Séminaire "Sophus Lie"

P. Cartier

Représentations linéaires des algèbres de Lie semi-simples

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 17, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A20_0>

© Séminaire "Sophus Lie"
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 17

RÉPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

(Exposé de P. CARTIER, le 29.3.1955)

1.- Générateurs canoniques d'une algèbre semi-simple.

Le corps de base K est toujours de caractéristique 0 et algébriquement clos, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple dont $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan. On munit $\mathfrak{h}_0^*$ d'une structure d'ordre total compatible avec sa structure d'espace Q-vectoriel ; Σ est alors le système des racines positives et $\Pi = \{\alpha_i\}$ le système des racines simples.

Si l'on pose $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha < 0} \mathfrak{g}^\alpha$, on a deux sous-algèbres nilpotentes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ et $\mathfrak{h}$. J'affirme que $\mathfrak{n}_+$ est engendrée par les $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$: en effet si $\mathfrak{n}'_+$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{n}_+$ engendrée par les $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$, supposons par hypothèse de récurrence que $\mathfrak{n}'_+$ contienne les $\mathfrak{g}^\beta$ pour $0 < \beta < \alpha$; alors ou bien α est simple et donc $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{n}'_+$, ou bien $\alpha = \beta + \gamma$ et comme $\beta, \gamma < \alpha$ $\mathfrak{g}^\alpha = [\mathfrak{g}^\beta, \mathfrak{g}^\gamma] \subset [\mathfrak{n}'_+, \mathfrak{n}'_+] \subset \mathfrak{n}'_+$. De même $\mathfrak{n}_-$ est engendré par les $\mathfrak{g}^{-\alpha_i}$

D'autre part, on a déjà défini H'_α pour toute racine α par l'équation $\alpha(H) = B(H, H'_\alpha)$; on pose alors $H_\alpha = 2 H'_\alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$ d'où $\alpha(H_\alpha) = 2$ et $H_i = H_{\alpha_i}$. On en déduit $\alpha_i(H_j) = 2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle / \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = -a_{ji}$. On sait aussi (cf. Exp. 9) que si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ alors $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H'_\alpha$, par suite on peut choisir $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$ et $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ de sorte que $[X_i, Y_i] = H_i$. Enfin comme $\alpha_i - \alpha_j$ n'est pas racine, $[X_i, Y_j] = 0$ dès que $i \neq j$, autrement dit $\mathfrak{g}$ est engendrée par les X_i, les Y_i ; les H_i qui vérifient entre autres les relations suivantes :

(1) $\quad [X_i, Y_j] = 0$ si $i \neq j \qquad [X_i, Y_i] = H_i \qquad [H_i, X_j] = -a_{ij} X_j$

$$[H_i, Y_j] = a_{ij} \quad Y_j \qquad [H_i, H_j] = 0$$

(Remarquer que ces relations ne font intervenir de $\mathfrak{g}$ que les entiers de Cartan a_{ij}) .

Ce sont ces générateurs de $\mathfrak{g}$ que nous appellerons canoniques.

Nous terminerons ce paragraphe en démontrant que $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ équivaut à " $\lambda(H_i)$ rationnel pour tout i " . En effet si $\lambda = \sum m_i \alpha_i$ $(m_i \in K)$ on a $\lambda(H_i) = \sum m_j \alpha_j(H_i)$ et $\alpha_j(H_i)$ est entier, donc si les m_i sont rationnels, les nombres $\lambda(H_i)$ sont rationnels et si ces nombres, réciproquement, sont rationnels, les m_i sont solution unique d'un système d'équations linéaires à coefficients rationnels, donc rationnels eux-mêmes. Ceci prouve notre assertion.

2.- Poids des représentations linéaires.

Soit (ρ, V) une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel de dimension quelconque non nécessairement finie. On note alors V_λ l'ensemble des vecteurs de V qui vérifient les équations $\rho(H)v = \lambda(H)v$ et ceci pour toute forme linéaire sur $\mathfrak{h}$. V_λ est un sous-espace de V et $V_\lambda \subset V^\lambda$ (V^λ est l'ensemble des $v \in V$ qui sont annulés par une puissance de $(\rho(H) - \lambda(H).1)$ cf ; Exp. 9). Si V_λ est différent de 0 , on dira que λ est un poids de la représentation considérée.

Lemme : la somme des différents V_λ est directe et pour tout sous-espace invariant W , on a $W \cap (\sum_\lambda V_\lambda) = \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$; toute représentation de dimension finie possède au moins un poids ; enfin $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$ donc $\sum_\lambda V_\lambda$ est un sous-espace invariant.

On a $V_\lambda \subset V^\lambda$ et on sait par l'exposé 9 que la somme des V^λ est directe (la démonstration de ce fait ne suppose pas V de dimension finie) donc la somme des V_λ est directe. Appliquons ceci à la représentation quotient dans V/W pour un sous-espace invariant W , donc si $\sum_\lambda v_\lambda \equiv 0 \mod W$, v_λ étant dans V_λ , on a $v_\lambda \equiv 0 \mod W$ donc $W \cap (\sum_\lambda V_\lambda) \subset \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$. L'inclusion de sens contraire étant évidente, la deuxième assertion est démontrée. Si V est de dimension finie, on peut trouver un sous-espace irréductible pour $\mathfrak{h}$, qui est alors de dimension 1 par le lemme de Schur, donc il existe un poids. Enfin si $v \in V_\lambda$ et $x \in \mathfrak{g}^\alpha$ alors

$$\rho(H)\rho(x)v = \rho([H,x])v + \rho(x)\rho(H)v = \alpha(H)\rho(x)v + \lambda(H)\rho(x)v = (\lambda(H) + \alpha(H))\rho(x)v$$

donc $\rho(x)v$ est dans $V_{\lambda+\alpha}$

Ceci démontre le lemme.

3.- Représentations possèdant un vecteur dominant.

Nous dirons que la représentation (ρ, V) possède un vecteur dominant v si $v \in V_\lambda$ pour un certain poids λ , si $\rho(X_i)v = 0$, et si V est engendré

par v (comme $\mathcal{G}$-module) ; λ sera par définition un poids dominant

1) Comme $\mathcal{N}_+$ est engendrée par les X_i, un vecteur dominant est annulé par $\rho(\mathcal{N}_+)$ et $\rho(H)v = \lambda(H)v$ puisque $v \in V_\lambda$; $\mathcal{H} + \mathcal{N}_+ = \mathcal{P}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ dont $\mathcal{N}_+$ est un idéal puisque $[\mathcal{H}, \mathcal{N}_+] = \mathcal{N}_+$. Il résulte de ce qu'on vient de voir que la droite $K.v$ est invariante par $\mathcal{P}$, donc aussi par l'algèbre enveloppante U_0 de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{G}$ est somme directe de $\mathcal{N}_-$ et $\mathcal{P}$, donc l'algèbre enveloppante U de $\mathcal{G}$ est comme espace vectoriel produit tensoriel de U_- (algèbre enveloppante de $\mathcal{N}_-$) et de U_0 d'après le théorème de Birkoff-Witt et $U = U_-U_0$. V est engendré par v, donc $V = \rho(U)v = \rho(U_-)v$ puisque $\rho(U_0)v = K.v$ autrement dit V est engendré par v en tant que $\mathcal{P}$-module. On définit une nouvelle relation d'ordre (partielle) sur $\mathcal{H}^*$, compatible avec l'addition mais non avec les homothéties en convenant que "$\mu \leqslant \nu$" équivaut à "$\nu - \mu = \sum m_i \alpha_i$, les m_i étant des entiers positifs ou nuls". Le sous-espace $K.v + \sum_{\mu < \lambda} V_\mu$ de V contient v et est invariant par $\mathcal{N}_-$ en vertu des formules $\rho(\mathcal{G}^\alpha)V_\mu \subset V_{\mu-\alpha}$ et $\mu - \alpha < \mu < \lambda$, donc est égal à V, autrement dit V_λ est de dimension 1 et les autres poids de V sont de la forme $\lambda - \sum m_i \alpha_i$

Comme $V = \rho(U_-)v$, et que Y_i appartient à la racine $-\alpha_i$, V_μ est sous-tendu par les vecteurs $\rho(Y_{i_1}) \ldots \rho(Y_{i_p})v$ pour toute suite $i_1, i_2, \ldots, i_p$ telle que $\lambda - \alpha_{i_1} \ldots - \alpha_{i_p} = \mu$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de telles suites, V_μ est de dimension finie.

Enfin le poids dominant λ étant le plus haut des poids pour l'ordre $\geqslant$ est bien défini par la représentation.

2) Soit $I \subset U$ l'annulateur d'un vecteur dominant : c'est un idéal à gauche qui contient $\mathcal{N}_+$ et les $H - \lambda(H)$ pour $H \in \mathcal{H}$, donc l'idéal à gauche J_λ engendré par ces éléments et réciproquement si I est un idéal à gauche de U contenant J_λ, le générateur canonique de la représentation naturelle dans U/I est un vecteur dominant de poids λ. Pour démontrer qu'il existe des représentations ayant λ pour poids dominant, il suffit donc de démontrer que $J_\lambda \neq U$ et toute représentation admettant λ pour poids dominant sera un quotient de U/J_λ. Or si J'_λ est l'idéal de U_0 engendré par $\mathcal{N}_+$ et les $H - \lambda(H)$, $J'_\lambda \neq U_0$ car J'_λ est contenu dans le noyau de la représentation de dimension 1 de $\mathcal{P}$ définie par $\theta(H) = \lambda(H)1$ et $\theta(n) = 0$ (c'est bien une représentation car elle est de dimension 1 et nulle sur $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] = \mathcal{N}_+$). Mais comme $U = U_-U_0$, on a $J = U_-J'_\lambda$ et si l'on identifie U à $U_- \otimes U_0$,

J_λ est identifié à $U_- \otimes J'_\lambda$ qui est différent de U puisque J'_λ est différent de U_0 et c'est ce qu'il fallait démontrer.

3) Soit maintenant W un sous-espace invariant de V ; on a $W = \sum_\mu (W \cap V_\mu)$ en vertu du lemme puisque $V = \sum_\mu V_\mu$. Comme V_λ est de dimension 1 , on a $W \cap V_\lambda = 0$ ou $W \cap V_\lambda = V_\lambda$; dans ce dernier cas W contient v donc est égal à V puisque v est générateur. Donc si $W \neq V$ $W \subset V^+ = \sum_{\mu < \lambda} V_\mu$; la somme des sous-espaces invariants par $\mathcal{G}$ contenus dans V^+ est un sous-espace invariant différent de V qui est évidemment le plus grand des sous-espaces invariants différents de V . Ceci s'applique en particulier à la représentation dans U/J_λ et il en résulte qu'il existe un seul idéal à gauche maximal de U contenant J_λ , autrement dit, il existe à un isomorphisme près une seule représentation irréductible de poids dominant λ .

Résumons les résultats obtenus jusqu'à présent :

THÉORÈME 1 : Soit (ρ , V) une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ ayant un poids dominant λ . Alors V est somme directe des différents V_μ qui sont tous de dimension finie, V_λ étant de dimension 1 . Le seul poids dominant est λ et tout autre poids est de la forme $\lambda - \sum m_i \alpha_i$ où les m_i sont des entiers $\geqslant 0$. Enfin, pour toute forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ il existe une et, à un isomorphisme près, une seule représentation irréductible de poids dominant λ .

4.- Représentations irréductibles de dimension finie.

Nous allons maintenant nous intéresser aux représentations irréductibles de dimension finie de $\mathcal{G}$ obtenant une classification complète de ces représentations. Se limiter aux représentations irréductibles n'est pas une restriction essentielle vu le théorème de complète réductibilité.

1) Une représentation (ρ , V) de dimension finie possède au moins un poids d'après le lemme, mais ses poids sont en nombre fini puisque la somme des V_μ est directe et V de dimension finie. Il existe donc un poids de V maximal pour l'ordre (partiel) $\mu \geqslant \nu$, soit λ . Comme $\lambda + \alpha_i > \lambda$, $\lambda + \alpha_i$ n'est pas un poids et comme $\rho(X_i) V_\lambda \subset V_{\lambda + \alpha_i} = 0$ il en résulte que $\rho(X_i)\, v = 0$ pour tout $v \in V_\lambda$; si $v \neq 0$ c'est un générateur de V puisque la représentation est irréductible et par suite v est un vecteur dominant. On peut donc appliquer à la représentation en question les résultats du paragraphe précédent en particulier V est somme directe des V_μ et tout poids est de la forme $\lambda - \sum m_i \alpha_i$

2) Soit μ un poids de V et α une racine de $\mathcal{G}$; on pose

$W = \sum_k V_{\mu+k\alpha}$ c'est un sous-espace de V invariant par la sous-algèbre $\mathcal{P}$ de base E_α , $E_{-\alpha}$, H_α en vertu de la formule $\rho(\mathcal{G}^\alpha)\, V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$. Comme $\alpha(H_\alpha) = 2$, deux poids distincts de la série $\mu + k\alpha$ prennent des valeurs distinctes pour H_α . Ceci dit, on peut appliquer à la représentation de $\mathcal{P}$ dans W les résultats du théorème 1 de l'exposé 10 . On voit par le 1) de ce théorème que $2\mu(H_\alpha)/\alpha(H_\alpha) = \mu(H_\alpha)$ est un entier ; le 3) du même dit qu'il existe un poids de $\mathcal{P}$ dans W soit μ' tel que $\mu'(H_\alpha) = -\mu(H_\alpha)$, autrement dit, il existe un poids μ' de V de la forme $\mu + k\alpha$ tel que $\mu + \mu'$ soit orthogonal à α . Il en résulte immédiatement que $\mu' = S_\alpha \mu$ et que l'ensemble des poids de V est invariant par le groupe de Weyl qui est engendré par les S_α ; enfin le 3) du th. 1 de l'exposé 10 dit que V_μ et $V_{\mu'}$ ont même dimension, donc deux poids de V équivalents par le groupe de Weyl ont même multiplicité (= dim V_μ) .

Le 4) du th. de l'exp. 10 affirme que si $\mu + \alpha$ est un poids de W , et $X \in \mathcal{G}^\alpha$ pour une certaine racine α , $\rho(X) W_\mu \neq 0$ autrement dit $\rho(\mathcal{G}^\alpha)\, V_\mu \neq 0$

3) De ce que l'on vient de démontrer, résulte que $S_i \lambda = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$ est un poids de V , donc d'après la forme des poids de V , que $\lambda(H_i)$ est un entier ≥ 0 et même plus généralement $\lambda(H_\alpha)$ est un entier ≥ 0 pour toute racine $\alpha > 0$. Réciproquement, soit (ρ , V) une représentation irréductible admettant un poids dominant λ tel que $\lambda(H_i)$ soit un entier ≥ 0 ; on va montrer que V est de dimension finie. Soit $\mathcal{G}_i$ la sous-algèbre de $\mathcal{G}$ ayant X_i , Y_i , H_i pour base et T_i le sous-espace de V invariant par $\mathcal{G}_i$ engendré par v . La représentation de $\mathcal{G}_i$ dans T_i admet λ pour poids dominant , on peut donc appliquer les résultats du paragraphe précédent à l'algèbre simple $\mathcal{G}_i$, donc T_i est sous-tendu par les $\rho(Y_i)^k v$. Si $j \neq i$ on a $[X_j , Y_i] = 0$ donc $\rho(X_j)\rho(Y_i)^k v = \rho(Y_i)^k \rho(X_j)\, v = 0$ i.e. $\rho(X_j)$ annule le sous-espace T_i ; si alors un sous-espace U_i de T_i invariant par $\mathcal{G}_i$ distinct de 0 et de T_i , on avait il serait contenu dans $T_i^+ \subset V^+$ d'après le th. 1 et comme $\rho(X_j)$ est nul sur T_i , U_i serait invariant par les X_j pour $j \neq i$ et par X_i donc par $\mathcal{N}_+$; mais les poids de T_i par rapport à $\mathcal{G}$ sont de la forme $\lambda - k\alpha_i$ donc à deux distincts de ces poids correspondent des poids distincts de $\mathcal{G}_i$ (noter que $\alpha_i(H_i) = 2$) ; en conséquence $U_i = \sum_\mu (U_i \cap V_\mu)$ donc est invariant par $\mathcal{H}$. Le sous-espace U_i serait donc invariant par $\mathcal{G}$ et contenu dans V^+ , mais alors $0 \neq \rho(U)\, U_i = \rho(U_-)\rho(U_0)\, U_i \subset \rho(U_-)\, V^+ \subset V^+$ c'est-à-dire que la représentation de $\mathcal{G}$

dans V ne serait pas irréductible.

On vient donc de démontrer que la représentation de $\mathcal{G}_i$ dans T_i est irréductible et possède un poids dominant λ tel que $\lambda(H_i)$ soit un entier $\geqslant 0$. Mais on sait alors par les résultats de l'exposé 10 qu'il existe une représentation irréductible de dimension finie de $\mathcal{G}_i$ ayant ce même poids dominant ; en vertu du théorème d'unicité qu'on a démontré , T_i est de dimension finie. Considérons maintenant la famille F_i des sous-espaces de dimension finie de V invariants par $\mathcal{G}_i$. Si M et N sont dans F_i il est clair que $M + N$ est dans F_i et d'autre part $\rho(\mathcal{G})\, M$ est de dimension finie et $\rho(\mathcal{G}_i)\,\rho(\mathcal{G})M \subset \rho([\mathcal{G}, \mathcal{G}_i])M + \rho(\mathcal{G})\,\rho(\mathcal{G}_i)M \subset \rho(\mathcal{G})M$ donc ce sous-espace est aussi dans F_i . De là découle que la réunion W_i des sous-espaces de la famille F_i est un sous-espace invariant par $\mathcal{G}$, mais comme $T_i \in F_i$ et que $v \in T_i$, $v \in W_i$ et donc, v étant générateur $W_i = V$.

Soit maintenant μ un poids quelconque de V et $x \in V_\mu$. Le sous-espace $\sum_k V_{\mu + k\alpha_i}$ est invariant par $\mathcal{G}_i$, donc il existe un sous-espace M de dimension finie invariant par $\mathcal{G}_i$, contenant x et contenu dans $\sum V_{\mu+k\alpha_i}$. Par le même argument qu'en 2) , on voit que $S_i\mu$ est alors un poids de V et par suite comme on sait que le groupe de Weyl est engendré par les symétries S_i , l'ensemble P des poids de V est invariant par le groupe de Weyl.

On sait que tous les V_μ sont de dimension finie ; il suffit donc, pour achever la démonstration du fait que V est de dimension finie, de démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de poids distincts. Soit μ un poids de V et $\sigma.\mu$ les différents transformés de μ (en nombre fini) par le groupe de Weyl ; parmi ces transformés soit ν le plus haut pour l'ordre $\geqslant$, on a donc $\nu \geqslant S_i\nu$ d'où $\nu(H_i)\alpha_i \geqslant 0$ ce qui implique $\nu(H_i) \geqslant 0$. Tout poids est donc conjugué à un poids ν tel que $\nu(H_i) \geqslant 0$ ou encore $\langle \nu, \alpha_i \rangle \geqslant 0$; par suite si $\beta \geqslant 0$ $\langle \nu, \beta \rangle \geqslant 0$ puis comme $\nu = \lambda - \beta$ avec $\beta \geqslant 0$ $\lambda = \nu + \beta$ $\langle \lambda, \lambda \rangle = \langle \nu, \nu \rangle + \langle \beta, \beta \rangle + 2\langle \nu, \beta \rangle \geqslant \langle \nu, \nu \rangle$. Les poids tels que $\nu(H_i) \geqslant 0$ sont donc contenus dans l'intersection du réseau discret des éléments de $\mathfrak{h}_0^*$ de la forme $\lambda - \sum m_i\alpha_i$ (m_i entier) et de la boule de rayon $|\lambda|$ donc en nombre fini. Comme tout poids de V est conjugué par le groupe de Weyl qui est fini à l'un de ces poids en nombre fini, P est fini et V est de dimension finie.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2 : Soit (ρ , V) une représentation linéaire irréductible de $\mathcal{G}$ dans un espace de dimension finie. Alors :

a) Il existe un poids dominant λ et V est somme directe des V_μ

b) L'ensemble P des poids de V est fini et invariant par le groupe de Weyl ; si deux poids μ et ν sont conjugués par le groupe de Weyl, V_μ et V_ν ont même dimension.

c) Pour qu'une représentation irréductible de poids dominant λ soit de dimension finie, il faut et il suffit que $\lambda(H_i)$ soit un entier $\geqslant 0$ pour tout i et alors $\mu(H_\alpha)$ est entier pour toute racine α et tout poids μ .

d) Si α est une racine de $\mathcal{G}$ et μ un poids de V tel que $\mu + \alpha$ soit encore un poids, alors $\rho(\mathcal{G}^\alpha)V_\mu \neq 0$

Remarques : 1) Supposons qu'il existe $v \in V_\lambda$ tel que pour toute racine α v soit annulé par $\rho(E_\alpha)$ ou $\rho(E_{-\alpha})$; alors l'ensemble Q des racines α telles que $\rho(E_\alpha)v = 0$ vérifie $(Q + Q) \cap \Delta \subset Q$ et $Q \cup -Q = \Delta$. On démontre facilement alors que pour un choix convenable de Σ , $\Sigma \subset Q$, donc que v est un vecteur dominant. Ceci, joint au théorème 1 est l'essentiel d'un résultat récent de Harish-Chandra (Proc. Nat. Ac. Sc. of U.S.A. déc. 1954) .

2) Soit A l'algèbre associative universelle engendrée par des X_i , Y_i , H_i soumis aux relations (1) avec $[a , b] = ab - ba$ .La démonstration du théorème d'unicité se transpose aisément au cas de l'algèbre A , donc il existe une seule représentation irréductible de A de poids dominant λ , et comme toute représentation de $\mathcal{G}$, i.e. de U fournit une représentation de A , toute représentation irréductible de dimension finie de A provient d'une représentation de $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{D}_i$ la représentation irréductible de poids dominant λ_i défini par $\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$; si $\lambda(H_i) = m_i$, $\lambda = \sum_i m_i \lambda_i$ et la reprèsentation irréductible associée à λ est contenue dans $\bigotimes_i \mathcal{D}_i^{\otimes m_i}$ donc $\sum_i \mathcal{D}_i$ est une représentation fidèle de $\mathcal{G}$. On a donc un moyen de construire $\mathcal{G}$ à partir des entiers de Cartan en construisant la représentation $\sum \mathcal{D}_i$ de A et considérant l'algèbre de Lie d'opérateurs engendrée par les générateurs de A .