Séminaire "Sophus Lie"

F. Bruhat

Poids et racines, I

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 9, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A13_0>

© Séminaire "Sophus Lie"
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Exposé n° 9

POIDS ET RACINES , I

(Exposé de F. BRUHAT, le 18.1.55)

Dans tout l'exposé, K désigne un corps commutatif, algébriquement clos, de caractéristique nulle ; tous les espaces vectoriels considérés seront des espaces vectoriels de dimension finie sur K .

1.- Représentations des algèbres de Lie nilpotentes.

Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, et soit ρ une représentation linéaire de $\mathfrak{h}$ dans un espace vectoriel V ; une fonction λ sur $\mathfrak{h}$ est dite un poids de ρ s'il existe $a \in V$, $a \neq 0$, tel que $\rho(H)\, a = \lambda(H)\, a$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$; λ est alors une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$. D'après le théorème de Lie, si $\mathfrak{h}$ est résoluble, et si $V \neq 0$, il existe au moins un poids de ρ .

D'autre part, si A est un endomorphisme d'un espace vectoriel V , et si λ est un scalaire, on notera $V(A,\lambda)$ le sous-espace vectoriel de V formé des $a \in V$ tels qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ avec

$$(1) \qquad (A - \lambda)^n\, a = 0$$

On sait que l'on a alors

$$(2) \qquad (A - \lambda)^{\dim.V(A,\lambda)}\, a = 0 \quad .$$

De même, si ρ est une représentation linéaire de $\mathfrak{h}$ dans V , et si λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$, on notera $V(\mathfrak{h},\lambda)$, ou simplement V^{λ} , le sous-espace vectoriel de V formé des $a \in V$ tels qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ avec

$$(3) \qquad (\rho(H) - \lambda(H))^n\, a = 0 \quad \text{pour tout} \quad H \in \mathfrak{h}$$

Autrement dit, on a :

$$(4) \qquad V(\mathfrak{h},\lambda) = \bigcap_{A \in \mathfrak{h}} V(\rho(A),\lambda(A)) \quad .$$

On démontre aisément que l'on a :

$$(5) \qquad (\rho(H) - \lambda(H))^{\dim.V(\mathfrak{h},\lambda)}\, a = 0 \quad \text{pour} \quad a \in V(\mathfrak{h},\lambda) \quad \text{et} \quad H \in \mathfrak{h}$$

Théorème 1 - Soit (ρ,V) une représentation linéaire d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{h}$. Alors :

1) Les sous-espaces V^λ sont stables par $\mathfrak{h}$.

2) Si $V^\lambda \neq 0$, λ est un poids de ρ, et c'est le seul poids de ρ dans V^λ.

3) V est somme directe des sous-espaces V^λ.

Pour prouver la première assertion, il suffit, d'après la formule (4), de montrer que, si $A \in \mathfrak{h}$, $V(A,\lambda(A)) = V(\rho(A),\lambda(A))$ est stable par $\mathfrak{h}$. Soit donc $B \in \mathfrak{h}$ et $a \in V(A,\lambda(A))$, et montrons que $\rho(B)\,a \in V(A,\lambda(A))$; puisque $\mathfrak{h}$ est nilpotente, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $(\mathrm{ad}A)^k B = 0$; nous raisonnerons par récurrence sur k, le cas $k = 0$ étant trivial.

De la formule :

$$(6) \qquad (\rho(A) - \lambda(A))\,\rho(B) = \rho(B)(\rho(A) - \lambda(A)) + \rho([A,B])$$

on tire, par récurrence sur n, la formule :

$$(7) \qquad (\rho(A) - \lambda(A))^n \rho(B) = \rho(B)(\rho(A) - \lambda(A))^n + \sum_{s=0}^{s=n-1} (\rho(A) - \lambda(A))^{n-s-1} \rho([A,B])(\rho(A) - \lambda(A))^s$$

Appliquons cette formule à $a \in V(A,\lambda(A))$, avec $n > 2\,\dim.V(A,\lambda(A))$. Tous les termes du membre de droite sont nuls : c'est évident pour le premier, ainsi que pour tous ceux correspondant à $s \geqslant \dim.V(A,\lambda(A))$. Pour les autres, on remarque que $\rho(A) - \lambda(A)$ laisse stable $V(A,\lambda(A))$, et qu'il en est de même de $\rho([A,B])$, puisque $(\mathrm{ad}\,A)^{k-1}[A,B] = 0$; on a donc à appliquer $(\rho(A)-\lambda(A))^{n-s-1}$ à un élément de $V(A,\lambda(A))$, ce qui donne bien 0 puisque $s < \dim.V(A,\lambda(A))$. Le membre de gauche est donc également nul, ce qui prouve bien que $\rho(B)\,a \in V(A,\lambda(A))$, et achève la démonstration de 1).

La seconde assertion du théorème est évidente, compte tenu du théorème de Lie.

Démontrons 3). Tout d'abord, la somme des V^λ est directe. Car soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les différents poids ; puisque le corps de base K est infini, il y a $A \in \mathfrak{h}$ tel que $\lambda_i(A) \neq \lambda_j(A)$ si $i \neq j$; d'après les propriétés connues des endomorphismes, la somme des $V(A,\lambda_i(A))$ est directe, et il en est de même des $V^{\lambda_i} \subset V(A,\lambda_i(A))$.

Reste à voir que $V = \sum V^\lambda$, ce que nous ferons par récurrence sur $\dim.V$, le cas $\dim.V = 0$ étant trivial. Distinguons deux cas : ou bien tous les $\rho(A)$, $A \in \mathfrak{h}$, ont une seule valeur propre $\lambda(A)$, qui est un poids d'après d'après le théorème de Lie, donc est linéaire sur $\mathfrak{h}$, et $V = V^\lambda$; ou bien il existe $A \in \mathfrak{h}$ tel que $\rho(A)$ ait deux valeurs propres distinctes $\lambda_1(A)$ et $\lambda_2(A)$, et dans ce cas V est somme directe des $V(A,\lambda_i(A))$, qui sont des

sous-espaces stables de V, de dimensions $< \dim.V$, et auxquels on peut appliquer l'hypothèse de récurrence ; il en résulte immédiatement que $V = \Sigma V^{\lambda}$, C.Q.F.D.

2.- Sous-algèbres de Cartan.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$. On appliquera les définitions et résultats du paragraphe 1 à la représentation adjointe ρ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Un poids de ρ est dit une racine de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$. Dire que α est une racine équivaut donc à dire qu'il existe $G \in \mathfrak{g}$, $G \neq 0$, avec

(8) $\qquad [H,G] = \alpha(H)\, G$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$

D'après le théorème précédent, $\mathfrak{g}$ est somme directe de sous-espaces $\mathfrak{g}^{\alpha}$ correspondant aux différentes racines α de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$. On notera que, puisque $\mathfrak{h}$ est nilpotente, on a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$; plus généralement, toute algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ est contenue dans $\mathfrak{g}^0$.

Lemme 1.- $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Corollaire. $\mathfrak{g}^0$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Par linéarité, il suffit de montrer que $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $Y \in \mathfrak{g}^{\beta} \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. Or, on a :

$$(\operatorname{ad} H - \alpha(H) - \beta(H))[X,Y] = [(\operatorname{ad} H - \alpha(H))X, Y] + [X, (\operatorname{ad} H - \beta(H)).Y] ,$$

et plus généralement (formule de Leibniz)

$$(\operatorname{ad} H - \alpha(H) - \beta(H))^n [X,Y] = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} [(\operatorname{ad} H - \alpha(H))^p X , (\operatorname{ad} H - \beta(H))^{n-p} Y] ,$$

d'où aussitôt le résultat cherché.

Définition 1.- On dit qu'une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est régulière (ou que c'est une sous-algèbre de Cartan) si $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$.

D'après ce qui précède, une telle sous-algèbre est nécessairement une sous-algèbre nilpotente maximale de $\mathfrak{g}$ (la réciproque étant inexacte en général).

Définition 2.- Un élément $X \in \mathfrak{g}$ est dit régulier si $\dim.\mathfrak{g}(X,0)$ est minima.

Théorème 2.- Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$, contenant un élément régulier H. Alors $\mathfrak{g}^0$ est une sous-algèbre de Cartan et l'on a $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}(H,0)$.

(En appliquant ce théorème à une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de dimension 1,

engendrée par un élément régulier, on voit que <u>toute algèbre de Lie possède des sous-algèbres de Cartan</u>).

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$, et soit $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha$. Si $X \in \mathfrak{g}^0$, ad X conserve chaque $\mathfrak{g}^\alpha$ (lemme 1), donc conserve $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soit d(X) le déterminant de ad X dans $\tilde{\mathfrak{g}}$. Je dis que d(X) n'est pas identiquement nul dans $\mathfrak{g}^0$; en effet, il existe $H \in \mathfrak{h}$ avec $\alpha(H) \neq 0$ pour toute racine $\alpha \neq 0$, et ad H n'ayant pas de valeur propre nulle dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, on a $d(H) \neq 0$; comme $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$; ceci démontre notre assertion. Soit alors X un élément de $\mathfrak{g}^0$ tel que $d(X) \neq 0$; la restriction de ad X à $\tilde{\mathfrak{g}}$ a toutes ses valeurs propres $\neq 0$; donc $\mathfrak{g}(X,0) \subset \mathfrak{g}^0$; comme on a $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{g}(H,0)$, le caractère minimal de $\mathfrak{g}(H,0)$ montre que l'on a

$$\mathfrak{g}(X,0) = \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}(H,0) \tag{9}$$

Il s'ensuit que ad X est nilpotent dans $\mathfrak{g}^0$, ce qui se traduit par :

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}^0} (\mathrm{ad}\ X)^p = 0 \quad \text{pour tout} \quad p \geqslant 1 \tag{10}$$

Mais le membre de gauche de la formule (10) est un polynôme par rapport aux composantes de X ; ce qui précède montre que ce polynôme est nul chaque fois que le polynôme d(X) est $\neq 0$. D'après le principe de prolongement des identités algébriques, ce polynôme est identiquement nul, autrement dit, la formule (10) est valable pour <u>tout</u> $X \in \mathfrak{g}^0$, ce qui montre que ad X est nilpotent, donc que $\mathfrak{g}^0$ est une algèbre <u>nilpotente</u>. Enfin $\mathfrak{g}^0$ est une sous-algèbre de Cartan, car du fait que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$, on a $\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^0,0) \subset \mathfrak{g}(\mathfrak{h},0) = \mathfrak{g}^0$.

<u>Remarque</u>. Le procédé précédent fournit <u>toutes</u> les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$; on peut en effet démontrer que deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ peuvent être transformées l'une dans l'autre par un automorphisme de $\mathfrak{g}$.

Dans la suite de ce paragraphe, $\mathfrak{h}$ désignera une <u>sous-algèbre de Cartan</u> de $\mathfrak{g}$, choisie une fois pour toutes. On a donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha \tag{11}$$

On désignera par $\nu(\alpha)$ la dimension de $\mathfrak{g}^\alpha$.

<u>Lemme 2.</u>- <u>Soient</u> H <u>et</u> H' <u>deux éléments de</u> $\mathfrak{h}$, <u>et soit</u> B <u>la forme de Killing de</u> $\mathfrak{g}$. <u>On a alors</u> $B(H,H') = \sum_\alpha \nu(\alpha)\, \alpha(H)\, \alpha(H')$.

Il suffit de faire la démonstration lorsque H' = H : le cas général s'en déduira par polarisation. Or ad H a dans $\mathfrak{g}^\alpha$ la seule valeur propre $\alpha(H)$; d'où $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ H)^2 = \sum_\alpha \nu(\alpha)\, \alpha(H)^2$.

Lemme 3.- Soient φ et α deux racines de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$, avec $\alpha \neq 0$. Soit p un entier $\leqslant 0$ tel que $[\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^{\varphi+p\alpha}] = 0$, et soit q un entier $\geqslant 0$ tel que $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\varphi+q\alpha}] = 0$. Soit $H \in [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$.

Soit $r = \left(\sum_{k=p}^{k=q} k\,\nu(\varphi + k\alpha)\right) / \left(\sum_{k=p}^{k=q} \nu(\varphi + k\alpha)\right)$ (12).

On a alors $\varphi(H) = r\alpha(H)$.

(Comme les racines de $\mathfrak{g}$ sont en nombre fini, il existe toujours des entiers p et q vérifiant les hypothèses ci-dessus ; il s'ensuit que φ est proportionnelle à α sur $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$).

Posons $V = \sum_{k=p}^{k=q} \mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$, et soit $H = [X,Y]$ avec $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ (par linéarité, il suffit de prouver le lemme pour de tels éléments H). Comme ad X applique $\mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$ dans $\mathfrak{g}^{\varphi+(k+1)\alpha}$, V est stable pour ad X, et de même pour ad Y. Comme ad H = [ad X, ad Y], il s'ensuit que V est stable pour ad H et que $\mathrm{Tr}_V(\mathrm{ad}\ H) = 0$. Mais la seule valeur propre de ad H dans $\mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$ est $\varphi(H) + k\alpha(H)$; d'où

$$\sum_{k=p}^{k=q} \nu(\varphi + k\alpha)(\varphi(H) + k\alpha(H)) = 0\,, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

(On observera que le dénominateur de r est bien $\neq 0$, car c'est la somme de $\nu(\varphi) > 0$ et d'entiers $\geqslant 0$).

Montrons, à titre d'intermède, comment le lemme précédent permet de retrouver le critère de Cartan.

Théorème 3.- Si la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est identiquement nulle, $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Il suffit de montrer que, si la forme de Killing B est nulle, la relation $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ entraîne $\mathfrak{g} = 0$, car alors si $\mathfrak{g} \neq 0$ $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ mais la forme de Killing de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est induite par celle de $\mathfrak{g}$ donc = 0 et il en résulte que la suite des dérivées de $\mathfrak{g}$ décroit.

Comme $\mathfrak{g} = \sum_{\alpha} \mathfrak{g}^{\alpha}$, on a alors $\mathfrak{g} = \sum_{\alpha,\beta} [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}]$, d'où (lemme 1)

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] + \sum_{\alpha \neq 0} [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]\,.$$

Soit φ une racine de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$. On a évidemment $\varphi = 0$ sur $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$. Montrons que $\varphi = 0$ sur $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$. D'après le lemme 3, il existe un nombre rationnel r_{φ} tel que $\varphi(H) = r_{\varphi}\alpha(H)$ pour tout $H \in [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$; d'autre part, d'après le lemme 2, on a :

$$0 = B(H,H) = \sum_{\varphi} \nu(\alpha)\,\varphi(H)^2 = \alpha(H)^2 \sum_{\varphi} \nu(\varphi)\, r_{\varphi}^2\,.$$

Distinguons alors deux cas : a). $\alpha(H) = 0$, auquel cas $\varphi(H) = 0$;
b). $\alpha(H) \neq 0$, auquel cas la formule ci-dessus montre que $r_\varphi = 0$ pour tout φ , d'où encore $\varphi(H) = 0$. Ainsi toutes les racines φ sont nulles sur $\mathfrak{h}$, ce qui montre que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, donc que $\mathfrak{g}$ est nilpotente, et la relation $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ entraîne alors $\mathfrak{g} = 0$.

Le théorème précédent entraîne immédiatement le critère de semi-simplicité de Cartan, (cf. Exposé n° 6).

3.- Structure des algèbres semi-simples.

Dans ce paragraphe, $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie semi-simple, et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

On munira $\mathfrak{g}$ du produit scalaire $\langle X,Y\rangle = B(X,Y)$ (forme de Killing). Puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, ce produit scalaire est non dégénéré (et c'est la seule propriété des algèbres semi-simples que l'on utilisera).

Lemme 1.- Si $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est orthogonal à $\mathfrak{g}^\beta$.

2.- Le produit scalaire $\langle X,Y\rangle$ met en dualité les espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}^\beta$, ad X . ad Y applique $\mathfrak{g}^\gamma$ dans $\mathfrak{g}^{\gamma+\alpha+\beta}$; si donc $\alpha + \beta \neq 0$, la matrice de ad X . ad Y par rapport à la décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}^\gamma$ n'a que des zéros sur la diagonale principale, d'où $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ X\ .\ \mathrm{ad}\ Y) = 0$, ce qui démontre 1.. Si maintenant $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ est orthogonal à $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, ce qui précède montre que X est orthogonal à $\mathfrak{g}$ tout entier, d'où $X = 0$, ce qui démontre 2..

Proposition 1.- La restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée ; $\mathfrak{h}$ est une algèbre abélienne ; si $r = \dim. \mathfrak{h}$, il existe r racines linéairement indépendantes.

Le fait que $\langle X,Y\rangle$ soit non dégénéré sur $\mathfrak{h}$ est un cas particulier du lemme précédent (en faisant $\alpha = 0$) ; si maintenant il n'existait pas r racines linéairement indépendantes, on pourrait trouver $H \in \mathfrak{h}$, $H \neq 0$, tel que $\alpha(H) = 0$ pour toute racine α ; mais alors, si $H' \in \mathfrak{h}$, on aurait $\langle H,H'\rangle = \sum_\alpha \nu(\alpha)\,\alpha(H)\,\alpha(H') = 0$, et H serait orthogonal à $\mathfrak{h}$, ce qui est absurde. Comme toute racine s'annule sur $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$, ceci démontre en même temps que $\mathfrak{h}$ est abélienne.

Puisque $\langle X,Y\rangle$ est non dégénéré sur $\mathfrak{h}$, pour tout élément λ du dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, il existe un élément et un seul $H'_\lambda \in \mathfrak{h}$ tel que $\lambda(H) = \langle H,H'_\lambda\rangle$

(on écrira parfois $H'_\lambda = \lambda$, identifiant ainsi $\mathfrak{h}$ à son dual). On peut introduire un produit scalaire sur $\mathfrak{h}^*$ en posant :

$$(13) \qquad \langle \lambda, \mu \rangle = \langle H'_\lambda , H'_\mu \rangle = \lambda(H'_\mu) = \mu(H'_\lambda) \quad .$$

Choisissons maintenant dans chaque $\mathfrak{g}^\alpha$ un vecteur propre E_α pour $\mathfrak{h}$, $E_\alpha \neq 0$. On a donc :

$$(14) \qquad [H, E_\alpha] = \alpha(H)\, E_\alpha \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h}$$

Si α est une racine $\neq 0$, et si $X \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, on va montrer que

$$(15) \qquad [E_\alpha , X] = \langle E_\alpha , X \rangle H'_\alpha$$

Les deux membres de (15) sont des éléments de $\mathfrak{h}$; pour vérifier qu'ils sont égaux, il suffit donc de montrer qu'ils ont même produit scalaire avec un élément arbitraire $H \in \mathfrak{h}$. Or, on a :

$$\langle H, [E_\alpha, X] \rangle = \langle [H, E_\alpha], X \rangle = \alpha(H) \langle E_\alpha, X \rangle = \langle E_\alpha, X \rangle \langle H'_\alpha, H \rangle \quad , \text{ C.Q.F.D.}$$

Montrons que, <u>si</u> α <u>est une racine</u> $\neq 0$, <u>on a</u> $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$:

Puisque $\langle X, Y \rangle$ met en dualité $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, il existe un $X \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $\langle E_\alpha , X \rangle = 1$, d'où $[E_\alpha , X] = H'_\alpha$, d'après (15). Mais on a $[E_\alpha, X] \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$; le lemme 3 du paragraphe 2 montre alors qu'il existe un nombre rationnel r_φ tel que $\varphi(H'_\alpha) = r_\varphi \alpha(H'_\alpha)$, φ étant une racine de $\mathfrak{g}$. Si l'on avait $\langle \alpha, \alpha \rangle = \alpha(H'_\alpha) = 0$, on en conclurait que $\varphi(H'_\alpha) = 0$ pour toute racine φ , d'où $H'_\alpha = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\alpha \neq 0$.

<u>Proposition 2</u>.- <u>On a</u> $\dim . \mathfrak{g}^\alpha = 1$ <u>si</u> α <u>est une racine</u> $\neq 0$.

Soit encore $X \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $[E_\alpha, X] = H'_\alpha$. Si Y est un élément de $\mathfrak{g}^\alpha$ nous devons montrer que Y est proportionnel à E_α .

Posons $Y_k = (\operatorname{ad} E_\alpha)^k Y$. On a $Y_k \in \mathfrak{g}^{(k+1)\alpha}$. Calculons $[X, Y_k]$. Tout d'abord $[X, Y_1] = [X, (\operatorname{ad} E_\alpha) Y] = - [E_\alpha, [Y, X]] - [Y, [X, E_\alpha]]$.

On a $[X, Y] = H \in \mathfrak{h}$; le premier terme est donc $-\alpha(H)\, E_\alpha$, et le deuxième terme est $- [H'_\alpha , Y]$, d'où :

$$(16) \qquad [X, Y_1] = - \alpha(H)\, E_\alpha - [H'_\alpha , Y]$$

Par récurrence sur k , on démontre que, si $k \geqslant 2$, on a :

$$(17) \qquad [X, Y_k] = \frac{k(k-1)}{2} \alpha(H')\, Y_{k-1} - k [H'_\alpha , Y_{k-1}]$$

Soit k le plus petit entier tel que $Y_k = 0$ (un tel entier existe certainement du fait que Y_k appartient à $\mathfrak{g}^{(k+1)\alpha}$). Supposons d'abord que $k \geqslant 2$; alors la formule (17) montre que Y_{k-1} est vecteur propre pour

ad H'_α , la valeur propre correspondante étant $\frac{1}{2}(k-1)\alpha(H'_\alpha)$; mais puisque $Y_{k-1} \in \mathfrak{g}^{k\alpha}$, cette valeur propre doit être égale à $k\alpha(H'_\alpha)$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $k \geqslant 2$, parce que $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$. Donc $Y_1 = 0$, et la formule (16) montre que

$$[H'_\alpha , Y] = -\alpha(H)\, E_\alpha \quad . \tag{18}$$

Posons $Z = \alpha(H'_\alpha)\, Y + \alpha(H)\, E_\alpha$. On a $[H'_\alpha , Z] = 0$, ce qui montre que Z est vecteur propre de ad H'_α avec la valeur propre 0 ; comme $Z \in \mathfrak{g}^\alpha$, on en conclut que $Z = 0$, et Y est bien proportionnel à E_α , C.Q.F.D.

Corollaire. Les propriétés suivantes caractérisent les sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$:

a) $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$.

b) Pour tout $H \in \mathfrak{h}$, ad H est un endomorphisme semi-simple de $\mathfrak{g}$.

Les conditions a) et b) sont vérifiées par toute sous-aglèbre de Cartan, d'après ce qui précède, Inversement, si $\mathfrak{h}$ vérifie a) et b), chacun des sous-espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ de la décomposition de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ est formé des vecteurs propres correspondant à la racine α ; en particulier, tout élément de $\mathfrak{g}^0$ commute à $\mathfrak{h}$, et la condition a) entraîne que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$, donc que $\mathfrak{h}$ est bien une sous-algèbre de Cartan.