Séminaire "Sophus Lie"

M. Lazard

# Théorie des répliques. Critère de Cartan

*Séminaire "Sophus Lie"*, tome 1 (1954-1955), exp. n° 6, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A9_0>

© Séminaire "Sophus Lie"
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Exposé n° 6

# THÉORIE DES RÉPLIQUES. CRITÈRE DE CARTAN

(Exposé de M. LAZARD, le 14.12.54)

## 1.- Résultats préliminaires sur les matrices.

Notations. K corps de caractéristique 0

$\mathfrak{M}$ espace vectoriel de rang fini sur K

$\mathfrak{M}^*$ dual de $\mathfrak{M}$

$\mathfrak{M}_{r,s}$ produit tensoriel de r espaces isomorphes à $\mathfrak{M}$ et de s espaces isomorphes à $\mathfrak{M}^*$

$\mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ est l'algèbre de Lie des endomorphismes de $\mathfrak{M}$.

Si L est un surcorps de K, on désigne par $\mathfrak{M}^L$ l'espace vectoriel sur L obtenu par extension du corps des scalaires $\mathfrak{M}^L = \mathfrak{M} \otimes_K L$. Si X est un K-endomorphisme $X^L$ est le L-endomorphisme de $\mathfrak{M}^L$ qui se réduit à X sur $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^L$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires sur les endomorphismes X de $\mathfrak{M}$, qui sont d'ailleurs classiques. Faisons d'abord la remarque que le choix d'un endomorphisme X de $\mathfrak{M}$ définit une structure de K[x]-module sur $\mathfrak{M}$ par la loi $P.m = P(X).m$ ($P \in K[x]$ et x une indéterminée).

Proposition 1. Le bicommutant de X est formé des polynomes en X.

A = K[x] étant un anneau principal, ce résultat est impliqué par le suivant :

M étant un module de type fini sur l'anneau principal A, l'ensemble des endomorphismes du groupe M qui commutent à tous les A-endomorphismes est identique aux homothéties par les éléments de A.

En effet M est somme directe de sous-modules monogènes $M_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) de générateurs $e_i$, l'annulateur de $e_i$ étant l'idéal $\alpha_i$ de sorte que $\alpha_i \subset \alpha_{i+1}$. Si f commute aux A-endomorphismes, il commute aux projecteurs $E_i$ de la décomposition $M = \Sigma M_i$ donc f conserve les $M_i$ et $f(e_i) = \lambda_i e_i$ ($\lambda_i \in A$). Mais comme $\alpha_i \subset \alpha_{i+1}$ il existe un A-endomorphisme p et un seul de M tel que $p(e_i) = e_{i+1}$ ($i < n$) $p(e_n) = 0$. Par suite comme f commute à p :

$$f(e_i) = f(p^{i-1}(e_1)) = p^{i-1} f(e_1)$$
$$= \lambda_1 p^{i-1} e_1 = \lambda_1 e_i$$

Les homothéties sont des A-endomorphismes et f commute donc aux homothéties donc est un A-endomorphisme.

f est l'homothétie de rapport $\lambda_1 \in A$ C.Q.F.D.

Proposition 2. Si X est un endomorphisme de $\mathcal{M}$ les conditions suivantes portant sur X sont équivalentes

1). Le $K[x]$-module $\mathcal{M}$ est semi-simple.

2). Il existe un polynôme P sans facteurs multiples tel que $P(X) = 0$

3). Si L est la clôture algèbrique de K, $X^L$ est réductible à la forme diagonale.

Si l'une de ces conditions est remplie, X est dit semi-simple.

1) $\Rightarrow$ 2) $\mathcal{M}$ est somme directe de modules simples $\mathcal{M}_i$ d'après 1). Soit $e_i \in \mathcal{M}_i$ $e_i \neq 0$. L'annulateur de $e_i$ est un idéal $(P_i)$. $P_i$ est irréductible : sinon soit $P_i = Q_i \cdot R_i$, $Q_i \cdot e_i = f_i \neq 0$ est annulé par $R_i$ donc engendre un module dont le rang sur K est le degré de $R_i$ donc plus petit que le rang de $\mathcal{M}_i$ sur K. Autrement dit le module engendré par $f_i$ est contenu dans $\mathcal{M}_i$ et distinct de (0) et $\mathcal{M}_i$ contrairement à l'hypothèse que $\mathcal{M}_i$ est simple. Si l'on prend pour P le produit des $P_i$ distincts, $P(X) = 0$ et P est sans facteur multiple.

2) $\Rightarrow$ 3) Puisque P est sans facteur multiple, P se décompose dans L en produit de facteurs linéaires distincts (car K est de caractéristique 0 donc parfait). $P(x) = \prod_i (x - \lambda_i)$. Alors $1 = \sum P_i(x)$ avec

$$P_i(x) = \frac{P(x)}{P'(\lambda_i)(x - \lambda_i)}$$

$E_i = P_i(X^L)$ applique $\mathcal{M}^L$ dans le sous-espace des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_i$ et s'annule sur les vecteurs propres associés à $\lambda_j$ si $j \neq i$. Par suite les $E_i$ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux et $X^L$ se réduit à un scalaire dans $\mathcal{M}_i = E_i \mathcal{M}^L$. Donc $X^L$ est diagonalisable.

3) $\Rightarrow$ 1) Soit $\mathcal{N}$ un sous-module de $\mathcal{M}$. Pour montrer que $\mathcal{M}$ est semi-simple il faut prouver qu'il existe un projecteur E de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{N}$ qui commute à X. Un tel E est défini par les équations suivantes :

(a) $\langle En , m' \rangle = \langle n , m' \rangle$ $\quad n \in \mathcal{N}$ $\quad m' \in \mathcal{M}^*$

(b) $\langle Em , n' \rangle = 0$ $\quad m \in \mathcal{M}$ $\quad n' \in \mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{M}^*$

(c) $\langle EXm , m' \rangle = \langle Em , {}^tXm' \rangle$ $\quad m \in \mathcal{M}$ $\quad m' \in \mathcal{M}^*$

$X^L$ étant diagonalisable, $\mathcal{M}^L$ est semi-simple donc il existe un projecteur E' commutant à $X^L$ de $\mathcal{M}^L$ sur $\mathcal{N}^L$, mais ceci signifie que les équations linéaires (a) (b) (c) à coefficients dans K ont une solution dans L elles ont donc une

solution dans $K$ . C.Q.F.D.

Proposition 3. On peut écrire $X = Y + Z$ $Y$ étant semi-simple et $Z$ nilpotent, $Y$ et $Z$ commutant. De plus une telle décomposition est unique et $Y$ et $Z$ s'expriment par des polynômes en $X$ . Tout élément annulé par $X$ est annulé par $Y$ et $Z$.

Il existe un polynôme $f$ sans facteur multiple et un entier $r > 0$ tel que $f(X)^r = 0$ . On va fabriquer des $g_i$ par récurrence sur $i$ pour satisfaire aux congruences

$$(A_q) \qquad f(x - \sum_{i=0}^{q} g_i(x)\, f^i(x)) \equiv 0 \mod f^{q+1}$$

On prend $g_0 = 0$ et $(A_0)$ est satisfaite. Supposons trouvés $g_0 \dots g_{n-1}$ et posons :

$$P = x - \sum_{i=0}^{n-1} g_i\, f^i$$

$$(1) \qquad f(P(x)) \equiv 0 \mod f^n$$

$(A_n)$ s'écrit $$f(P - g_n\, f^n) \equiv 0 \mod f^{n+1}$$

Mais par la formule de Taylor

$$f(P - g_n\, f^n) = f(P) - g_n\, f^n\, f'(P) + f^{n+1}\, R$$

or $f(P) = \varphi . f^n$ d'après (1) et il suffira pour $g_n$ de satisfaire à la congruence

$$(B) \qquad \varphi - g_n\, f' \equiv 0 \mod f$$

Or on peut résoudre (B) en $g_n$ car $f$ et $f'$ sont premiers entre eux.

En considérant la congruence $(A_{r-1})$ on trouve alors

$$(2) \qquad f(X - \sum_{i=0}^{r-1} g_i(X) f^i(X)) = 0 \quad \text{car} \quad f(X)^r = 0$$

Il suffit alors de poser $Z = \sum_{i=0}^{r-1} g_i(X)\, f^i(X)$ et $Y = X - Z$ ; comme $g_0 = 0$ $Z$ est divisible par $f(X)$ et donc $Z^r = 0$ . $f(Y) = 0$ d'après (2) et comme $f$ est sans facteur multiple $Y$ est semi-simple.

On a donc démontré l'existence d'une telle décomposition. Soit $X = Y' + Z'$ une autre décomposition avec $[Y',Z'] = 0$ . Alors $[X,Y'] = [X,Z'] = 0$ donc $Y'$ et $Z'$ commutent avec $Y$ et $Z$ . On a alors

$$Y + Z = Y' + Z' \qquad \text{donc} \qquad Y - Y' = Z' - Z$$

Mais la condition 3) de la prop.2 montre que $Y$ et $Y'$ semi-simples commutant, $Y-Y'$ est semi-simple. D'autre part $Z$ et $Z'$ commutent et sont nilpotents, et l'on voit sans mal que $Z - Z'$ est nilpotent. Or on voit facilement qu'il n'y a pas d'endomorphisme non nul qui soit semi-simple et nilpotent. Donc $Y = Y'$ $Z = Z'$. Soit

e tel que $X e = 0$ $Z = P(X)$ donc $Z e = P(0)e = \lambda e$ comme $Z^h = 0$ $\lambda = 0$ et $Z e = 0$ $Y e = X e - Z e = 0$

2.- Théorie des répliques.

La représentation linéaire $X \to X$ de $\mathcal{gl}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{M}$ se prolonge comme il a été dit au 1) de l'exposé n° 4 en une représentation $X \to X_{r,s}$ de $\mathcal{g}$ dans $\mathcal{M}_{r,s}$.

Définition 1 : $X' \in \mathcal{gl}(\mathcal{M})$ est appelé une réplique de $X$ si tout vecteur de $\mathcal{M}_{r,s}$ annulé par $X'_{r,s}$ est annulé par $X'_{r,s}$

Proposition 4. a). Si $X'$ est une réplique de $X$ et $X''$ une réplique de $X'$ $X''$ est réplique de $X$ .

b). Si $X'$ est réplique de $X$ , $X'_{r,s}$ est réplique de $X_{r,s}$

a) est tout à fait clair.

Pour démontrer b) il faut remarquer que $(\mathcal{M}_{r,s})_{r',s'}$ s'identifie à $\mathcal{M}_{rr'+ss',rs'+sr'}$ cette identification étant compatible avec les représentations de $\mathcal{g}$ données (cf exposé n° 4, 1) C.Q.F.D.

On a vu (exp. n° 4, 1) que $\mathcal{M}^* \otimes \mathcal{M}$ s'identifie à $\mathcal{L}(\mathcal{M},\mathcal{M}) = \mathcal{gl}(\mathcal{M})$ , la représentation de $\mathcal{g}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M},\mathcal{M})$ étant donnée par $\theta(X).f = X \circ f - f \circ X$ . Autrement dit

$$X_{1,1} f = [X,f]$$

Soit $X'$ une réplique de $X$ ; alors si $f$ commute à $X$ $X_{1,1} f = 0$ donc $X'_{1,1} f = 0$ et finalement $X'$ commute à $f$ . $X'$ est dans le bicommutant de $X$ donc (prop.1) $X' = P(X)$ , $P$ étant un polynôme. Il y a plus : on peut choisir ce polynôme sans terme constant. En effet deux cas sont à distinguer.

1) $X$ n'annule aucun vecteur de $\mathcal{M}$ . Alors son polynôme minimal a un terme constant non nul qu'on peut supposer égal à 1. Par suite $1 = Q(X)$ $Q$ sans terme constant. Mais alors dans $P(X)$ on peut remplacer le terme constant par un polynôme sans terme constant en $X$ .

2) $X$ annule un vecteur $e \neq 0$ . Alors $X'e = 0$ i.e $P(X)e = 0$ or puisque $Xe = 0$ $P(X)e = P(0)e = 0$ donc $P(0) = 0$

De plus comme $X'_{r,s}$ est réplique de $X_{r,s}$ $X'_{r,s} = P_{r,s}(X_{r,s})$ . La réciproque est évidente: si $X'_{r,s}$ est un polynôme sans terme constant en $X_{r,s}$ tout vecteur annulé par $X_{r,s}$ est annulé par $X'_{r,s}$ . Donc :

Proposition 5. Pour que $X'$ soit réplique de $X$ , il faut et il suffit que pour tout couple $(r,s)$ $X'_{r,s}$ s'exprime comme un polynôme sans terme constant en $X_{r,s}$

On va encore démontrer quelques propriétés des répliques, assez élémentaires mais essentielles par la suite.

Proposition 6. Si $Y$ et $Z$ sont respectivement les composantes semi-simple et nilpotent de $X$, $Y_{r,s}$, $Z_{r,s}$ sont respectivement les composantes semi-simples et nilpotentes de $X_{r,s}$.

En effet $Y_{r,s}$ est semi-simple (appliquer le 3) de la prop.2) $Z_{r,s}$ est nilpotent, et $[Y_{r,s}, Z_{r,s}] = [Y,Z]_{r,s} = 0$. Enfin $X_{r,s} = Y_{r,s} + Z_{r,s}$ ; l'unicité de la décomposition de $X_{r,s}$ permet de conclure :

Corollaire : $Y$ et $Z$ sont des répliques de $X$.

En effet $Y_{r,s}$ et $Z_{r,s}$ étant les composantes semi-simple et nilpotente respectivement de $X_{r,s}$ annulent tout vecteur annulé par $X_{r,s}$ (prop.3)

Enfin étudions l'effet d'une extension du corps de base.

Proposition 7 : Si $X'$ est une réplique de $X$, $X'^L$ est une réplique de $X^L$. Réciproquement toute réplique (dans $\mathfrak{M}^L$) de $X^L$ est combinaison linéaire à coefficients dans $L$ de répliques de $X$.

D'après la proposition 5 $X'_{r,s} = P(X_{r,s})$ donc $X'^L = P((X_{r,s})^L) = P((X^L)_{r,s})$ donc $X'^L$ est réplique de $X^L$. Réciproquement tout L-endomorphisme de $\mathfrak{M}^L$ est de la forme $Y = \Sigma \omega_i Y_i^L$ $Y_i \in \mathcal{C}l(\mathfrak{M}), \omega_i \in L$ linéairement indépendants.

$$Y_{r,s} = \Sigma \omega_i (Y_i)^L_{r,s}$$

Si un vecteur de $\mathfrak{M}_{r,s}$ est annulé par $Y_{r,s}$ il est donc annulé séparément par les $(Y_i)^L_{r,s}$ donc si $Y$ est réplique de $X^L$, tout vecteur de $\mathfrak{M}_{r,s}$ annulé par $X_{r,s}$ est annulé par les $(Y_i)_{r,s}$. C.Q.F.D.

## 3.- Le critère de nilpotence.

Théorème 1. Pour que $X$ soit nilpotent, il faut et il suffit que $\mathrm{Tr}(XX') = 0$ pour toute réplique $X'$ de $X$.

Si $X$ est nilpotent, comme $X'$ commute à $X$ $XX'$ est nilpotent et $\mathrm{Tr}(XX') = 0$.

Réciproquement soit $X = Y + Z$ la décomposition de $X$. $Y$ est une réplique de $X$ (prop. 6) donc si $Y'$ est une réplique de $Y$, elle est une réplique de $X$. Mais alors $Y'$ commute à $Z$ donc $Y'Z$ est nilpotent et $\mathrm{Tr}(Y'Z) = 0$. Comme par ailleurs $\mathrm{Tr}(Y'X) = 0$ on a $\mathrm{Tr}(YY') = 0$ et on est ramené à prouver ceci :

Soit $Y$ semi-simple tel que $\mathrm{Tr}(YY') = 0$ pour toute réplique $Y'$ de $Y$.

Alors $Y = 0$

En vertu de la proposition 7 on peut se limiter au cas où $K$ est algébriquement clos. Soit une base $\{e_i\}$ de $\mathcal{M}$ telle que $Y e_i = \lambda_i e_i$ . $Y'$ appartenant au bicommutant de $Y$ , $Y' e_i = \mu_i e_i$ . $Y_{r,s}$ est diagonale par rapport à la base $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \dots \otimes e^*_{j_s} = f_{i,j}$ ($\{e^*_i\}$ base de $\mathcal{M}^*$ duale de $\{e_i\}$) et multiplié l'élément écrit par $\lambda_{i_1} + \dots \lambda_{i_r} - \lambda_{j_1} \dots - \lambda_{j_s}$

Les éléments annulés par $Y_{r,s}$ sont donc combinaisons linéaires des $f_{i,j}$ tels que $\Sigma \lambda_{c_K} - \Sigma \lambda_{j_m} = 0$ . Si toute relation linéaire à coefficients entiers entre les $\lambda_i$ a lieu entre les $\mu_i$ alors $Y'_{r,s}$ annulent tous ces éléments et $Y'$ est réplique de $Y$ .

Supposons alors $Tr(YY') = 0$ et $Y \neq 0$ . Les $\lambda_i$ engendrent sur le sous corps premier $Q$ de $K$ un espace vectoriel $P \neq (0)$ . $Q$ est le corps des rationnels puisque $K$ est de caractéristique $0$ . Si $h \neq 0$ est une application $Q$-linéaire de $P$ dans $Q$ , et si $\mu_i = h(\lambda_i)$ toute relation entre les $\lambda_i$ a lieu entre les $\mu_i$ et $Y'$ est réplique de $Y$ . Donc $0 = Tr(YY') = \Sigma \lambda_i h(\lambda_i)$ . $h$ étant $Q$-linéaire et $h(\lambda_i) \in Q$ on a $\sum_i h(\lambda_i (h(\lambda_i)) = \sum_i h(\lambda_i)^2 = 0$ , mais on est dans le corps des rationnels et une somme de carrés non nuls ne peut être nulle. Par suite $h(\lambda_i) = 0$ $h = 0$ contrairement à ce qu'on a supposé. C.Q.F.D.

4.- Algèbres de Lie algébriques.

Définition 2 : une sous-algèbre de Lie $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}l(\mathcal{M})$ est dite algébrique si $X \in \mathcal{G}$ entraine que toute réplique $X'$ de $X$ est dans $\mathcal{G}$ .

Exemples : $\mathcal{G}l(\mathcal{M})$ est algébrique.

l'intersection de toutes les algèbres de Lie algébriques contenant $\mathcal{G}$ est une algèbre algébrique $\overline{\mathcal{G}}$ qu'on appelle l'enveloppe algébrique de $\mathcal{G}$.

Proposition 8. $\overline{\mathcal{G}}$ étant l'enveloppe algébrique de $\mathcal{G}$

1) tout idéal dans $\mathcal{G}$ reste un idéal dans $\overline{\mathcal{G}}$
2) le centre de $\mathcal{G}$ est contenu dans le centre de $\overline{\mathcal{G}}$
3) $\mathcal{G}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ ont même algèbre dérivée
4) si $\mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{G}$ , $[\overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{A}}] \subset \mathcal{G}$

on se sert pour démontrer cette proposition du lemme :

Lemme : Soient $P$ et $Q$ deux sous-espaces de $\mathcal{G}l(\mathcal{M})$ $Q \subset P$ . L'ensemble des $X \in \mathcal{G}l(\mathcal{M})$ tels que $\mathrm{ad}X.P \subset Q$ est une algèbre algébrique.

En effet $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m}) \simeq \mathfrak{M}_{1,1}$ $\quad adX = X_{1,1}$ . Alors si $X'$ est une réplique de $X$ $X'_{1,1} = adX'$ est un polynôme sans terme constant en $adX$ . Donc si $adX \,.P \subset Q$ $adX'.P \subset Q$

la proposition 8 se démontre alors sans mal

1) $P = Q = \mathfrak{a}$ $\quad \mathfrak{a}$ idéal de $\mathfrak{g}$
$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$

2) $Q = 0$ $\quad P = \mathfrak{z}$ (centre de $\mathfrak{g}$)
$[\mathfrak{g}, \mathfrak{z}] \subset (0) \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}}, z] \subset (0)$

3) $P = \mathfrak{g}$ $\quad Q = \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$
$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(2)} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(2)}$

Puis $P = \bar{\mathfrak{g}}$ $\quad Q = \mathfrak{g}^{(2)}$
$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(2)} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}] \subset \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

4) $P = \mathfrak{a}$ $\quad Q = \mathfrak{g}$
$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g}$

puis $P = \bar{\mathfrak{g}}$ $\quad Q = \mathfrak{g}$
$[\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{g}}] \subset \mathfrak{g} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{g}}] \subset \mathfrak{g}$

Corollaire : $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\bar{\mathfrak{g}}$ et $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ est abélien.

Proposition 9. Si $A$ est une algèbre (non nécessairement associative) de dimension finie sur $K$ , ses dérivations forment une algèbre de Lie algébrique.

Une multiplication dans $A$ est élément $\mu$ de $\mathfrak{L}(A \otimes A \,,\, A) \simeq A_{1,2}$ . Cherchons $X_{1,2} \cdot \mu$

$$\nu = X_{1,2} \cdot \mu = X \circ \mu - \mu \circ (1 \otimes X + X \otimes 1)$$

autrement dit

$$\nu(a \otimes b) = X\mu(a \otimes b) - \mu(a \otimes Xb + Xa \otimes b)$$
$$= X(a.b) - a.Xb - Xa.b$$

Que $X$ soit une dérivation équivaut donc à $\nu = X_{1,2}\, \mu = 0$ .
Si $X'$ est une réplique de $X$ $X'_{1,2}\mu = 0$ donc $X'$ est une dérivation de $A$ .

C.Q.F.D.

Proposition 10. Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ . $\mathfrak{N}$ désigne l'ensemble des $N \in \mathfrak{g}$ tels que $Tr(NX) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. $\mathfrak{N}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ . Tout élément de $[\mathfrak{N}, \mathfrak{g}]$ est nilpotent et il en est de même de tout élément de $\mathfrak{N}$ si $\mathfrak{g}$ est algébrique.

On vérifie facilement l'identité $Tr([X,Y]Z) = Tr(X[Y,Z])$ (utiliser $Tr(AB) = Tr(BA)$) . Donc si $X \in \mathfrak{g}$ $Y \in \mathfrak{g}$ $Z \in \mathfrak{N}$ $Tr([X,Y]Z) = 0$ et par suite $Tr(X[Y,Z]) = 0$ donc $[Y,Z] \in \mathfrak{N}$ . $\mathfrak{N}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ .

Si $\mathfrak{g}$ est algébrique et $N \in \mathfrak{N}$ on a $Tr(NN') = 0$ pour toute réplique $N'$ de $N$ donc (théorème 1) $N$ est nilpotent.

Dans le cas général soit $N \in \mathfrak{N}$ $X \in \mathfrak{g}$ $Y \in \overline{\mathfrak{g}}$. Alors $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ et $Tr([N,X]Y) = Tr(N[X,Y]) = 0$ donc $\sum [N_i, X_i]$ est nilpotent puisque ses répliques sont dans $\overline{\mathfrak{g}}$.

Théorème 2 : Si la forme bilinéaire $Tr(XY)$ est identiquement nulle sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ est résoluble.

En effet tout $X \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotent d'après la prop.10. Donc d'après Engel $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotent et $\mathfrak{g}$ est résoluble.

5.- Algèbres semi-simples. Critère de Cartan.

Définition 3 : Une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle ne possède pas d'idéal résoluble. Une algèbre de Lie est dite simple si elle est de dimension $> 1$ et qu'elle n'a pas d'idéal non trivial.

Il résulte de cette définition que toute algèbre simple est semi-simple.

Théorème 3 : (Cartan) : 1) si $\mathfrak{g}$ est semi-simple et $\theta$ une représentation fidèle de $\mathfrak{g}$, $Tr(\theta(x)\theta(y))$ est une forme bilinéaire non dégénérée.

2) Si la forme de Killing $B(x,y) = Tr(adx\ ady)$ est non dégénérée $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Les $n \in \mathfrak{g}$ tels que $Tr(\theta(x)\theta(n)) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ forment un idéal $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{g}$ d'après la proposition 10. On a $Tr(\theta(n)\theta(n')) = 0$ $(n,n' \in \mathfrak{N})$ donc (théorème 2) $\theta(\mathfrak{N})$ est résoluble et $\mathfrak{N}$ est résoluble puisque $\theta$ est fidèle. Donc puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple $\mathfrak{N} = 0$ et $Tr(\theta(x)\theta(y))$ est non dégénérée.

Réciproquement supposons la forme de Killing non dégénérée et $\mathfrak{g}$ non semi-simple. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ un idéal résoluble non nul, $n$ la longueur de $\mathfrak{a}$ alors $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{(n-1)}$ est un idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$. Si $x,y \in \mathfrak{g}$ $b \in \mathfrak{b}$ on a

$[b,y] \in \mathfrak{b}$ $[x,[b,y]] \in \mathfrak{b}$ donc $[b,[X,[b,y]]] = 0$ par suite $adb \circ adx \circ adb = 0$ d'où $(ad' \circ adb)^2 = 0$ et $Tr(adx\ adb) = 0$ ce qui est absurde.

On va procéder maintenant à l'étude des idéaux d'une algèbre semi-simple.

Proposition 11. Soient $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathfrak{g}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (0)$ 2) $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] = (0)$ 3) $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont orthogonaux pour la

forme de Killing.

1) $\Rightarrow$ 2) car $[\mathfrak{a}, \mathfrak{L}] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{L}$

2) $\Rightarrow$ 3) si $a \in \mathfrak{a}$ $b \in \mathfrak{L}$ $x \in \mathfrak{g}$ $[b,x] \in \mathfrak{L}$ et $[a[b,x]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{L}] = (0)$
donc $ad\ a \circ ad\ b = 0$ $B(a,b) = 0$

3) $\Rightarrow$ 1) . En effet la forme de Killing est identiquement nulle sur l'idéal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{L}$ qui est donc résoluble d'après le théorème 2. Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple il s'ensuit que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{L} = (0)$ .

Il résulte de cette proposition que tout idéal $\mathfrak{a}$ admet un supplémentaire et un seul à savoir l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ pour la forme de Killing.

Théorème 4 : une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est somme directe d'algèbres simples $\mathfrak{g}_i$ et réciproquement. Tout idéal $\mathfrak{h}$ est somme directe de certains des $\mathfrak{g}_i$ et la décomposition de $\mathfrak{g}$ est unique.

Tout idéal ayant un supplémentaire, $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux minimaux. Un idéal minimal est simple car il n'est pas abélien donc de dimension $> 1$ et ne possède pas de sous-idéaux.

Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ . $\mathfrak{h}$ est somme directe d'idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$ puisque la représentation adjointe est complétement réductible. Il suffit donc de montrer qu'un idéal minimal $\mathfrak{k}$ est l'un des $\mathfrak{g}_i$ . Or $\mathfrak{h}$ ne peut être orthogonal à tous les $\mathfrak{g}_i$ car $\mathfrak{h}$ serait orthogonal à $\mathfrak{g}$ contrairement au fait que la forme de Killing est non dégénérée. Donc $\mathfrak{h}$ n'est pas orthogonal à l'un des $\mathfrak{g}_i$ , soit $\mathfrak{g}_1$ et on a $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 \neq (0)$ comme $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}_1$ sont minimaux $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1$ .

L'unicité de la décomposition résulte de ce que les $\mathfrak{g}_i$ sont les idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$ donc bien déterminés. C.Q.F.D.

Corollaire 1 : $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

car $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = (0)$ $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$

Corollaire 2 : tout idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est semi-simple

Corollaire 3 : tout idéal de $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ reste un idéal dans $\mathfrak{g}$.

car $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$ $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'] = (0)$ . Si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ .