SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE LEURIDAN

Filtration d'une marche aléatoire stationnaire sur le cercle

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p. 335-347

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__335_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FILTRATION D'UNE MARCHE ALÉATOIRE STATIONNAIRE SUR LE CERCLE

Christophe Leuridan
Institut Fourier - Université de Grenoble I

Résumé

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une marche aléatoire sur le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, indexée par $\mathbf{Z}$. On suppose que la loi μ des pas possède une partie diffuse non nulle ou que le sous-groupe engendré par les différences $b - a$ pour a,b atomes de même masse est dense dans $\mathbf{T}$. On montre alors que la filtration naturelle de la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est "de type produit" en construisant explicitement une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ qui possède la même filtration naturelle.

Introduction

Les filtrations indexées par $\mathbf{Z}$ (ou par $-\mathbf{N}$) présentent dans certains cas des comportements asymptotiques paradoxaux vers $-\infty$, qui bien après les travaux de Vershik [8] ont fait l'objet de nombreux travaux récents, dont ceux de Tsirel'son, Weizsäcker, Smorodinsky, Emery et Schachermayer [1, 6, 8, 5, 3]. Un des problèmes concernant ces filtrations est de caractériser les filtrations "à accroissements indépendants", les filtrations "de type produit" et les filtrations "standard". Comme la terminologie varie d'un article à l'autre, nous redonnons quelques définitions concernant les filtrations indexées par $\mathbf{Z}$, qui serviront seulement à situer cet article par rapport aux travaux sur des sujets voisins. Signalons auparavant que nous travaillons modulo les événements négligeables : toutes les tribus considérées sont supposées complétées, ce qui permet de traiter les égalités presque sûres comme des égalités dans les questions de mesurabilité.

* Une filtration $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ est à accroissements indépendants s'il existe une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, ξ_n est indépendante de $\mathscr{F}_{n-1}$ et $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_{n-1} \vee \sigma(\xi_n)$.
* Une filtration $\mathscr{F}$ est de type produit s'il existe une suite de variables aléatoires indépendantes dont la filtration naturelle est $\mathscr{F}$.
* Une filtration $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est immergée dans une filtration $\mathscr{G} = (\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ du même espace probabilisé si $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{G}_n$ pour tout n et si toute martingale dans la filtration $\mathscr{F}$ est encore une martingale dans la filtration $\mathscr{G}$.

Classification math. : 60J05.
Mots-clés : marche aléatoire sur le cercle, filtrations indexées par Z, filtrations standard.

* Une filtration $\mathscr{F}$ d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ est immersible dans une filtration $\mathscr{G}$ d'un espace probabilisé $(\Omega',\mathscr{A}',P')$ si elle est isomorphe à une filtration $\mathscr{F}'$ immergée dans $\mathscr{G}'$.
* Une filtration $\mathscr{F}$ est dite standard si elle immersible dans une filtration de type produit.

Pour qu'une fitration $\mathscr{G}$ soit standard, il est nécessaire que la tribu asymptotique $\mathscr{G}_{-\infty}$ soit triviale, à cause de la loi du $0-1$ de Kolmogorov. Mais cette condition n'est pas suffisante : A. Vershik [8] et M. Smorodinsky [5] ont donné des exemples de filtrations à accroissements indépendants dont la tribu asymptotique est triviale, mais qui ne sont pas de type produit, ni même immersibles dans dans une filtration de type produit.

Le problème de caractériser les filtrations standard (immersibles dans une filtration de type produit) a donné lieu à de nombreux travaux. En 1973, A. Vershik a donné un critère de "standardité" [8]. Plus récemment, des avancées remarquables ont été apportées à un problème analogue à temps continu, reconnaître les filtrations browniennes. Une notion clé est la notion de filtration confortable introduite en 1997 par B. Tsirel'son [7]. Le confort est une condition nécessaire pour qu'une filtration indexée par $\mathbf{R}_+$ soit brownienne et B. Tsirel'son s'est servi de cette condition pour montrer que la filtration associée à un mouvement brownien de Walsh n'est pas brownienne puisqu'elle n'est pas confortable. Dernièrement, M. Emery et W. Schachermayer ont introduit une notion de confort pour les filtrations indexées par $-\mathbf{N}$, qui est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une filtration soit standard [3].

Dans cet article, nous étudions la filtration naturelle d'une marche aléatoire stationnaire sur le cercle : on considère le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et une probabilité μ sur $\mathbf{T}$ qui n'est portée par aucun translaté de sous-groupe fini de $\mathbf{T}$. On se donne des variables indépendantes U_0 de loi uniforme sur $\mathbf{T}$ et $(\xi_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de loi μ, sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On construit par récurrence une marche aléatoire $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{T}$ indexée par $\mathbf{Z}$ en posant $U_n - U_{n-1} = \xi_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Nous verrons d'ailleurs dans la première partie que toute marche aléatoire indexée par $\mathbf{Z}$ dont les pas ont pour loi μ est de cette forme. Nous nous trouvons alors dans la situation paradoxale suivante :

* les filtrations $\mathscr{F}^{\xi}$ et $\mathscr{F}^{U}$ associées aux processus $(\xi_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sont à accroissements indépendants et "ont les mêmes accroissements" puisqu'on passe de $\mathscr{F}^U_{n-1}$ à $\mathscr{F}^U_n$ en ajoutant l'information indépendante ξ_n ;
* la filtration $(\mathscr{F}^{\xi}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est strictement incluse dans la filtration $(\mathscr{F}^U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$;
* pourtant les tribus asymptotiques $\mathscr{F}^{\xi}_{-\infty}$ et $\mathscr{F}^U_{-\infty}$ sont triviales.

Le fait que la tribu asymptotique $\mathscr{F}^U_{-\infty}$ soit triviale n'est pas du tout évident *a priori*. En effet, lorsque la mesure μ est de la forme $(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})/2$, avec $\alpha \in \mathbf{T}$ irrationnel, chaque trajectoire $(U_n(\omega))_{n\in\mathbf{Z}}$ est portée par l'orbite $O(\omega) = \{U_0(\omega) + k\alpha\,;\, k \in \mathbf{Z}\}$. Comme on a aussi $O(\omega) = \{U_n(\omega) + k\alpha\,;\, k \in \mathbf{Z}\}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la variable aléatoire O à valeurs dans $\mathbf{T}/\alpha\mathbf{Z}$ est asymptotique. Mais cela ne contredit pas le fait que la tribu asymptotique $\mathscr{F}^U_{-\infty}$ soit triviale. En effet, comme α est irrationnel, les boréliens de $\mathbf{T}$ invariants par translation de α sont de mesure 0 ou 1. Or les parties mesurables de

$\mathbf{T}/\alpha\mathbf{Z}$ (muni de la tribu quotient) sont les parties dont l'image réciproque par la projection canonique de $\mathbf{T}$ sur $\mathbf{T}/\alpha\mathbf{Z}$ est borélienne ; ces images réciproques étant invariantes par translation de α sont donc de mesure 0 ou 1. Ainsi, la mesure image de la probabilité P par la variable O est une probabilité ne prenant que les valeurs 0 ou 1, si bien que l'information contenue dans la variable O est insaisissable pour les probabilités. D'ailleurs, s'il était possible de conditionner par l'orbite sur laquelle évolue la marche $(U_n(\omega))_{n\in\mathbf{Z}}$, on obtiendrait une marche aléatoire non triviale sur $\mathbf{Z}$ indexée par $\mathbf{Z}$, ce qui n'existe pas...

On peut donc se demander – bien que cela semble impossible à première vue – s'il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de variables indépendantes de loi μ dont $\mathscr{F}^U$ soit la filtration naturelle. Dans la cas où $\mu = (\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})/2$ avec $\alpha \in \mathbf{T}$ irrationnel, A. Vershik répond par l'affirmative dans [8] (page 744), comme application de son critère de standardité, mais il ne démontre pas que son critère est vérifié par cet exemple... On peut aussi utiliser les travaux de M. Emery et W. Schachermayer [3] en montrant que la filtration $\mathscr{F}^U$ satisfait à un des critères de confort qui caractérisent les filtrations standard. Comme ces vérifications ne sont pas évidentes, nous nous proposons de construire directement une telle suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$.

Pour cette construction, nous avons besoin de l'hypothèse un peu plus forte suivante : la mesure μ possède une partie diffuse non nulle ou le sous-groupe engendré par les différences $b - a$ pour a,b atomes de même masse est dense dans $\mathbf{T}$. Nous montrons dans la proposition 1.2 que cette hypothèse équivaut à l'existence d'une bijection bimesurable $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ préservant la mesure μ et telle que le support de la mesure image $(f - \mathrm{id}_\mathbf{T})\mu$ (qui est la loi de $f(\xi_0) - \xi_0$) soit dense dans $\mathbf{T}$. La suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ que nous construisons est alors de la forme $\eta_n = f^{H_n}(\xi_n)$, où $(H_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est un certain processus prévisible à valeurs dans $\{0\,;1\}$.

Dans le cas particulier où μ est symétrique par rapport à 0 et f est l'application $t \mapsto -t$, la construction que nous faisons est proche de celle qu'utilisent M. Emery et W. Schachermayer [2] pour montrer que la filtration d'un mouvement brownien circulaire (c'est-à-dire d'un mouvement brownien sur $\mathbf{T}$ indexé par $\mathbf{R}$) devient une filtration brownienne lorsqu'on effectue le changement de temps $t = e^s$: on subdivise le temps à l'aide d'une suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que les différences $t_{n+1} - t_n$ tendent rapidement vers $+\infty$ quand n tend vers $-\infty$. On construit la suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ en changeant le signe de la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sur des intervalles de temps $]t_n\,;T_n]$, où les temps d'arrêts $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sont choisis de telle sorte que les accroissements $\sum_{t_n<k\leqslant t_{n+1}} \eta_k$ approchent de mieux en mieux les positions $U_{t_{n+1}}$ quand n tend vers $-\infty$. Les temps d'arrêt $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sont définis par $T_n = \inf\{t > t_n : |2U_t - U_{t_n}| \leqslant r_n\}$, où les réels $(r_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ tendent rapidement vers 0 quand n tend vers $-\infty$.

Le problème de la marche aléatoire sur le cercle est conceptuellement plus simple que le problème du mouvement brownien circulaire, qui est son analogue à temps continu. Il présente néanmoins une difficulté supplémentaire du fait que les accroissements $\sum_{t_{n-1}<k\leqslant t_n} \eta_k$ ne peuvent qu'approcher (et non égaler) les positions U_{t_n}. Il est donc plus difficile de montrer que la suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ contient toute l'information nécessaire pour reconstituer la marche $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$.

1. Notations et résultats préliminaires

Commençons par rappeler quelques propriétés classiques qu'on rencontre déjà dans un contexte similaire dans les travaux de M. Yor [10, 11], M. Emery et W. Schachermeyer [2] concernant l'équation de Tsirel'son [6].

Pour $k \in \mathbf{Z}$, l'application $t \mapsto \exp(2i\pi kt)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est un morphisme de groupes dont le noyau contient $\mathbf{Z}$. On note e_k le morphisme quotient de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{C}$ et ϕ la transformée de Fourier de la mesure μ, définie par $\phi(k) = \int_{\mathbf{T}} e_k d\mu$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

On suppose ici que la mesure μ n'est portée par aucun translaté de sous-groupe fini de $\mathbf{T}$. Il est bien connu que cela équivaut à supposer que pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$, $|\phi(k)| < 1$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le lemme-clé suivant :

LEMME 1.1 *Si $\mathscr{S}$ est une sous-tribu de $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et U une variable aléatoire indépendante de $\mathscr{S}$ et de loi uniforme sur $\mathbf{T}$, alors pour toute variable $\mathscr{S}$-mesurable S à valeurs dans $\mathbf{T}$, la variable $U + S$ est encore indépendante de $\mathscr{S}$ et de loi uniforme sur $\mathbf{T}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$ et pour tout $A \in \mathscr{S}$, $\mathbf{E}[\mathbf{I}_A e_k(S+U)] = \mathbf{E}[(\mathbf{I}_A e_k(S))\, e_k(U)] = \mathbf{E}[(\mathbf{I}_A e_k(S))]\mathbf{E}[e_k(U)] = 0$. □

Nous allons maintenant voir rapidement quelques propriétés des marches aléatoires indexées par $\mathbf{Z}$ dont les pas ont pour loi μ, qui sont les chaînes de Markov indexées par $\mathbf{Z}$ pour le noyau de transition Π donné par $\Pi(x,B) = \mu(B - x)$.

Existence. La loi uniforme sur $\mathbf{T}$ est une probabilité invariante pour le noyau Π. Le théorème de Kolmogorov assure donc l'existence d'une chaîne de Markov pour le noyau Π, indexée par $\mathbf{Z}$, stationnaire. Nous allons voir que "la" chaîne stationnaire est d'ailleurs la seule chaîne de Markov pour le noyau Π indexée par $\mathbf{Z}$.

Unicité en loi. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une chaîne de Markov de noyau Π. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la variable $\xi_n = U_n - U_{n-1}$ est indépendante de $\mathscr{F}^U_{n-1}$ et a pour loi μ. Quels que soient les entiers relatifs $m < n$ et $k \neq 0$, on a donc

$$\mathbf{E}[e_k(U_n)] = \mathbf{E}[e_k(U_m)]\mathbf{E}[e_k(\xi_{m+1})] \cdots \mathbf{E}[e_k(\xi_n)] = \mathbf{E}[e_k(U_m)]\phi(k)^{n-m}$$

par indépendance de $\mathscr{F}^U_m$ et des variables $\xi_{m+1},\ldots,\xi_n$, d'où $|\mathbf{E}[e_k(U_n)]| \leqslant |\phi(k)|^{n-m}$. En faisant tendre m vers $-\infty$, on obtient $\mathbf{E}[e_k(U_n)] = 0$, ce qui montre que la variable U_n suit la loi uniforme sur $\mathbf{T}$. La chaîne $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est donc stationnaire.

Indépendance de la position U_0 et de la suite des accroissements $(\xi_n)_{n\in\mathbf{Z}}$. Soit $m \in \mathbf{N}$. Nous savons déjà que vu la variable U_{-m} suit la loi uniforme sur $\mathbf{T}$ et que la suite d'accroissements $(\xi_k)_{k>-m}$ est indépendante de la tribu $\mathscr{F}^U_{-m}$ et *a fortiori* de la variable U_{-m}. En utilisant le lemme 1.1 avec $U = U_{-m}$, $S = U_0 - U_{-m} = \xi_{-m+1} + \cdots + \xi_0$ et $\mathscr{S} = \sigma((\xi_k)_{k>-m})$, on voit donc que la variable U_0 est encore indépendante de la suite $(\xi_k)_{k>-m}$, ce qu'il fallait démontrer.

La tribu asymptotique $\mathscr{T}^U_{-\infty}$ est triviale. Montrons que l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{T}^U_{-\infty}$ de toute variable $\mathscr{T}^U_0$-mesurable bornée est presque sûrement constante. D'après le théorème des classes monotones, il suffit de considérer les variables de la forme $f_m(U_{-m}) \cdots f_0(U_0)$, où $m \in \mathbf{N}$ et $f_0, \ldots, f_m$ sont des applications continues de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{R}$. D'après la propriété de Markov,

$$\mathbf{E}[\, f_m(U_{-m}) \cdots f_0(U_0) | \mathscr{T}^U_{-m}] = g(U_{-m}),$$

où l'application $g = f_m \Pi(\, f_{m-1} \ldots \Pi(\, f_1 \Pi(\, f_0)) \ldots)$ est continue de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout $n \geqslant m$, on a donc

$$\mathbf{E}[\, f_m(U_{-m}) \cdots f_0(U_0) | \mathscr{T}^U_{-n}] = h_n(U_{-n}),$$

où l'application $h_n : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ est définie par

$$h_n(u) = \Pi^{n-m} g(u) = \mathbf{E}[g(u + \xi_{-n+1} + \cdots + \xi_{-m})].$$

Or pour tout $u \in \mathbf{T}$, la loi de la variable $u + \xi_{-n+1} + \cdots + \xi_{-m}$ tend étroitement vers la loi uniforme sur $\mathbf{T}$ quand n tend vers l'infini (cela se vérifie immédiatement à l'aide des fonctions caractéristiques). Donc les fonctions h_n convergent ponctuellement vers la constante $c = \int_{\mathbf{T}} g(t)dt$. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $||h_n||_\infty \leqslant ||g||_\infty$, il y a aussi convergence dans $L^1(\mathbf{T})$. Donc la suite de variables $h_n(U_{-n})$ converge vers c dans $L^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$. D'après le théorème de convergence des martingales inverses, on a ainsi $\mathbf{E}[\, f_m(U_{-m}) \cdots f_0(U_0) | \mathscr{T}^U_{-\infty}] = c$, ce qu'il fallait démontrer.

Notre but est de construire une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ qui engendre la même filtration que la chaîne $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$. Bien entendu, cette suite doit contenir plus d'information que la suite des accroissements $(\xi_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, qui permet seulement de retrouver la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ à une "constante" additive près (dépendant du hasard, mais pas du temps).

Pour cela, nous aurons besoin d'une hypothèse un peu plus forte sur la loi μ. Cette hypothèse peut se formuler de plusieurs façons équivalentes. L'équivalence des formulations fait l'objet du résultat suivant :

PROPOSITION 1.2 *Soit μ une probabilité sur $\mathbf{T}$. Il y a équivalence entre :*

(1) *μ possède une partie diffuse non nulle ou le sous-groupe engendré par les différences $b - a$ pour a, b atomes de même masse est infini ;*

(2) *il existe une involution mesurable f de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{T}$ qui préserve la mesure μ et telle la mesure image de μ par $f - id_{\mathbf{T}}$ ne soit portée par aucun sous-groupe fini de $\mathbf{T}$;*

(3) *il existe une bijection bimesurable f de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{T}$ préservant la mesure μ et telle que la mesure image de μ par $f - id_{\mathbf{T}}$ ne soit portée par aucun sous-groupe fini de $\mathbf{T}$.*

De plus, ces assertions entraînent que μ n'est portée par aucun translaté de sous-groupe fini de $\mathbf{T}$.

Démonstration. Notons A l'ensemble des atomes de μ et D l'ensemble des différences $b - a$ pour a,b atomes de même masse.

• L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) est évidente.

• Montrons l'implication non (1) $\Rightarrow$ non (3) : si μ est atomique, alors toute bijection f de **T** dans **T** préservant la mesure μ induit une permutation de A et $\mu\{f(a)\} = \mu\{a\}$ pour tout $a \in A$. La mesure $(f - \mathrm{id}_{\mathbf{T}})(\mu)$ est donc portée par D. Si le sous-groupe engendré par D est fini, l'assertion (3) n'est donc pas vérifiée.

• Montrons l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). Il y a plusieurs cas à considérer :

* Lorsque μ possède une partie diffuse non nulle, nous construisons une involution mesurable f de **T** dans **T** préservant μ et telle que la mesure $(f - \mathrm{id}_{\mathbf{T}})(\mu)$ ne soit pas portée par le sous groupe $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$:

- Commençons par le cas particulier où μ est diffuse. En identifiant **T** à $[0\,;1[$, on se ramène au problème suivant : étant donnée une mesure diffuse μ sur $[0,1[$, construire une involution f de $[0,1[$ dans $[0,1[$ préservant la mesure μ et telle que la mesure image de μ par l'application $t \mapsto f(t) - t$ ne soit pas portée par $\mathbf{Q}$. Pour cela, on introduit la fonction de répartition F de μ, et son "inverse" continue à droite $F^{\leftarrow}$ défini par $F^{\leftarrow}(s) = \inf\{t \in \mathbf{R} : F(t) > s\}$ pour tout $s \in [0\,;1[$. Comme F est continue, l'application $F^{\leftarrow}$ est injective et $F \circ F^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{[0\,;1[}$. De plus l'ensemble $E = F^{\leftarrow}(]0\,;1[)$ est mesurable comme complémentaire d'une réunion dénombrable d'intervalles de constance de F et $\mu(E) = 1$. On pose alors

$$f(t) = \begin{cases} F^{\leftarrow}(1 - F(t)) & \text{si } t \in E, \\ t & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application f est une involution mesurable ; elle préserve la mesure μ puisque F est une bijection entre E et $]0\,;1[$ transformant μ en la loi uniforme. Comme la restriction à E de l'application $t \mapsto f(t) - t$ est strictement décroissante, donc injective, la mesure $(f - \mathrm{id}_{\mathbf{T}})(\mu)$ est diffuse.

- Si μ n'est ni diffuse ni discrète, on écrit $\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$, avec $\alpha \in]0\,;1[$, μ_1 probabilité diffuse et μ_2 probabilité discrète. Soit f_1 l'involution associée à μ_1. Il suffit alors de poser

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in A \cup f_1(A), \\ f_1(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

* Si le sous-groupe engendré par D est infini, alors de deux choses l'une :

- soit μ possède deux atomes a et b de même masse tels que $b - a$ soit irrationnel, et alors on peut prendre pour f la transposition qui échange a et b.

- soit D ne contient que des rationnels, mais l'ensemble des dénominateurs de ces rationnels écrits sous forme irréductible est infini. Pour chaque valeur possible n du dénominateur, choisissons deux atomes a_n et b_n de même masse tels que le dénominateur de $b_n - a_n$ soit n. Il suffit alors de considérer l'application f qui échange a_n et b_n pour tout n et laisse fixes les autres points.

• La dernière affirmation de la proposition est évidente. □

Remarque. La construction qui suit ne nécessite pas que f soit involutive.

Venons-en au résultat principal de cet article :

THÉORÈME 1.3 *Soit μ une probabilité sur $\mathbf{T}$ vérifiant la condition* (1) *et $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une marche aléatoire sur $\mathbf{T}$ dont les pas $\xi_n = U_n - U_{n-1}$ ont pour loi μ. Alors il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ ayant même filtration naturelle que la marche aléatoire $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$. Plus précisément, si f est une application bimesurable satisfaisant l'assertion* (3), *il existe un processus prévisible $(H_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que la suite $(f^{H_n}(\xi_n))_{n\in\mathbf{Z}}$ ait même filtration naturelle que $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$.*

Remarque. On a noté $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbf{T}}$ et $f^1 = f$, de sorte que la variable $\eta_n = f^{H_n}(\xi_n)$ coïncide avec ξ_n sur l'événement $[H_n = 0]$ et avec $f(\xi_n)$ sur l'événement $[H_n = 1]$.

Pour démontrer le théorème 1.3, nous procédons en deux étapes : nous commençons par construire le processus prévisible $(H_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et la suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$; puis nons montrons que cette suite répond à notre problème.

2. Construction de la suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$

Pour $t \in \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on pose $|t| = |x|$, où x est l'unique réel de $[-1/2,1/2[$ tel que $t = \dot{x}$.

LEMME 2.1 *Pour $r \in]0\,;1/2]$, notons*

$$\tau_r = \inf\{t \in \mathbf{N}^* : |U_t - \sum_{k=1}^{t} f(\xi_k)| \leqslant r\} = \inf\{t \in \mathbf{N}^* : |U_0 + \sum_{k=1}^{t} (\xi_k - f(\xi_k))| \leqslant r\}.$$

Alors :

- *pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $r \mapsto \tau_r(\omega)$ est décroissante et continue à droite ;*
- *pour tout $r \in]0\,;1/2]$, $\tau_{r-} = \inf\{t \in \mathbf{N}^* : |U_0 + \sum_{k=1}^{t} (\xi_k - f(\xi_k))| < r\}$;*
- *pour tout $r \in]0\,;1/2]$, $P[\tau_r = \tau_{r-}] = P[\tau_r < +\infty] = 1$.*

Démonstration. Les deux premiers points sont évidents. Montrons le troisième. Pour tout $r \in]0\,;1/2]$,

$$P[\tau_r < \tau_{r-}] \leqslant P[\exists n \in \mathbf{N}^* : |U_0 + \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - f(\xi_k))| = r] = 0,$$

car pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable $U_0 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} (\xi_k - f(\xi_k))$ suit la loi uniforme sur $\mathbf{T}$. La densité du sous-groupe engendré par le support de $(f - \mathrm{id}_{\mathbf{T}})(\mu)$ entraîne la récurrence topologique de la marche aléatoire de pas $(f(\xi_k) - \xi_k)_{k\geqslant 1}$ et la finitude de l'instant τ_r (voir par exemple [4], chapitre 3, théorème 4.6 ou exercice 4.18). □

Comme pour tout $r \in]0\,;1/2]$, $P[\tau_{r'} = \tau_r] \to 1$ quand $r' \to r$, on peut construire par récurrence descendante une suite $(r_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de réels appartenant à $]0\,;1/2]$ telle que

$$\sum_{n\in-\mathbf{N}} P[\tau_{r_n - r_{n-1}} \neq \tau_{r_n + r_{n-1}}] < +\infty.$$

Puis, grâce à la finitude des instants τ_{r_n}, on peut construire une suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ d'entiers relatifs telle que

$$\sum_{n\in-\mathbf{N}} P[\tau_{r_n} \geqslant t_{n+1} - t_n] < +\infty.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} T_n &= \inf\{t > t_n : |U_t - \sum_{t_n<k\leqslant t} f(\xi_k)| \leqslant r_n\} \\ &= \inf\{t > t_n : |U_{t_n} + \sum_{t_n<k\leqslant t} (\xi_k - f(\xi_k))| \leqslant r_n\}, \end{aligned}$$

$$V_n = \sum_{t_{n-1}<k\leqslant T_{n-1}\wedge t_n} f(\xi_k) + \sum_{T_{n-1}\wedge t_n<k\leqslant t_n} \xi_k,$$

$$\tilde{T}_n = \inf\{t > t_n : |V_n + \sum_{t_n<k\leqslant t} (\xi_k - f(\xi_k))| \leqslant r_n\}.$$

On pose enfin $N = \inf\{n \in \mathbf{Z} : \tilde{T}_n \neq T_n \text{ ou } T_n \geqslant t_{n+1}\}$ et $S = T_N \wedge \tilde{T}_N \wedge t_{N+1}$.

On définit alors la suite $(\eta_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ par $\eta_k = f(\xi_k)$ si $k \leqslant S$ et s'il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $t_m < k \leqslant T_m$, $\eta_k = \xi_k$ sinon.

Les figures 1 et 2 présentent la construction dans le cas où μ est symétrique par rapport à 0 et l'application f est l'application $t \mapsto -t$.

Voyons maintenant les premières propriétés des variables ainsi définies. Un point clé est que pour n assez proche de $-\infty$, $\tilde{T}_{n-1} = T_{n-1} < t_n$ et $|V_n - U_{t_n}| \leqslant r_{n-1}$.

LEMME 2.2 *On a les propriétés suivantes :*

* *pour tout $n \in \mathbf{Z}$, T_n et $\tilde{T}_n$ sont des temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}^U$;*
* *$N > -\infty$ et $S > -\infty$ presque sûrement ;*
* *pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $[N \geqslant n] \in \mathcal{F}^U_{t_n}$;*
* *l'instant S est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}^U$.*

Démonstration. Le premier point est facile. Vérifions les autres. Pour tout $s \in \mathbf{Z}$ et $r \in]0\,;1/2]$, notons $\tau_r^s = \inf\{t > s : |U_s + \sum_{s<k\leqslant t} (\xi_k - f(\xi_k))| \leqslant r\}$. Si on se place sur l'espace canonique $\mathbf{T}^{\mathbf{Z}}$, alors $\tau_r^s = \tau_r \circ \theta_s$, où θ_s est l'opérateur de translation défini par $\theta_s(\omega)(k) = \omega(k+s)$.

* Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $T_n = \tau_{r_n}^{t_n}$. D'après le choix fait pour la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, on a donc

$$\sum_{n\in-\mathbf{N}} P[T_n \geqslant t_{n+1}] = \sum_{n\in-\mathbf{N}} P[\tau_{r_n} \geqslant t_{n+1} - t_n] < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel Cantelli, on a presque sûrement, pour tout n assez proche de $-\infty$, $T_n < t_{n+1}$, d'où

$$V_{n+1} = \sum_{t_n<k\leqslant T_n} f(\xi_k) + \sum_{T_n<k\leqslant t_{n+1}} \xi_k,$$

$$U_{t_{n+1}} - V_{n+1} = U_{T_n} - \sum_{t_n<k\leqslant T_n} f(\xi_k),$$

ce qui entraîne que $|V_{n+1} - U_{t_{n+1}}| \leqslant r_n$ par définition de T_n.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\tau_{r_n+r_{n-1}}^{t_n} \leqslant T_n \leqslant \tau_{r_n-r_{n-1}}^{t_n}.$$

Mais sur l'événement $[|V_n - U_{t_n}| \leqslant r_{n-1}]$, on a aussi

$$\tau_{r_n+r_{n-1}}^{t_n} \leqslant \tilde{T}_n \leqslant \tau_{r_n-r_{n-1}}^{t_n},$$

grâce à l'inégalité triangulaire. Or d'après le choix fait pour la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, on a

$$\sum_{n\in-\mathbf{N}} P[\tau_{r_n-r_{n-1}}^{t_n} \neq \tau_{r_n+r_{n-1}}^{t_n}] = \sum_{n\in-\mathbf{N}} P[\tau_{r_n-r_{n-1}} \neq \tau_{r_n+r_{n-1}}] < +\infty,$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc $\tau_{r_n+r_{n-1}}^{t_n} = \tau_{r_n-r_{n-1}}^{t_n}$ presque sûrement pour tout n assez proche de $-\infty$. Ainsi, presque sûrement, $\tilde{T}_n = T_n < t_{n+1}$ pour tout n assez proche de $-\infty$, d'où $N > -\infty$ et $S > -\infty$ puisque $t_N < S \leqslant t_{N+1}$.

* Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $[N \geqslant n] = \bigcap_{k<n}[\tilde{T}_k = T_k < t_{k+1}] \in \mathscr{F}_{t_n-1}^U$.

* On a $[S = -\infty] = [N = -\infty] \in \mathscr{F}_{-\infty}^U$ et $[S = +\infty] = [N = +\infty] \in \mathscr{F}_{+\infty}^U$ car $t_N < S \leqslant t_{N+1}$. Par ailleurs, soit $s \in \mathbf{Z}$. Soit n l'entier relatif tel que $t_n < s \leqslant t_{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}[S = s] &= [N = n\,;\, T_n \wedge \tilde{T}_n \wedge t_{n+1} = s] \\ &= [N \geqslant n] \cap [\tilde{T}_n \neq T_n \text{ ou } T_n \geqslant t_{n+1}] \cap [T_n \wedge \tilde{T}_n \wedge t_{n+1} = s]\end{aligned}$$

Comme $[N \geqslant n] \in \mathscr{F}_{t_n-1}^U$ et comme l'événement $[\tilde{T}_n \neq T_n \text{ ou } T_n \geqslant t_{n+1}]$ est antérieur au temps d'arrêt $T_n \wedge \tilde{T}_n \wedge t_{n+1}$, on a $[S = s] \in \mathscr{F}_s^U$, ce qui montre que S est un temps d'arrêt. □

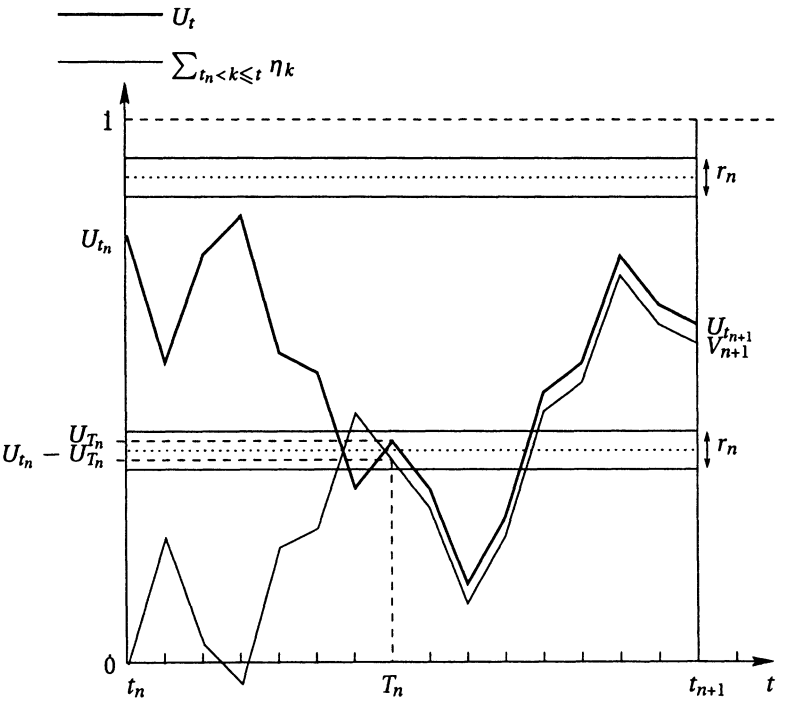

Figure 1. — Définition de T_n et construction de la suite $(\eta_k)_{k\in\mathbf{Z}}$; les deux bandes horizontales représentent l'ensemble des $u \in \mathbf{T}$ tels que $|2u - U_{t_n}| \leqslant r_n$. Sur l'événement $[T_n < t_{n+1}]$, on a $|U_{t_{n+1}} - V_{n+1}| \leqslant r_n$.

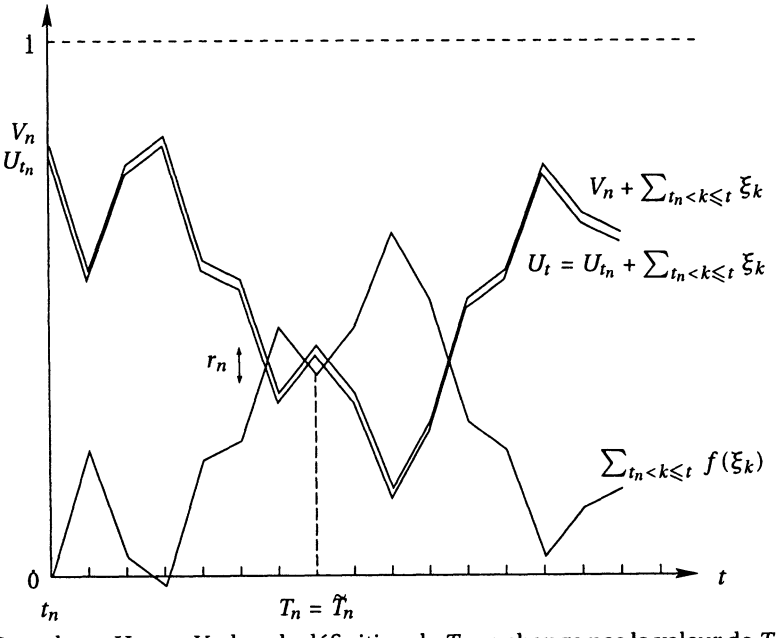

Figure 2. — Remplacer U_{t_n} par V_n dans la définition de T_n ne change pas la valeur de T_n pour n assez proche de $-\infty$: si $\tau^{t_n}_{r_n+r_{n-1}} = \tau^{t_n}_{r_n-r_{n-1}}$ et $|V_n - U_{T_n}| \leqslant r_{n-1}$, alors $\hat{T}_n = T_n$.

Soit $(H_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ le processus défini par $H_k = 1$ si $k \leqslant S$ et s'il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $t_m < k \leqslant T_m$, $H_k = 0$ sinon. Par construction, le processus $(H_k)_{n\in\mathbf{Z}}$ est prévisible dans la filtration $\mathscr{F}^U$ et à valeurs dans $\{0,1\}$. Comme la loi μ est invariante par f, les variables $\eta_k = f^{H_k}(\xi_k)$ sont donc encore indépendantes et de loi μ.

Comme la suite $(\eta_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est évidemment adaptée à $\mathscr{F}^U$, il reste à montrer que la suite $(U_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est adaptée à la filtration $\mathscr{F}^\eta$, autrement dit que la suite $(\eta_k)_{n\in\mathbf{Z}}$ contient toute l'information nécessaire pour reconstituer la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$. L'idée est que les sommes $\sum_{t_{n-1}<k\leqslant t_n} \eta_k$ coïncident avec les valeurs V_n pour tout n assez proche de $-\infty$ et approchent de mieux en mieux les positions U_{t_n} quand n tend vers $-\infty$.

3. Reconstruction de la marche $(U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ à partir de la suite $(\eta_n)_{n\in\mathbf{Z}}$

Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose

$$V'_n = \sum_{t_{n-1}<k\leqslant t_n} \eta_k,$$

$$T'_n = \inf\{t > t_n : |V'_n + \sum_{t_n<k\leqslant t} (f^{-1}(\eta_k) - \eta_k)| \leqslant r_n\}.$$

Alors T'_n est un temps d'arrêt dans la filtration naturelle $\mathscr{F}^\eta$ associée au processus $(\eta_k)_{k\in\mathbf{Z}}$. On définit un processus prévisible $(H'_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ et une suite $(\xi'_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ adaptée à la filtration $\mathscr{F}^\eta$ par $H'_k = 1$ si $t_m < k \leqslant T'_m$ pour un certain $m \in \mathbf{Z}$, $H'_k = 0$ sinon et $\xi'_k = f^{-H'_k}(\eta_k)$. Le lemme ci-dessous montre que ces deux processus coïncident avec $(H_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ et $(\xi_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ au voisinage de $-\infty$.

LEMME 3.1 *On a*

* *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$, $V'_n = V_n$ *sur l'événement* $[n \leqslant N]$;
* *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$, $T'_n = \tilde{T}_n = T_n$ *sur l'événement* $[n < N]$;
* *pour tout* $k \in \mathbf{Z}$, $H'_k = H_k$ *et* $\xi'_k = \xi_k$ *sur l'événement* $[k \leqslant S]$.

Démonstration.

* Sur l'événement $[n \leqslant N]$, on a $t_{n-1} < T_{n-1} < t_n$ donc

$$V_n = \sum_{t_{n-1}<k\leqslant T_{n-1}} f(\xi_k) + \sum_{T_{n-1}<k\leqslant t_n} \xi_k = \sum_{t_{n-1}<k\leqslant t_n} \eta_k = V'_n.$$

* Sur l'événement $[n < N]$, on a $V'_n = V_n$, $\tilde{T}_n = T_n$ et $\eta_k = f(\xi_k)$ pour tout $k \in]t_n ; T_n]$, d'où

$$\begin{aligned} T_n = \tilde{T}_n &= \inf\{t > t_n : |V_n + \sum_{t_n<k\leqslant t} (\xi_k - f(\xi_k))| \leqslant r_n\} \\ &= \inf\{t > t_n : |V'_n + \sum_{t_n<k\leqslant t} (f^{-1}(\eta_k) - \eta_k)| \leqslant r_n\} \\ &= T'_n. \end{aligned}$$

$*$ Soit $k \in \mathbf{Z}$. Soit n l'entier relatif tel que $t_n < k \leqslant t_{n+1}$. Alors l'événement $[k \leqslant S]$ est inclus dans l'événement $[n \leqslant N]$.

Sur l'événement $[k \leqslant S\,;\, n < N]$, on a $T'_n = \tilde{T}_n = T_n$, ce qui entraîne $H'_k = H_k$.

Sur l'événement $[k \leqslant S\,;\, n = N]$, on a $V'_n = V_n$ et $\eta_k = f(\xi_k)$ pour tout $k \in]t_n\,;\, S]$, donc $T'_n \geqslant S$, ce qui entraîne que $H'_k = H_k = 1$.

Ainsi, $H'_k = H_k$ et $\xi'_k = \xi_k$ sur l'événement $[k \leqslant S]$. □

COROLLAIRE 3.2 *Pour tout $t \in \mathbf{Z}$, on a sur l'événement $[t \leqslant S]$*

$$V'_n + \sum_{t_n < k \leqslant t} \xi'_k \to U_t \quad \textit{quand } n \to -\infty.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbf{Z}$. Sur l'événement $[t \leqslant S]$, on a $\xi'_k = \xi_k$ pour tout $k \leqslant t$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ tel que $t_n \leqslant t$, on a $n \leqslant N$ sur l'événement $[t \leqslant S]$, d'où $V'_n = V_n$, et ainsi

$$\Big| V'_n + \sum_{t_n < k \leqslant t} \xi'_k - U_t \Big| = |V_n - U_{t_n}| \leqslant r_{n-1},$$

ce qui montre le résultat. □

Remarquons que sur l'événement $[t > S]$, on a pour tout $n < S$,

$$V'_n + \sum_{t_n < k \leqslant t} \xi'_k = V'_n + \sum_{t_n < k \leqslant S} \xi'_k + \sum_{S < k \leqslant t} \xi'_k \longrightarrow U_S + \sum_{S < k \leqslant t} \xi'_k \text{ quand } n \to -\infty.$$

On peut donc définir un processus $(U'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ par

$$U'_t = \lim_{n \to -\infty} \Big(V'_n + \sum_{t_n < k \leqslant t} \xi'_k \Big).$$

Le processus $(U'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est adapté à la filtration $\mathscr{F}^\eta$ et coïncide avec $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sur l'intervalle de temps $]-\infty\,;\, S]$. Comme S est un temps d'arrêt dans la filtration naturelle de $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ et $S > -\infty$ presque sûrement, S est aussi un temps d'arrêt dans la filtration naturelle de $(U'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ et *a fortiori* dans la filtration $\mathscr{F}^\eta$. En effet, pour tout $t \in \mathbf{Z}$, on peut trouver une partie mesurable B_t de $\mathbf{T}^{]-\infty \cdots t]}$ telle que $[S \leqslant t] = [(U_n)_{n \leqslant t} \in B_t]$. On a alors :

$$S = \inf\{t \in \mathbf{Z} : (U_n)_{n \leqslant t} \in B_t\} = \inf\{t \in \mathbf{Z} : (U'_n)_{n \leqslant t} \in B_t\}.$$

Or pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $H_k = H'_k \mathbf{I}_{[k \leqslant S]}$ et $\xi_k = f^{-H_k}(\eta_k)$. Comme le processus $(H'_k)_{n \in \mathbf{Z}}$ est prévisible dans la filtration $\mathscr{F}^\eta$, le processus $(H_k)_{n \in \mathbf{Z}}$ est lui aussi prévisible et le processus $(\xi_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est adapté à la filtration $\mathscr{F}^\eta$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{Z}$, la variable

$$U_t = \lim_{n \to -\infty} \Big(V'_n + \sum_{t_n < k \leqslant t} \xi_k \Big)$$

est $\mathscr{F}^\eta_t$-mesurable, ce qui achève la démonstration du théorème 1.3.

Bibliographie

[1] Dubins L., Feldman J., Smorodinsky M., Tsirel'son B. *Decreasing sequence of σ-fields and a measure change for Brownian Motion.* Annals of Probability **24**-2 (1996), 882-904.

[2] Emery M., Schachermayer W. *A remark on Tsirel'son's differential equation.* Séminaire de Probabilités XXXIII, Lecture Notes in Mathematics **1709**, Springer (1999), 291-303.

[3] Emery M., Schachermayer W. *On Vershik's standardness criterion and Tsirel'son's notion of cosiness.* Séminaire de Probabilités XXXV (2001), 265-305.

[4] Revuz D. *Markov chains.* North-Holland Mathemetical Library (1975).

[5] Smorodinsky M. *Processes with no standard extension.* Israel Journal of Mathematics **107** (1998), 327-331.

[6] Tsirel'son B. *An example of differential equation having no strong solution.* Theory of Probability and Applications **20**, (1975) 427-430.

[7] Tsirel'son B. *Triple points : from non-brownian filtrations to harmonic measures.* Geometry and Functional Analysis **7** (1997), 1096-1142.

[8] Vershik A. M. *Approximation in measure theory.* Dissertation. Leningrad Univ. (1973) (en russe). Version anglaise mise à jour et complétée : *The theory of decreasing sequences of mesurable partitions.* St Petersburg Mathematical Journal **6** (1995), 705-761.

[9] von Weizsäcker H. *Exchanging the order of taking suprema and countable intersections of σ-algebras.* Annales de l'Institut Henri Poincaré, Section B **91** (1983), 91-100.

[10] Yor M. *De nouveaux résultats sur l'équation de Tsirel'son.* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **309** Série I (1983), 511-514.

[11] Yor M. *Tsirel'son's equation in discrete time.* Probability Theory and Related Fields **91**(1992), 135-152.

Christophe LEURIDAN
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)