}^s$ n'est alors autre que le module noté F_s dans l'exposé 4, numéro 7, et la différentielle d de $\hat{F}$ n'est autre que l'opérateur noté δ dans l'exposé 4, numéro 7. Nous poserons alors $T^s(\mathcal{M}, \mathcal{M}') = H^s(\hat{\mathfrak{F}})$;

si $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ sont trois complexes de A-modules, pour tout $f \in \hat{F}^s(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$ et $g \in \hat{F}^t(\mathscr{M}', \mathscr{M}'')$, on a $g \circ f \in \hat{F}^{s+t}(\mathscr{M}, \mathscr{M}'')$ et

$$(5) \qquad \delta(g \circ f) = (\delta g) \circ f + (-1)^t g \circ (\delta f)$$

Il en résulte immédiatement que si f et g sont des cycles, c'est-à-dire des homomorphismes de complexes de A-modules, il en est de même de $g \circ f$. Par passage au quotient, la composition définit une application bilinéaire de $T^s(\mathscr{M}, \mathscr{M}') \times T^t(\mathscr{M}', \mathscr{M}'')$ dans $T^{s+t}(\mathscr{M}, \mathscr{M}'')$ et l'on a une formule d'associativité pour le cas de 4 complexes.

Nous supposerons désormais que les complexes envisagés sont nuls en degrés < 0 ; de plus, modifiant en apparence la définition de l'exposé 4, numéro 7, nous appellerons résolution d'un A-module M la donnée d'un complexe $\mathscr{M}$ de A-modules (nul en degré 0) et d'un A-homomorphisme ε de M dans M^0 tel que $d_0 \circ \varepsilon = 0$.

Soient alors M et M' deux A-modules, $(\mathscr{M}, \varepsilon)$ une résolution $\mathfrak{C}$-acyclique de M et $(\mathscr{M}', \varepsilon')$ une résolution $\mathfrak{E}$-injective de M'. Par définition même des A-modules $\mathfrak{C}$-injectifs, la suite :

$$\ldots \longrightarrow F^{p,q} \longrightarrow F^{p+1,q} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F^{0,q} \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, M'^q) \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout p, et l'on a $F^{p,q} = 0$ pour $p > 0$. Appliquant alors le lemme 1, on voit que l'on peut identifier $T^s(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$ au module $H^s(\mathrm{Hom}'_A(M, \mathscr{M}'))$ (le groupe gradué $\mathrm{Hom}'_A(M, \mathscr{M}') = \sum_q \mathrm{Hom}_A(M, M'^q)$ étant muni de la différentielle $f \longrightarrow d' \circ f$). D'autre part, comme $d' \circ \varepsilon' = 0$, l'image de l'application $f \longrightarrow \varepsilon' \circ f$ de $\mathrm{Hom}_A(M, M')$ dans $\mathrm{Hom}_A(M, M'^0)$ se compose de cycles de degré 0 ; comme $\mathrm{Hom}_A(M, M'^{-1}) = 0$, on a défini une application linéaire π de $\mathrm{Hom}_A(M, M')$ dans $T^0(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$; si la suite $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M'^0 \longrightarrow M'^1$ est exacte, cette application est bijective. Interprétant le résultat obtenu, on peut énoncer :

LEMME 2.- Soient $(\mathscr{M}, \varepsilon)$ une résolution $\mathfrak{C}$-acyclique du A-module M et $(\mathscr{M}', \varepsilon')$ une résolution $\mathfrak{E}$-injective du A-module M'. Pour tout A-homomorphisme f de M dans M', il existe un homomorphisme h de degré 0 du complexe $\mathscr{M}$ de A-modules dans le complexe $\mathscr{M}'$ de A-modules tel que $\varepsilon' \circ f = h^0 \circ \varepsilon$, et, à une homotopie près, un seul.

Il résulte aussitôt de la définition de l'application $\pi : \mathrm{Hom}_A(M, M') \longrightarrow T^0(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$ qu'elle est compatible avec la composition au sens suivant :

si $(\mathcal{M}', \varepsilon')$ est une résolution $\mathcal{E}$-acyclique et $\mathcal{E}$-injective de M' et si $(\mathcal{M}'', \varepsilon'')$ est une résolution $\mathcal{E}$-injective d'un troisième A-module M'', on a $\pi(g \circ f) = \pi(g)\pi(f)$ pour $f : M \longrightarrow M'$ et $g : M' \longrightarrow M''$.

A tout A-module M, on a associé une résolution $\mathcal{E}$-acyclique et $\mathcal{E}$-injective $(\mathcal{R}(M), \varepsilon)$ (Exposé 4, numéro 7, lemme 2) : on a $R^0(M) = A \otimes M$ et $R^{i+1}(M) = A \otimes (R^i(M)/d^{i-1}(R^{i-1}(M)))$, ε étant l'application Δ_M et l'application d^i étant composée de l'application canonique $A \otimes R^i(M) \longrightarrow A \otimes P$ et de Δ_P (où $P = R^i(M)/d^{i-1}(R^{i-1}(M))$).

Par définition, nous poserons :

$$\boxed{\mathrm{Ext}_A^i(M , M') = T^i(\mathcal{R}(M) , \mathcal{R}(M'))}$$

La composition $\mathrm{Ext}_A^j(M , M') \times \mathrm{Ext}_A^j(M' , M'') \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{i+j}(M , M'')$ est définie par la composition entre les $T(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$. Cette composition est associative, en particulier, pour tout A-module M, $\mathrm{Ext}_A^*(M , M) = \sum_i \mathrm{Ext}_A^i(M , M)$ est une algèbre associative graduée.

Il résulte de ce qu'on a vu avant le lemme 2, que l'on peut identifier $\mathrm{Ext}_A^i(M , M')$ à $H^i(\mathrm{Hom}_A(M , \mathcal{R}(M'))$ et $\mathrm{Ext}_A^0(M , M')$ à $\mathrm{Hom}_A(M , M')$, cette dernière identification étant compatible avec la composition. De là et du lemme 2, on définit que si $\mathcal{P}$ est une résolution $\mathcal{E}$-acyclique de M et $\mathcal{Q}$ une résolution $\mathcal{E}$-acyclique et $\mathcal{E}$-injective de M', et si l'on désigne par j (resp. j') l'image dans $T^0(\mathcal{P} , \mathcal{R}(M))$ de $1 \in \mathrm{Hom}_A(M , M)$ (resp l'image dans $T^0(\mathcal{R}(M'), \mathcal{Q})$ de $1 \in \mathrm{Hom}_A(M' , M')$) (cf. lemme 2), l'application $f \longrightarrow j'fj$ est un isomorphisme de $T^s(\mathcal{P} , \mathcal{Q})$ sur $\mathrm{Ext}_A^s(M , M')$.

Comme on peut identifier $\mathrm{Hom}_A(M , M')$ et $\mathrm{Ext}_A^0(M , M')$, pour tout couple de A-homomorphismes $f : N \longrightarrow M$ et $g : M' \longrightarrow N'$, l'application $h \longrightarrow ghf$ applique $\mathrm{Ext}_A^i(M , M')$ dans $\mathrm{Ext}_A^i(N , N')$; l'associativité et la bilinéarité de la composition entre les Ext montre alors que $\mathrm{Ext}_A^i(M , M')$ est un foncteur covariant additif en M' et un foncteur contravariant additif en M.

Avant de définir la suite exacte des Ext, nous remarquerons que $\mathcal{R}(M)$ dépend fonctoriellement de M. De manière précise, soit donné un A-homomorphisme $f : M \longrightarrow N$; nous poserons $R^0(f) = 1_A \otimes f$ d'où résulte par la définition des A-homomorphismes que l'on a $R^0(f) \circ \varepsilon = \varepsilon \circ f$. Soient alors définies des

applications linéaires $R^i(f)$ de $R^i(M)$ dans $R^i(N)$ pour $i \leq p$ telles que $d^{i-1} \circ R^{i-1}(f) = R^i(f) \circ d^{i-1}$ pour $i \leq p$; si l'on pose $P = R^p(M)/d^{p-1}(R^{p-1}(M))$ et $Q = R^p(N)/d^{p-1}(R^{p-1}(N))$, l'application $R^p(f)$ applique $d^{p-1}(R^{p-1}(M))$ dans $d^{p-1}(R^{p-1}(N))$ donc passe au quotient et définit une application g de P dans Q qui est un homomorphisme de A-modules ; par suite l'application $1 \otimes g = R^{p+1}(f)$ de $A \otimes P = R^{p+1}(M)$ dans $A \otimes Q = R^{p+1}(N)$ vérifie la condition $d^p \circ R^p(f) = R^{p+1}(f) \circ d^p$. On a donc construit par récurrence les composantes d'un homomorphisme $\mathcal{R}(f)$ de degré 0 de $\mathcal{R}(M)$ dans $\mathcal{R}(N)$ tel que $R^0(f) \circ \varepsilon = \varepsilon \circ f$. De plus par récurrence sur p, on vérifie immédiatement que $R^p(g \circ f) = R^p(g) \circ R^p(f)$, que $R^p(1_M) = 1_{R^p(M)}$ et que le foncteur R^p transforme une suite $\mathcal{E}$-exacte en une suite exacte "scindée".

Soit alors $0 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite $\mathcal{E}$-exacte de A-modules ; pour tout A-module N et tout entier p, le A-module $R^p(N)$ étant $\mathcal{E}$-injectif, on aura une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', R^p(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M', R^p(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, R^p(N)) \longrightarrow 0$$

d'où une suite exacte de complexes de K-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}'_A(M'', \mathcal{R}(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}'_A(M', \mathcal{R}(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}'_A(M, \mathcal{R}(N)) \longrightarrow 0$$

On en déduit immédiatement une suite exacte d'homologie (cf n° 1) :

$$(6) \quad \begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M'', N) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M', N) \ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M, N) \longrightarrow \\ \ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_A(M'', N) \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

De plus, on a une suite exacte scindée $0 \longrightarrow \mathcal{R}(M) \longrightarrow \mathcal{R}(M') \longrightarrow \mathcal{R}(M'') \longrightarrow 0$ de complexes de A-modules d'après ce qui précède, d'où une suite exacte de complexes de K-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, \mathcal{R}(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, \mathcal{R}(M')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, \mathcal{R}(M'')) \longrightarrow 0$$

pour tout A-module P. On en déduit alors une suite exacte analogue à la suite (6) et qui commence par :

$$(6') \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P,M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P,M'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(P,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(P,M') \longrightarrow \ldots$$

3.- Interprétation des Ext au moyen des suites $\mathcal{E}$-exactes :

DÉFINITION 1.- Soient M et N deux A-modules. On appelle extension de M par N la donnée d'un A-module P et d'une suite $\mathcal{E}$-exacte :

(E) $\qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$

Deux extensions $(E_i) : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha_i} P_i \xrightarrow{\beta_i} M \longrightarrow 0$ avec $i = 1, 2$, seront dites équivalentes s'il existe un A-homomorphisme f de P_1 dans P_2 tel que $\alpha_2 = f \circ \alpha_1$ et $\beta_1 = \beta_2 \circ f$.

On montre immédiatement qu'un homomorphisme f vérifiant la condition de la définition 1 est un isomorphisme, ce qui montre que la relation introduite ici entre extensions de M par N est une relation d'équivalence.

L'image de 1_N par l'application linéaire de $\mathrm{Hom}_A(N, N)$ dans $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$ définie par la suite $\mathcal{E}$-exacte (E) (cf. (6)) s'appelle la classe caractéristique de l'extension (E) et se note $j_{(E)}$.

Soit pour $i = 1, 2$ une suite $\mathcal{E}$-exacte :

$(E_i) \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha_i} P_i \xrightarrow{\beta_i} M_i \longrightarrow 0$

et soient $f : P_1 \longrightarrow P_2$ et $g : M_1 \longrightarrow M_2$ des A-homomorphismes tels que $f \circ \alpha_1 = \alpha_2$ et $g \circ \beta_1 = \beta_2 \circ f$. On en déduit un diagramme commutatif de complexes de K-modules :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}'_A(M_1, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}'_A(P_1, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}'_A(N, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow g^* & & \uparrow f^* & & \uparrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}'_A(M_2, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}'_A(P_2, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}'_A(N, \mathcal{R}(N)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et par suite d'après les résultats rappelés au n° 1 (suite exacte d'homologie), le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \mathrm{Ext}^1_A(M_1, N) \\ & & \uparrow g^* \\ \mathrm{Hom}_A(N, N) & & \\ & \searrow & \mathrm{Ext}^1_A(M_2, N) \end{array}$$

Ceci démontre la formule $j(E_1) = j(E_2)g$ et montre en particulier que $j_{(E)}$ ne dépend que de la classe de l'extension (E) .

Soit Q un A-module quelconque ; nous allons expliciter au moyen de $j_{(E)}$ l'application $\partial : \mathrm{Ext}^i(N, Q) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(M, Q)$ associée à la suite $\mathcal{E}$-exacte (E) . Tout élément $f \in \mathrm{Ext}^i(N, Q)$ peut être représenté par un A-homomorphisme $f' : N \longrightarrow R^i(Q)$ tel que $d^i \circ f' = 0$; comme $R^i(Q)$ est $\mathcal{E}$-injectif et que la suite $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} P$ est $\mathcal{E}$-exacte, on peut écrire $f' = g' \circ \alpha$ avec $g' : P \longrightarrow R^i(Q)$. On a alors $(d^i \circ g') \circ \alpha = d^i \circ f' = 0$ et comme $\alpha(N)$ est le noyau de β , il existe $h' : M \longrightarrow R^{i+1}(Q)$ tel que $d^i \circ g' = h' \circ \beta$.

Autrement dit, on a un diagramme commutatif :

$$(S') \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f'}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle g'} & & \swarrow{\scriptstyle h'} & & & \\ & & R^i(Q) & \xrightarrow{d^i} & R^{i+1}(Q) & & & & \end{array}$$

Il résulte de la définition de ∂ , que pour tout diagramme commutatif tel que (S') , si f' représente $f \in \mathrm{Ext}_A^i(N,Q)$, alors h' représente $\partial f \in \mathrm{Ext}_A^{i+1}(M,Q)$. En particulier, on aura un diagramme commutatif :

$$(S'') \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \searrow{\scriptstyle \varepsilon} & \downarrow{\scriptstyle g''} & & \downarrow{\scriptstyle h''} & & \\ & & & & R^0(N) & \longrightarrow & R^1(N) & & \end{array}$$

où h'' représente $j_{(E)}$.

Mais, on sait qu'il existe un homomorphisme (f^k) de degré i de complexes de A-modules de $\mathcal{R}(N)$ dans $\mathcal{R}(Q)$ tel que $f' = f^0 \circ \varepsilon$. On voit immédiatement que dans le diagramme (S') , on peut choisir $g' = f^0 \circ g''$ et $h' = f^1 \circ h''$ et la dernière de ces deux formules implique :

$$(7) \qquad \partial f = f j_{(E)}$$

PROPOSITION 1.- L'application qui à toute extension (E) de M par N associe la classe caractéristique $j_{(E)}$ définit une bijection φ de l'ensemble des classes d'extension de M par N sur $\mathrm{Ext}_A^1(M,N)$.

Il suffit de démontrer que pour tout A-homomorphisme h'' de M dans $R^1(N)$ tel que $d^1 \circ h'' = 0$, il existe à un isomorphisme près, une manière et une seule de compléter le diagramme commutatif (S'') . Le lecteur vérifiera aisément que l'on y parvient par la construction suivante :

P est le noyau de l'application $(x , y) \longrightarrow d^0(x) - h''(y)$ de $R^0(N) \times M$ dans $R^1(N)$, les applications g'' et β sont respectivement les restrictions à P des projections canoniques de $R^0(N) \times M$ sur ses deux facteurs ; enfin on a pour $x \in N$ la formule $\alpha(x) = (\varepsilon(x), 0)$.

C.Q.F.D.

REMARQUES : 1) L'application de $\mathrm{Ext}_A^i(Q,M)$ dans $\mathrm{Ext}_A^{i+1}(Q,N)$ associée à la suite exacte (E) est l'application $f \longrightarrow \pm j_{(E)} f$.

2) Les résultats précédents se généralisent au cas de $n > 0$ quelconque ; à toute suite $\mathcal{E}$-exacte :

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow N \longrightarrow X^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

on associe un élément $j_{(E)}$ de $\mathrm{Ext}_A^n(M,N)$. La composition entre les Ext correspond à la juxtaposition des suites $\mathcal{E}$-exactes ; l'application $(E) \longrightarrow j_{(E)}$ est surjective et l'on a $j_{(E_1)} = j_{(E_2)}$ si et seulement si l'on peut trouver une suite $\mathcal{E}$-exacte (E) et des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \nearrow & X^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X^n & \searrow & \\ & & & \searrow & \downarrow & & & & \downarrow & & M \longrightarrow 0 \\ & & & & X^1_{(i)} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X^n_{(i)} & \nearrow & \end{array} \qquad i = 1, 2 .$$

4.- Complexe standard.

On suppose désormais que la coalgèbre A possède une unité u , donc que l'on a $\Delta_A(u) = u \otimes u$ et $\varepsilon_A(u) = 1$ (cf exposé 4, numéro 1). Le module A est donc somme directe de A^+ et de $K.u$; de cette décomposition en somme directe, on déduit des décompositions des produits tensoriels $A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$ en somme directe de produits tensoriels dont les facteurs sont égaux à A^+ ou $K.u$.

On notera a^+ la composante de $a \in A$ selon A^+ et $\delta(a)$ la composante de $\Delta_A(a)$ selon $A^+ \otimes A^+$; on a donc :

$$a^+ = a - \varepsilon_A(a).u \qquad (a \in A) \tag{9}$$

$$\delta(a) = \Delta_A(a) - a \otimes u - u \otimes a \qquad (a \in A^+) \tag{10}$$

et la composante de $(\Delta_A \otimes 1)(\Delta_A(a))$ selon $A^+ \otimes A^+ \otimes A^+$ sera égale à $(\delta \otimes 1)(\delta(a))$; de là on déduira la formule :

$$(\delta \otimes 1) \circ \delta = (1 \otimes \delta) \circ \delta \tag{11}$$

On définit sur K une structure de A-module en posant $\Delta_K(\lambda) = u \otimes \lambda$ pour $\lambda \in K$; on posera alors :

$$H^i(A) = \mathrm{Ext}_A^i(K,K) \qquad H^*(A) = \sum_{i \geq 0} H^i(A)$$

L'algèbre graduée $H^*(A)$ se nomme l'algèbre de cohomologie de la coalgèbre A . Nous allons donner, dans le cas général, puis dans un cas particulier, des procédés de calcul de cette algèbre de cohomologie.

Soit donnée une algèbre différentielle (B, δ) , c'est-à-dire un complexe muni d'une loi de composition bilinéaire associative avec unité, telle que l'application $x \otimes y \longrightarrow xy$ soit un homomorphisme de degré 0 du complexe $B \otimes B$ dans le complexe B ; autrement dit, on a $B^m B^n \subset B^{m+n}$ et

$$\delta(xy) = \delta(x)y + (-1)^m x\, \delta(y) \qquad x \in B^m \qquad y \in B \tag{12}$$

On suppose de plus donnée une application linéaire d^0 de A dans $B^1 \otimes A$.

Sur $C = B \otimes A$, on définit alors les structures suivantes :

a) une graduation, par les sous-modules $C^n = B^n \otimes A$

b) une structure de A-module par l'application diagonale $1_B \otimes \Delta_A$

c) une structure de B-module à gauche par la loi externe :

$$x.(y \otimes a) = xy \otimes a \qquad a \in A \ , \quad x, y \in B \tag{13}$$

les homothéties $h_x : c \longrightarrow x.c$ de C sont alors des A-endomorphismes.

d) un endomorphisme d de C par

$$d(x \otimes a) = \delta(x) \otimes a + (-1)^n x.d^0(a) \qquad a \in A \ , \quad x \in B^n \tag{14}$$

e) un opérateur ε de K dans C^0 par :

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda u \otimes 1 \qquad \lambda \in K \tag{15}$$

L'opérateur d de C dans C est de degré $+1$, de plus pour $x \in B^n$ et $c \in C$, on a la relation :

$$d(x.c) = \delta(x).c + (-1)^n x.d(c) \tag{16}$$

Cette formule se déduit en effet par linéarité du cas où $c = y \otimes a$ ($y \in B^m$, $a \in A$) , lui-même conséquence immédiate des formules (13) et (14) . De plus, on a $d(\varepsilon(\lambda)) = \lambda d^0(u)$ et

$$\begin{aligned} d(d(x \otimes a) &= d(\delta(x) \otimes a)) + (-1)^n d(x.d^0(a)) \\ &= \delta(\delta(x)) \otimes a + (-1)^{n+1} \delta(x).d^0(a) + (-1)^n \delta(x).d^0(a) + \\ &\quad + (-1)^{n+n} x.d(d^0(a)) \\ &= x.d(d^0(a)) \qquad \text{pour } a \in A \text{ et } x \in B^n \end{aligned}$$

Par suite si $d \circ d^0 = 0$ et si $d^0(u) = 0$, on aura défini un complexe augmenté (C , d , ε) .

L'opérateur d de C^n dans C^{n+1} est somme de l'application $\delta \otimes 1_A$ qui est un A-homomorphisme et de l'application $x \otimes a \longrightarrow (-1)^n x.d^0(a)$, elle-même composée de l'application $x \otimes a \longrightarrow (-1)^n x \otimes d^0(a)$ de $B^n \otimes A$ dans $B^n \otimes (B^1 \otimes A)$ et du A-homomorphisme $x \otimes y \otimes a \longrightarrow xy \otimes a$ de $B^n \otimes B^1 \otimes A$ dans $B^{n+1} \otimes A$. Par suite si d^0 est un A-homomorphisme, d sera un A-homomorphisme et on aura défini une résolution $\mathfrak{C}$-injective (C , d , ε) de K (considéré comme A-module par Δ_K) .

LEMME 3.- Soient données une algèbre différentielle B et une application d^0 de A dans $B^1 \otimes A$. Supposons :

a) d^0 est un A-homomorphisme et $d \circ d^0 = 0$, $d^0(u) = 0$.

b) la résolution $\mathcal{C}$-injective (C , d , ε) de K construite précédemment à l'aide de B et d^0 est $\mathcal{C}$-acyclique.

Dans ces conditions $H^*(A)$ est canoniquement isomorphe à $H^*(B , \delta)$ et cet isomorphisme est compatible avec les structures multiplicatives.

Soient P un K-module et $x \in P \otimes A$; munissons $P \otimes A$ de l'application diagonale $\Delta = 1_P \otimes \Delta_A$ qui en fait un A-module. Si $x = p \otimes u$ avec $p \in P$, on aura $\Delta(x) = p \otimes u \otimes u = x \otimes u$; inversement, supposons que l'on ait $\Delta(x) = x \otimes u$; posant $h = 1_P \otimes (P_A \circ (\varepsilon_A \otimes 1_A))$, on en déduit au moyen de la formule (3) de l'exposé 4, la relation $x = h(1_P \otimes \Delta_A)(x)) = h(x \otimes u)$ que x est de la forme $p \otimes u$, puisque les éléments de l'image de h sont de cette forme. De ceci, on déduit que les A-homomorphismes de K dans $P \otimes A$ sont les applications de la forme $\lambda \longrightarrow \lambda\, p \otimes u$ avec $p \in P$.

D'après les hypothèses, le complexe augmenté (C , d , ε) est une résolution $\mathcal{C}$-acyclique et $\mathcal{C}$-injective de K considéré comme A-module par Δ_K . A tout endomorphisme f de degré s du A-module gradué C , associons le A-homomorphisme $f \circ \varepsilon$ de K dans C ; d'après ce qui précède, on a $f(\varepsilon(1)) = x \otimes u$ avec $x \in B^s$ bien déterminé. Comme l'application $f \longrightarrow f \circ \varepsilon$ détermine un isomorphisme par passage à l'homologie et comme on a $d(x \otimes u) = \delta(x) \otimes u$, on voit en combinant que si à f on associe l'élément $\alpha(f) = x \in B^s$ défini par $f(1 \otimes u) = x \otimes u$, on obtient par passage à l'homologie un isomorphisme α^* de $H^s(A) = T^s(\mathcal{C} , \mathcal{C})$ sur $H^s(B , \delta)$. Mais comme la formule (16) s'écrit $h_{\delta(x)} = d \circ h_x - (-1)^s h_x \circ d$ pour $x \in B^s$, l'application $x \longrightarrow h_x$ est un homomorphisme β du complexe (B , δ) dans le complexe $\hat{F}(\mathcal{C} , \mathcal{C})$; il est clair que $h_x(1 \otimes u) = x \otimes u$, donc $\alpha(\beta(x)) = x$. Mais comme $h_x \circ h_{x'} = h_{xx'}$, l'isomorphisme β^* de $H^*(B , \delta)$ sur $H^*(A)$ inverse de α^* est compatible avec les structures multiplicatives.

C.Q.F.D.

On va appliquer ce lemme général à la construction du complexe standard. Nous prolongerons l'application linéaire δ de A^+ dans $A^+ \otimes A^+$ en une antidérivation de degré +1 de l'algèbre tensorielle $T(A^+)$ en posant : (*)

(*) Dans cette formule et celles qui suivent, on omet le signe $\otimes$ de multiplication dans une algèbre tensorielle.

(17) $$\delta(a_1 \dots a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_1 \dots \delta(a_i) \dots a_n \qquad a_i \in A^+$$

La formule (11) exprime que la dérivation $\delta \circ \delta$ de $T(A^+)$ est nulle sur A^+ qui engendre $T(A^+)$ donc est identiquement nulle.

Posons $d^0(a) = \Delta_A(a) - u \otimes a$ pour $a \in A$; comme Δ_A est un A-homomorphisme de A muni de Δ_A dans $A \otimes A$ muni de $1_A \otimes \Delta_A$, il est immédiat que d^0 est un A-homomorphisme. Posant $B = T(A^+)$ et appliquant les constructions du début de ce numéro, on obtient un opérateur d sur $T(A^+) \otimes A$, qu'on explicitera en remarquant que $d^0(a) = \delta(a^+) + a^+ \otimes u$, d'où

(18) $$d(a_1 \dots a_n \otimes a) = (-1)^n a_1 \dots a_n . \delta(a^+) + (-1)^n a_1 \dots a_n a^+ \otimes u + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_1 \dots \delta(a_i) \dots a_n \otimes a$$

Comme $u^+ = 0$, on a $d^0(u) = 0$ et de plus ,

$$d(d^0(a)) = d(\delta(a^+)) + d(a^+ \otimes u) = -(1 \otimes \delta)(\delta(a^+)) - \delta(a^+) \otimes u + (\delta \otimes 1)(\delta(a^+)) + d(a^+ \otimes u) = 0$$

Soient $C^{-1} = K$, $d^{-1} = \varepsilon$ et C' le complexe ainsi défini à l'aide de C par $C^i = 0$ pour $i < -1$. On va montrer que l'opérateur s défini dans C' par

(19) $$s(a_1 \dots a_n \otimes a) = (-1)^{n-1} \varepsilon_A(a)\, a_1 \dots a_{n-1} \otimes a_n$$

est une homotopie, c'est-à-dire que l'on a $sd + ds = 1$. Or :

$$s(d(a_1 \dots a_n \otimes a)) = (-1)^{n+n} a_1 \dots a_n \otimes a^+ + \varepsilon_A(a)(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} a_1 \dots \dots \delta(a_i)\, a_{n-1} \otimes a_n + (-1)^{n+n-1} \varepsilon_A(a)\, a_1 \dots a_{n-1} . \delta(a_n)$$

$$d(s(a_1 \dots a_n \otimes a)) = (-1)^{n-1} \varepsilon_A(a) \Big\{ (-1)^{n-1} a_1 \dots a_{n-1} . \delta(a_n) + (-1)^{n-1} a_1 \dots a_n \otimes u + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} a_1 \dots \delta(a_i) \dots a_{n-1} \otimes a_n \Big\}$$

et par suite :

$$(sd + ds)(a_1 \dots a_n \otimes a) = a_1 \dots a_n \otimes (a^+ + \varepsilon_A(a)u)) = a_1 \dots a_n \otimes a \ .$$

La formule $sd + ds = 1$ montre que le complexe C' de K-modules est scindé, donc que la suite $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\varepsilon} C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} \dots$ est $\mathcal{E}$-exacte, ce qui permet d'appliquer le lemme 3 :

PROPOSITION 2.- Soit A une coalgèbre avec une unité u. L'algèbre de cohomologie $H^*(A)$ de A s'identifie à l'algèbre d'homologie de $T(A^+)$ muni de la différentielle :

$$(20) \qquad \delta(a_1 \dots a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_1 \dots a_{i-1}\, \delta(a_i) a_{i+1} \dots a_n$$

avec $\delta(a) = \Delta_A(a) - u \otimes a - a \otimes u$ pour $a \in A^+$.

Il en résulte en particulier que $H^1(A)$ est le sous-module des éléments primitifs de A^+, c'est-à-dire des x tels que $\Delta_A(x) = x \otimes u + u \otimes x$. De même $H^2(A)$ est le quotient du noyau de l'application $\delta \otimes 1 - 1 \otimes \delta$ de $A^+ \otimes A^+$ dans $A^+ \otimes A^+ \otimes A^+$ par l'image de $\delta : A^+ \longrightarrow A^+ \otimes A^+$.

REMARQUES : 1) Par une construction à celle qui conduit à la proposition 2, on démontre que l'on peut identifier $H^*(A)$ à l'algèbre d'homologie de $T(A)$ pour la différentielle :

$$d(a_1 \dots a_n) = u a_1 \dots a_n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_1 \dots \Delta_A(a_i) \dots a_n + (-1)^{n+1} a_1 \dots a_n u$$

2) De l'interprétation donnée plus haut de $H^2(A)$, on déduit facilement une correspondance biunivoque entre les éléments de $H^2(A)$ et les classes d'équivalence de suites exactes scindées de K-modules $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 0$, où B est munie d'une structure de coalgèbre telle que α soit un homomorphisme de coalgèbre et que pour tout $x \in B^+$, on ait $\delta(x) \in \alpha(A^+) \otimes \alpha(A^+)$.

5.- Cohomologie de la coalgèbre $\Gamma(M)$.

Soit M un K-module ; on a défini (exposé 3) l'algèbre $\Gamma(M)$ comme l'algèbre commutative définie par les générateurs $m^{(h)}$ $(m \in M\ ;\ h \in \mathcal{N})$ et les relations :

$$(21) \qquad (m + m')^{(h)} = \sum_{i=0}^{h} m^{(i)} m'^{(h-i)}$$

$$(22) \qquad (\lambda m)^{(h)} = \lambda^h m^{(h)}$$

$$(23) \qquad m^{(h)} m^{(k)} = (h+k)!/h!k!\ m^{(h+k)} \qquad m^{(0)} = 1$$

On a défini une application diagonale Δ de $\Gamma(M)$ dans $\Gamma(M) \otimes \Gamma(M)$ par

$$(24) \qquad \Delta(m^{(h)}) = \sum_{i=0}^{h} m^{(i)} \otimes m^{(h-i)}$$

Nous allons étudier la cohomologie de $\Gamma(M)$ considérée seulement comme coalgèbre. Dela formule (24), résulte que si l'on pose $u = 1$, on a bien une unité au sens de l'exposé 4, numéro 1 et que les éléments $m^{(1)}$ sont primitifs.

De plus, on a $\delta(m^{(2)}) = m^{(1)} \otimes m^{(1)}$; par suite, l'application $m \longrightarrow m^{(1)}$ de M dans $H^1(\Gamma(M))$ se prolonge en un homomorphisme φ de l'algèbre extérieure $\Lambda(M)$ dans $H^*(\Gamma(M))$.

PROPOSITION 3.- Si le module M est libre, l'application φ est un isomorphisme d'algèbre de $\Lambda(M)$ sur $H^*(\Gamma(M))$.

Munissons l'algèbre graduée de la différentielle nulle et soit p le projecteur de $\Gamma(M)$ sur $\Gamma^1(M) = M = \Lambda^1(M)$ qui associe à un élément de $\Gamma(M)$ sa composante de degré 1 . L'application $d^0 = (1_{\Gamma(M)} \otimes p) \circ \Delta$ de $\Gamma(M)$ dans $\Gamma(M) \otimes M$ est un homomorphisme de modules sur la coalgèbre $\Gamma(M)$ qui annule $u = 1$ puisque $d^0(1) = 1 \otimes p(1) = 0$. On définit à l'aide de d^0 un opérateur d de degré +1 dans $C(M) = \Gamma(M) \otimes \Lambda(M)$ gradué par les sous-modules $\Gamma(M) \otimes \Lambda^i(M)$. Comme on a :

$$(25) \qquad d^0(m_1^{(h_1)} \dots m_r^{(h_r)}) = \sum_{i=1}^{r} m_1^{(h_1)} \dots m_i^{(h_i-1)} \dots m_r^{(h_r)} \otimes m_i$$

on aura :

$$d(d(m_1^{(h_1)} \dots m_r^{(h_r)}) = \sum_{i,j} m_1^{(h_1)} \dots m_i^{(h_i-1)} \dots m_j^{(h_j-1)} \dots \otimes (m_i \wedge m_j)$$

$$+ \sum_i m_1^{(h_1)} \dots m_i^{(h_i-2)} \dots m_r^{(h_r)} \otimes (m_i \wedge m_i)$$

$$= 0$$

Il en résulte alors que $C(M)$ est un complexe (cf. numéro 4).

Il résulte des propriétés connues des algèbres extérieures et des propriétés de $\Gamma(M)$ démontrées dans l'exposé 3 que l'on a $C(M + M') = C(M) \otimes C(M')$ (produit tensoriel de complexes) à un isomorphisme canonique près.

Or, si le module M admet une base (m_i) , l'ensemble I d'indices étant totalement ordonné, le complexe $C(M)$ admet pour base les éléments $Z_\alpha \otimes m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_n}$ (avec $Z_\alpha = \prod_i m_i^{(\alpha_i)}$ pour $\alpha = (\alpha_i) \in \mathfrak{N}^{(I)}$) lorsque α parcourt l'ensemble $\mathfrak{N}^{(I)}$ et que $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ parcourt l'ensemble des suites strictement croissantes d'éléments de I . De plus, on a :

$$(26) \qquad d(Z_\alpha \otimes m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_n}) = \sum_j (-1)^k Z_{\alpha - \varepsilon_j} \otimes m_{i_1} \wedge \dots$$

$$\dots \wedge m_{i_k} \wedge m_j \wedge \dots \wedge m_{i_n}$$

ε_j étant l'élément de $\mathcal{N}^{(I)}$ dont la j^e coordonnée est 1 , les autres étant nulles, et la suite $\{i_1 , \dots , i_k , j , i_{k+1} , \dots , i_n\}$ étant strictement croissante. La formule (26) étant indépendante de l'anneau K , le complexe $\mathcal{C}(M)$ s'obtient par extension des scalaires à partir d'un complexe $\mathcal{C}_0$ sur l'anneau $\mathcal{Z}$ des entiers correspondant au module libre $\sum_i \mathcal{Z} m_i$.

Pour toute partie finie F de I , soit $\mathcal{C}_{0,F}$ le sous-complexe de $\mathcal{C}_0$ constitué par les combinaisons linéaires des $Z_\alpha \otimes m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_n}$ où les i_k sont dans F et $\alpha_r = 0$ pour $r \notin F$; le complexe $\mathcal{C}_0$ est réunion des sous-complexes $\mathcal{C}_{0,F}$. De plus $\mathcal{C}_{0,F}$ est isomorphe au complexe $\mathcal{C}(\sum_{i \in F} \mathcal{Z} m_i)$ lui-même isomorphe au produit tensoriel des complexes $\mathcal{C}(\mathcal{Z} m_i)$ pour $i \in F$ d'après ce qu'on a vu.

Le complexe $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}(\mathcal{Z} m_i)$ admet pour base les $u_n = Z_{n\varepsilon_i} \otimes 1$ et $v_n = Z_{n\varepsilon_i} \otimes m_i$ et l'on a $\varepsilon(1) = u_0$ et $du_n = v_{n-1}$ $(n \geq 1)$, $du_0 = 0$ et $dv_n = 0$ pour $n \geq 0$. On voit immédiatement que le complexe augmenté $(\mathcal{D}_i , \varepsilon)$ est scindé ; par passage au produit tensoriel, le complexe $(\mathcal{C}_{0,F} , \varepsilon)$ est donc scindé (cf. numéro 1) et comme le complexe $\mathcal{C}_0$ est réunion des complexes acyclique $\mathcal{C}_{0,F}$, le complexe augmenté $(\mathcal{C}_0 , \varepsilon)$ est acyclique . Or les modules $(\mathcal{C}_0)^n$ sont des modules libres sur l'anneau des entiers et le complexe augmenté $(\mathcal{C}_0 , \varepsilon)$ sera scindé (cf. numéro 1). Il en sera donc encore de même du complexe augmenté $(\mathcal{C}(M) , \varepsilon)$ qui s'en déduit par extension des scalaires de $\mathcal{Z}$ à K .

On peut donc appliquer le lemme 3 et identifier $H^*(\Gamma(M))$ à l'algèbre d'homologie de $\Lambda(M)$ muni de la différentielle nulle, c'est-à-dire à $\Lambda(M)$ lui-même ; on voit immédiatement que cette identification induit l'application $m \longrightarrow m^{(1)}$ de M dans $H^1(\Gamma(M))$, donc se fait au moyen de φ puisqu'elle est multiplicative.

COROLLAIRE.- Soit M un module libre admettant une base (m_i) , l'ensemble I d'indices étant totalement ordonné. Tout élément u de $\Gamma(M)^+ \otimes \Gamma(M)^+$ annulé par $\delta \otimes 1 - 1 \otimes \delta$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = \sum_{i<j} a_{ij} \, m_i^{(1)} \otimes m_j^{(1)} + v$$

avec $v \in \delta(\Gamma(M))$.

Cela résulte immédiatement de l'identification de $\Lambda^2(M)$ à $H^2(\Gamma(M))$.

REMARQUES : 1) Nous allons donner, d'après Lazard, une démonstration directe du corollaire de la proposition 3. Le module $A^+ \otimes A^+$ admet pour base les éléments $Z_\alpha \otimes Z_\beta$ avec $\alpha, \beta \neq 0$ et l'on a $\delta(Z_\alpha) = \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta,\gamma \neq 0}} Z_\beta \otimes Z_\gamma$; on voit immédiatement que les cycles de degré 2 du complexe standard sont les $u = \sum_{\alpha,\beta \neq 0} c(\alpha,\beta)\, Z_\alpha \otimes Z_\beta$ avec (*) $c(\alpha+\beta,\gamma) = c(\alpha,\beta+\gamma)$ pour $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ et que les bords sont les éléments de la forme précédente où $c(\alpha,\beta)$ ne dépend que de $\alpha+\beta$. Supposons que c remplisse la condition (*) et soit γ avec $|\gamma| > 2$; soient i et j tels que $\gamma \geq \varepsilon_i, \varepsilon_j$; on aura

$$c(\gamma - \varepsilon_i, \varepsilon_i) = c((\gamma - \varepsilon_i - \varepsilon_j) + \varepsilon_j, \varepsilon_i) = c(\gamma - \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j)$$

donc $c(\gamma - \varepsilon_i, \varepsilon_i) = d(\gamma)$ ne dépend pas de l'indice i choisi pourvu que $\gamma \geq \varepsilon_i$. Si $\gamma \geq \delta$, on aura alors, avec i tel que $\delta \geq \varepsilon_i$, la formule

$$c(\gamma - \delta, \delta) = c(\gamma - \delta, (\delta - \varepsilon_i) + \varepsilon_i) = c(\gamma - \delta + \delta - \varepsilon_i, \varepsilon_i) = d(\gamma)$$

De là on déduit $u = \delta\left(\sum_{|\alpha|>2} d(\alpha) Z_\alpha\right) + \sum_{i,j} a_{ij}\, m_i \otimes m_j$; la formule $\delta(m_i m_j) = m_i \otimes m_j + m_j \otimes m_i$ achève immédiatement la démonstration.

2) Le corollaire montre en particulier que si $u \in \Gamma^+(M) \otimes \Gamma^+(M)$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 annulé par $\delta \otimes 1 - 1 \otimes \delta$, il est de la forme $\delta(v)$. Inversement si une coalgèbre A vérifie cette propriété et si A_m désignant la filtration canonique (exposé 2) de A , on suppose que les modules A_m/A_{m-1} sont libres et que Δ_A applique A dans les éléments symétriques de $A \otimes A$, alors A est , en tant que coalgèbre isomorphe à $\Gamma(A_1 \cap A^+)$. On procède par récurrence, supposant que A_m admet une base Z_α avec $|\alpha| \leq m$ telle que $\Delta_A(Z_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} Z_\beta \otimes Z_\gamma$; si $|\alpha| = m+1$ l'élément $\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta,\gamma\neq 0}} Z_\beta \otimes Z_\gamma$ de $A_m^+ \otimes A_m^+$ est de la forme $\delta(u)$ avec $u \in A_{m+1}^+ = A_m \cap A^+$ d'après l'hypothèse cohomologique faite sur A ; notant Z_α un tel élément, on a construit les α pour $|\alpha| \leq m+1$; si alors $x \in A_{m+1}^+$, $\delta(x) \in A_m^+ \otimes A_m^+$ est de la forme $\sum_{|\alpha|\leq m+1} \lambda_\alpha\, \delta(Z_\alpha)$ d'après ce qu'on a montré dans la remarque 1 ; il s'ensuit que $x - \sum_\alpha \lambda_\alpha Z_\alpha$ est primitif donc dans A_1^+ et par suite que les Z_α avec $|\alpha| \leq m+1$ sous-tendent A_{m+1}^+ ; l'indépendance linéaire des Z_α se démontre aisément par récurrence sur $|\alpha|$.