SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LI-MING WU

Un traitement unifié de la représentation des fonctionnelles de Wiener

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 166-187

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__166_0>

UN TRAITEMENT UNIFIE DE LA REPRESENTATION DES FONCTIONNELLES DE WIENER

Wu Liming*

0 - INTRODUCTION

Sur l'espace de Wiener classique $(C_0([0,1]), \mathcal{F}, (W(t))_{t\in[0,1]}, \mu)$, toute fonctionnelle de carré intégrable F admet d'après un théorème d'Ito [9] la représentation suivante comme intégrale stochastique:

$$F = EF + \int_{[0,1]} u(t)dW(t), \tag{0.1}$$

où $u=(u(t))_{t\in[0,1]}$ est un processus adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$ du mouvement brownien W et $E\int_0^1 u(t)^2dt < \infty$. Cette représentation est l'un des outils principaux de l'analyse stochastique.

Pour F suffisamment Fréchet-dérivable, Clark [4] donne la formule suivante pour la "dérivée stochastique" u de (0.1):

$$u(t) = E[\lambda_F(.,]t,1])|\mathcal{F}_t], \tag{0.2}$$

où $\lambda_F(\omega,.)$ est la mesure de Riesz associée à la dérivée (au sens de Fréchet) de F au point $\omega\in C_0([0,1])$. Sa méthode a été développée par Haussmann [7] pour la représentation explicite des fonctionnelles d'un processus d'Ito.

La connexion entre le calcul de Malliavin et la représentation (0.1) a été établie par Bismut [1] et Gaveau, Trauber [6]: Bismut [1] a retrouvé les formules de Clark et de Haussmann en utilisant le calcul des variations stochastique et la formule d'intégration par parties de Malliavin sur l'espace de Wiener; Gaveau et Trauber [6] montrent que l'opérateur divergence δ (= l'adjoint de l'opérateur de dérivation D de Malliavin) sur l'espace de Wiener est justement l'intégrale stochastique de Skorohod [21]. Ces deux articles ont influencé et stimulé beaucoup de travaux remarquables sur la formule de Clark et l'intégrale de Skorohod. Nous en mentionnons quelques-uns, en priant le lecteur d'excuser les omissions:

1) Malliavin [13] et Ocone [19] ont généralisé la formule de Clark (0.2) aux fonctionnelles dans $Dom(D)$, i.e. dérivables au sens de Sobolev. Plus précisément, si $F\in Dom(D)$, alors

*Département de Mathématiques, Université de Wuhan, R.P. de Chine.

$$F = EF + \int_{[0,1]} ad(DF)(t)\, dW(t) \qquad (0.3)$$

où $ad(DF)(t) = E(DF|\mathcal{F}_t)$ peut être considéré comme la "projection" de DF sur l'espace des processus adaptés.

2) La formule (0.3) a été étendue aux distributions (au sens de Watanabe) sur l'espace de Wiener par Ustunel [22], en utilisant la formule d'intégration par parties. Ce travail a été considérablement simplifié par Yan [25], en utilisant la représentation chaotique des distributions établie dans Meyer et Yan [15].

3) Dans sa thèse, Blum [2] établit la formule de Clark pour les fonctionnelles d'un mouvement brownien infini-dimensionnel. Et surtout il obtient la formule de Clark associée à la représentation de Wong et Zakai pour les fonctionnelles d'un drap brownien, où apparait l'intégrale double stochastique de Cairoli et Walsh [3]. Il utilise la méthode originelle de Clark et la notion de dérivée au sens de Sobolev.

4) La méthode de Nualart [16] et Nualart, Zakai [17] nous intéresse particulièrement: ils établissent la formule de Clark (0.3) en démontrant d'abord que l'intégrale de Skorohod δ généralise celle d'Ito, et en utilisant ensuite la dualité entre D et δ. Leur méthode est basée sur une idée d'Ocone [19], et il nous semble qu'elle touche à l'essentiel de la formule (0.3). Cette méthode nous servira beaucoup.

Ce qui nous semble insuffisant dans la formule de Clark (0.3) est qu'elle n'est pas intrinsèque: l'intégrale d'Ito et l'opérateur "ad" dépendent tous deux de manière essentielle de la structure particulière de l'espace de Wiener classique, à savoir la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ et la notion associée d'adaptation; or ces notions n'ont pas d'analogue sur un espace de Wiener abstrait.

Ce travail a pour but de donner une formule de Clark intrinsèque sur un espace de Wiener abstrait, dont toutes les formules de Clark précédemment mentionnées sont des cas particuliers.

Décrivons rapidement les idées principales permettant d'atteindre cet objectif. Soit (X,H,μ) un espace de Wiener abstrait (voir le §1 de Kuo [12]). Il est naturel de penser à remplacer l'intégrale d'Ito par celle de Skorohod, la divergence δ sur (X,H,μ). Mais δ perd la propriété d'isométrie, qui joue un rôle tout-à-fait essentiel dans l'intégrale d'Ito. On introduit donc naturellement l'ensemble Φ de tous les sous-espaces de $L^2_H(X,\mu)$ $(= L^2(X,\mu;H))$ sur lesquels l'intégrale de Skorohod opère comme une isométrie. Sur un tel sous-espace V on peut imaginer que $\delta_{|V}$ ressemble beaucoup à l'intégrale d'Ito. Ensuite, on note que Φ admet la relation d'ordre partiel naturelle d'inclusion $\subset$, et qu'on peut appliquer le lemme de Zorn à Φ pour obtenir l'ensemble Φ_e de tous les éléments maximaux de Φ. Bien-sûr, ces éléments maximaux possèdent des propriétés intéressantes, qui sont à la base de ce travail.

Voici enfin le plan et les résultats principaux de cet article:

- Nous introduisons les notations et nous rappelons quelques résultats préliminaires au §1.
- Le §2 est la partie centrale de l'article: nous y établissons la formule de Clark intrinsèque, associée à un élément V de Φ, dans le théorème 1; dans le théorème 2 nous montrons que $\delta(V) = L_0^2(X,\mu)$ est une condition suffisante (malheureusement non nécessaire) pour que V soit dans Φ_e.
- Dans le §3 nous construisons une classe d'éléments maximaux associés à une résolution de l'identité de H. Nous donnons dans le théorème 3 un critère pour que $\delta(V) = L_0^2(X,\mu)$. Ce résultat permet de donner des applications au théorème 1.
- Dans le dernier paragraphe, nous montrons que notre formule de Clark contient les formules mentionnées précédemment. Nous donnons en particulier une démonstration simple et constructive de la représentation de Wong et Zakai.

1 - NOTATIONS ET PRELIMINAIRES

1.1. Notations et rappels (Kuo [12], Meyer [14], [15]).

Soit (X,H,μ) un espace de Wiener abstrait. Autrement dit, X est un Banach séparable, H est un espace de Hilbert tel que

$$X^* \subset H \subset X \qquad \text{(immersion dense)}$$

(sans perte de généralité on identifie désormais X^* à un sous-espace de H, et H à un sous-espace de X), et la transformée de Fourier de la mesure μ est donnée par

$$\hat{\mu}(\ell) = \int_X e^{i\ell(x)}\mu(dx) = \exp - \tfrac{1}{2}\|\ell\|_H^2 . \tag{1.1}$$

On note D l'opérateur dérivée sur (X,H,μ), par δ l'opérateur divergence, qui est l'adjoint de D, et par $L = \delta D$ l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck. Etant donné $F \in L^2(X,\mu;Y)$, où Y est un espace de Hilbert, la dérivée de F dans la direction $h \in H$ est définie par

$$D_h F = L^2\text{-}\lim \frac{F(.+\varepsilon h) - F(.)}{\varepsilon} \quad \text{(si la limite existe)}. \tag{1.2}$$

On note δ_h l'adjoint de D_h, qui est une application de $\mathrm{Dom}(\delta_h) \subset L^2(X,\mu;Y)$ dans $L^2(X,\mu;Y)$.

Rappelons que si $F \in \mathrm{Dom}(D;Y) = W^{2,1}(Y)$ (espace de Sobolev de fonctionnelles à valeurs dans Y), nous avons

$$\langle DF,h\rangle_H = D_hF \tag{1.3}$$

et que si $G\in Dom(\delta_h)$, alors $G\otimes h\in Dom(\delta) \subset L^2(X,\mu;Y\otimes H)$, et de plus

$$\delta(G\otimes h) = \delta_h(G). \tag{1.4}$$

Rappelons aussi que toute fonctionnelle $F\in L^2(X,\mu)$ peut être décomposée en série, via les intégrales multiples de Ito-Wiener [9]:

$$F = EF + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) \qquad \text{(convergence dans } L^2) \tag{1.5}$$

où $f_n\in H^{\odot n}$ (espace produit tensoriel symétrique). On note C_n le $n^{ième}$ chaos de Wiener (i.e. $C_n=\{I_n(f)=I_n(\mathrm{sym}\ f): f\in H^{\otimes n}\}$).

Pour $h\in H$, le vecteur exponentiel $\varepsilon(h)$ est

$$\varepsilon(h) = \exp(I(h) - \tfrac{1}{2}\|h\|_H^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(h^{\otimes n}) \tag{1.6}$$

où $I(h) = I_1(h)$ est l'intégrale de Wiener. Rappelons les formules suivantes, où $f,g,h\in H$:

$$D_h\varepsilon(f) = \langle h,f\rangle\ \varepsilon(f), \tag{1.7}$$

$$\delta_h\varepsilon(f) = (I(h) - \langle h,f\rangle)\varepsilon(f) = (I(h) - D_h)\varepsilon(f), \tag{1.8}$$

$$[D_h,\delta_g]\varepsilon(f) = (D_h\delta_g - \delta_gD_h)\varepsilon(f) = \langle h,g\rangle\ \varepsilon(f). \tag{1.9}$$

Rappelons enfin que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs exponentiels est contenu dans l'espace de Sobolev $W^{2,1} = Dom(D)$, et est dense dans $L^2(X,\mu)$ (donc aussi dans $W^{2,1}$).

<u>1.2. Ensemble isométrique de la divergence δ, ou intégrale de Skorohod, d'après Gaveau et Trauber [6]</u>.

Commençons par la

<u>Proposition 1</u> (Nualart et Zakai [17], Skorohod [21]). Soit $f,g,h\in H$, $F,G\in Dom(D)$ et $u,v\in Dom(\delta)$ $(\subset L^2(X,\mu;H))$. Alors:

a) F et G appartiennent à $Dom(\delta_h)$ et

$$E(\delta_h(F)^2) = \langle h,h\rangle\ E(F^2) + E((D_hF)^2) \tag{1.10}$$

$$E(\delta_f(F)\delta_g(G)) = \langle f,g\rangle\ E(FG) + E(D_f(F)\ D_g(G)). \tag{1.11}$$

b) Si de plus $u,v\in Dom(D)$, on a

$$E(\delta(u)\delta(v)) = E(\langle u,v\rangle_H) + E(\langle Du,\sigma(DV)\rangle_{H\otimes H}), \tag{1.12}$$

où σ est la permutation de $H\otimes H$, i.e. $\sigma(f\otimes g) = g\otimes f$.

c) On a

$$\delta_h(F) = \delta(Fh) = F\delta(h) - D_hF \tag{1.13}$$

et, plus généralement,

$$\delta(Fu) \;=\; F\delta(u) - \langle u, DF\rangle_H, \qquad (1.14)$$

au sens où Fu est Skorohod-intégrable (i.e. $FU\in\mathrm{Dom}(\delta)$) si et seulement si le terme de droite de (1.14) est de carré intégrable.

<u>Remarques</u>. 1) La méthode de démonstration de toutes ces formules est toujours la même: on les montre d'abord pour un ensemble suffisamment riche de "bonnes" fonctions simples, puis on passe au cas général par approximation, en utilisant le fait que les opérateurs D, δ, D_h, δ_h sont fermés.

Par exemple, (a) peut être prouvé ainsi: les deux membres de (1.11) sont des formes bilinéaires en (F,G), et le coté droit est continu pour la norme

$$\|F\|_{\mathrm{Dom}(D)} \;=\; (\|F\|^2_{L^2} + \|DF\|^2_{L^2(X,\mu;H)})^{1/2}.$$

Pour $F=\varepsilon(h_1)$ et $G=\varepsilon(h_2)$, où $h_1,h_2\in H$, on fait le calcul:

$$\begin{aligned} E(\delta_f F\ \delta_g G) &= E(F\ (D_f\delta_g G)) \\ &= E[F(\delta_g D_f G + \langle f,g\rangle G)] \qquad \text{(par (1.9))} \\ &= \langle f,g\rangle\ E(FG) + E(D_g F\ D_f G). \end{aligned}$$

Pour $F\in\mathrm{Dom}(D)$ on choisit des F_n dans l'espace vectoriel engendré par les vecteurs exponentiels, et tels que $\|F_n-F\|_{\mathrm{Dom}(D)} \to 0$. Par suite $\delta_h(F_n)$ converge dans $L^2(X,\mu)$, ce qui entraine $F\in\mathrm{Dom}(D)$ car δ_h est fermé. On obtient alors (1.10), puis (1.11).

2) L'égalité (1.12) se montre de même, en utilisant (1.11). Dans un cadre plus restrictif, cette formule a été montrée par Skorohod [21]. Nualart et Zakai [17] ont donné une preuve de (1.11) en se basant sur la décomposition chaotique, également dans un cadre plus restrictif.

3) Les résultats (a) et (b) sont "chaotiques", au sens où ils sont vrais sur les espaces chaotiques introduits par P. Krée [10]; voir Dermoune, Krée et Wu [5] pour des résultats analogues sur l'espace de Poisson. □

Introduisons maintenant l'ensemble isométrique de δ:

$$IM(\delta) \;=\; \{u\in\mathrm{Dom}(\delta) \subset L^2(X,\mu;H):\ E(\delta(u)^2) = E(\langle u,u\rangle_H)\}. \qquad (1.15)$$

Evidemment, si $u\in IM(\delta)$ on a $cu\in IM(\delta)$ pour toute constante c, mais $IM(\delta)$ n'est pas un espace vectoriel.

Pour étudier $IM(\delta)$, nous commençons par examiner le cas des fonctions simples $u = Fh$.

<u>Proposition 2</u>. Soit $F \in L^2(X,\mu)$ et $h \in H$ avec $h \neq 0$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

(a) $Fh \in IM(\delta)$;

(b) $F \in Dom(D_h)$ et $D_h F = 0$;

(c) les variables aléatoires F et $I(h)$ sont indépendantes.

<u>Preuve</u>. Il résulte de (1.10) qu'on a $Dom(\delta_h) = Dom(D_h)$ et qu'on a l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b).

L'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c) se montre facilement par la représentation chaotique. Nous nous contentons ci-dessous de prouver l'implication (b) $\Rightarrow$ (c), qui est la moins évidente.

Ecrivons d'abord

$$F = E(F) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n), \quad \text{où } f_n \in H^{\odot n},$$

$$D_h F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(\langle f_n, h\rangle_H) \quad \text{(convergence dans } L^2),$$

où $\langle k,h\rangle_H$ pour $k \in H^{\otimes n}$ est défini par linéarité à partir de $\langle e_1 \otimes .. \otimes e_n, h\rangle_H = \langle e_n, h\rangle_H \, e_1 \otimes .. \otimes e_{n-1}$. On déduit de (b) que $\langle f_n, h\rangle_H = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Ensuite, on choisit une base orthonormale $(e_k)_{k\geq 1}$ de H, telle que $e_1 = h/\|h\|_H$. On peut décomposer f_n ainsi:

$$f_n = \sum_{1\leq k_1 \leq .. \leq k_n} c_{k_1..k_n} \, e_{k_1} \odot \cdots \odot e_{k_n},$$

de sorte que

$$\langle f_n, h\rangle_H = \sum_{1\leq k_1 \leq .. < k_n} \frac{1}{n!} c_{k_1..k_n} \langle \sum_\tau e_{k_{\tau(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{k_{\tau(n)}}, h\rangle_H$$

$$= \sum_{1\leq k_1 \leq .. \leq k_n} \frac{1}{n!} c_{k_1..k_n} \|h\| \sum_\tau \varepsilon_{1,k_{\tau(n)}} \, e_{k_{\tau(1)}} \otimes .. \otimes e_{k_{\tau(n-1)}},$$

où $\sum_\tau$ est la somme sur toutes les permutations de $\{1,..,n\}$ et ε_{ij} est le symbole de Kronecker. Comme $\langle f_n, h\rangle_H = 0$, il vient

$$c_{k_1..k_n} \varepsilon_{1,k_{\tau(n)}} = 0 \quad \text{pour tous } k_1 \leq \ldots \leq k_n \text{ et } \tau,$$

donc $c_{k_1..k_n} = 0$ si l'un des k_i vaut 1, ce qui implique

$$f_n \in ([h]^{\perp})^{\odot n},$$

où $[h] = \{ah : a \in \mathbb{R}\}$. Cette dernière propriété nous dit que $I_n(f_n)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les $I(f)$ pour f orthogonal à h, tribu qui est indépendante de $\sigma(I(h))$, ce qui achève de prouver (c). $\square$

2 - FORMULE DE CLARK INTRINSEQUE

2.1. Les sous-espaces contenus dans l'ensemble isométrique $IM(\delta)$ et la représentation des fonctionnelles de Wiener.

Nous commençons par introduire l'ensemble suivant:

$$\Phi = \{V : V \text{ est un sous-espace vectoriel de } L^2(X,\mu;H) \text{ contenu dans } IM(\delta)\}. \tag{2.1}$$

On munit Φ de l'ordre partiel associé à l'inclusion $\subset$. Notons que si Φ' est un sous-ensemble totalement ordonné de Φ, on a $\bigcup_{V\in\Phi'} V \in \Phi$. Par conséquent le lemme de Zorn s'applique, et tout $V \in \Phi$ est contenu dans un élément maximal $\hat{V}$ de Φ.

On note Φ_e l'ensemble des éléments maximaux de Φ; leur étude sera entreprise dans la section 2.2 ci-dessous.

Notons $L_0^2(X,\mu;H)$ l'ensemble des $u \in L^2(X,\mu;H)$ d'espérance nulle, et P_W le projecteur orthogonal sur le sous-espace fermé W de $L^2(X,\mu;H)$. Voici alors l'un des résultats principaux de cet article:

Théorème 1. Soit V un sous-espace fermé de $L_0^2(X,\mu;H)$ contenu dans $IM(\delta)$. Alors l'image $\delta(V)$ est un sous-espace fermé de $L_0^2(X,\mu)$, et pour tout $F \in Dom(D)$ on a

$$P_{\delta(V)}F = \delta(P_V(DF)). \tag{2.2}$$

Preuve. La première affirmation est évidente. Pour montrer (2.2) il nous suffit d'établir que

$$E[\delta(u)\ \delta(P_V(DF))] = E[\delta(u)F] \tag{2.3}$$

pour tout $u \in V$. Mais, comme u et $P_V(DF)$ sont dans $V \in \Phi$, on a

$$\begin{aligned} E[\delta(u)\ \delta(P_V(DF))] &= E(\langle u, P_V(DF)\rangle_H) \\ &= E(\langle u, DF\rangle_H) \\ &= E[\delta(u)\ F] \quad \text{(par dualité de } \delta \text{ et } D). \square \end{aligned}$$

Remarques. 1) Si $V=H$, $\delta(V)$ est le premier chaos C_1 et la formule (2.2) devient

$$P_{C_1}F = \delta(E(DF)),$$

qui est triviale.

2) L'opérateur composé $P_V D$ vérifie pour tout $F \in Dom(D)$:

$$\|(P_V D)(F)\|_{L^2(X,\mu;H)} = \|P_{\delta(V)}F\|_{L^2(X,\mu)} \leq \|F\|_{L^2(X,\mu)}.$$

Par conséquent il s'étend en un opérateur linéaire borné de $L^2(X,\mu)$ dans V. En ce sens, (2.2) est vraie pour tout $F \in L^2(X,\mu)$.

3) Quand $\delta(V) = L_0^2(X,\mu)$, la formule (2.2) donne une représentation complète, c'est-à-dire que pour tout $F \in L^2(X,\mu)$, on a:

$$F = E(F) + \delta(P_V(DF)). \tag{2.4}$$

Par conséquent, le problème principal qu'il nous reste consiste à étudier dans quels cas $\delta(V) = L_0^2(X,\mu)$. Une condition nécessaire presque évidente est que V soit un élément maximal de Φ, mais ceci n'est malheureusement pas suffisant, et le problème reste ouvert.

4) Pour $F \in L^2(X,\mu;Y)$, où Y est un Hilbert, la formule (2.2) est encore vraie si on interprête $P_V u$ pour $u \in L^2(x,\mu;Y \otimes H)$ de la façon suivante:

$$P_V u = P_{Y \otimes V} u,$$

ou de manière équivalente:

$$\langle P_V u, y\rangle_Y = P_V \langle u,y\rangle_Y$$

pour tout $y \in Y$. Cette remarque nous servira dans notre démonstration de la représentation de Wong et Zakai.

5) Le théorème 1 est vrai sur l'espace de Fock, en identifiant D avec a^- et δ avec a^+ (voir Meyer [14]). □

Terminons cette section avec le:

Corollaire. Soit V comme dans le théorème 1. Pour que $F \in \delta(V)$ il faut et il suffit qu'on ait

$$E(F) = 0 \quad \text{et} \quad E(F^2) = E(\|P_V(DF)\|_H^2). \tag{2.5}$$

2.2. Les éléments maximaux de Φ.

Commençons par la

Proposition 3. (a) Si $V \in \Phi$, sa fermeture $\overline{V}$ dans $L^2(X,\mu;H)$ appartient aussi à Φ. En particulier, tout $V \in \Phi_e$ est un sous-espace fermé de $L^2(X,\mu;H)$.

(b) Si on identifie H avec le sous-espace des fonctionnelles constantes de $L^2(X,\mu;H)$, on a

$$\bigcap_{V \in \Phi_e} V = H.$$

Preuve. (a) est une conséquence directe du fait que l'opérateur δ est fermé. Quant à (b), nous allons ici montrer l'inclusion

$$H \subset \bigcap_{V \in \Phi_e} V, \tag{2.6}$$

et l'inclusion inverse sera montrée au §4. Pour obtenir (2.6), on observe que pour tout $h \in H$ et tout $v \in \mathrm{Dom}(\delta)$, on a

$$E(\delta(h)\ \delta(v)) \quad = \quad E[\delta(h)\ \delta(E(v))]$$

(car si $g \in H$, $f_n \in H^{\otimes n}$, on a $\delta(g\ I_n(f_n)) = n\ I_{n+1}(f_n \otimes g)$; il suffit alors d'utiliser la représentation chaotique de v). On a donc

$$E(\delta(h)\ \delta(v)) \quad = \quad \langle h, E(v)\rangle_H \quad = \quad E(\langle h, v\rangle_H),$$

$$E(\delta(h)^2) \quad = \quad \langle h, h\rangle_H .$$

Si $V \in \Phi$ et si V' est l'espace vectoriel engendré par V et h, on en déduit que $E(\delta(w)^2) = E(\langle w, w\rangle_H)$ pour tout $w \in V'$, de sorte que $V' \in \Phi$. Si alors V est maximal dans Φ, on a donc $V' = V$, donc $h \in V$, d'où (2.6). □

Nous donnons maintenant une condition suffisante pour que $V \in \Phi_e$:

<u>Théorème 2</u>. Soit $V \in \Phi$. Si $\delta(V) = L^2_0(X, \mu)$, alors $V \in \Phi_e$, mais l'implication inverse est fausse.

<u>Preuve</u>. Soit $\hat{V} \in \Phi_e$ avec $V \subset \hat{V}$. Comme $\delta(V) \subset L^2_0(X, \mu)$ et comme δ est injectif sur $\hat{V}$, on obtient $V = \hat{V}$.

La seconde affirmation sera montrée au §3 par un contre-exemple. □

<u>3 - UNE CLASSE D'ELEMENTS MAXIMAUX DE Φ</u>

Pour que la formule de Clark intrinsèque donnée au théorème 1 soit applicable dans des cas concrets, nous avons besoin d'une classe suffisamment riche d'éléments maximaux suffisamment "bons". C'est une telle classe que nous nous proposons d'exhiber dans ce paragraphe.

<u>3.1. Eléments de Φ associés à une résolution de l'identité de H</u>.

Soit $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ une résolution de l'identité de H (voir [26]); autrement dit:

i) les E_λ sont des projecteurs orthogonaux de H;

ii) $E_\lambda E_{\lambda'} = E_{\lambda \wedge \lambda'}$;

iii) pour tous $h \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\lambda' \downarrow \lambda} E_{\lambda'} h = E_\lambda h, \qquad \lim_{\lambda' \downarrow -\infty} E_{\lambda'} h = 0, \qquad \lim_{\lambda' \uparrow \infty} E_{\lambda'} h = h.$$

On introduit les notations suivantes:

$H_\lambda \;=\; E_\lambda(H) \;=\;$ l'image de H, qui est un sous-espace fermé;

$H_{\lambda-} \;=\; \overline{\bigcup_{\lambda' < \lambda} H_{\lambda'}}$;

$\mathcal{F}_\lambda \;=\; \sigma(I(h) : h \in H_\lambda)$;

$\mathcal{F}_{\lambda-} \;=\; \bigvee_{\lambda' < \lambda} \mathcal{F}_{\lambda'} \;=\; \sigma(I(h) : h \in H_{\lambda-})$.

Mentionnons également les conséquences suivantes de la propriété (iii) ci-dessus:

$$H_{\lambda+} := \bigcap_{\lambda'>\lambda} H_{\lambda'} = H_\lambda; \qquad H_{+\infty} := \overline{\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} H_\lambda} = H;$$
$$H_{-\infty} := \bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}} H_\lambda = \{0\}.$$

Par suite on a (cf. [20]):

$$\mathcal{F}_{\lambda+} := \bigcap_{\lambda'>\lambda} \mathcal{F}_{\lambda'} = \mathcal{F}_\lambda;$$
$$\mathcal{F}_{+\infty} := \bigvee_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_\lambda = \sigma(I(h)\colon h\in H) = \text{complétée de la tribu borélienne de } X;$$
$$\mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_\lambda = \text{la tribu triviale}.$$

On désigne par S le sous-espace vectoriel de $L^2(X,\mu;H)$ engendré par $\{Fh\colon h\in H_\lambda^\perp$ et F est $\mathcal{F}_\lambda$-mesurable, de carré intégrable; $\lambda\in\mathbb{R}\}$. S est donc l'ensemble des u de la forme

$$u = \sum_{k=1}^m F_k h_k, \tag{3.1}$$

où $h_k \in H_{\lambda_{k+1}} \cap H_{\lambda_k}^\perp$, F_k est $\mathcal{F}_{\lambda_k}$-mesurable, avec $\lambda_1<\ldots<\lambda_m<\lambda_{m+1}=+\infty$ et $m\in\mathbb{N}$.

<u>Lemme 1</u>. On a $S\subset \mathrm{Dom}(\delta)$ et δ est une isométrie de S dans $L_0^2(X,\mu)$. Autrement dit, $S\in\Phi$.

<u>Preuve</u>. Soit $Fh\in S$, avec $h\in H_\lambda^\perp$ et F mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\lambda = \sigma(I(g)\colon g\in H_\lambda)$; F est donc indépendante de $I(h)$. Il résulte alors de la proposition 2 que $Fh\in IM(\delta)$, et $F\in\mathrm{Dom}(D_h)$ et $D_hF=0$. Mais (1.13) est valable dès que $F\in\mathrm{Dom}(D_h)$, tandis que $\delta(h) = I(h)$. Par suite:

$$\delta(Fh) = \delta_h(F) = F\,I(h).$$

Si maintenant $u\in S$ est de la forme (3.1), il s'ensuit que $u\in\mathrm{Dom}(\delta)$ et que

$$\begin{aligned} E[\delta(u)^2] &= E[(\sum_{k=1}^m F_k\, I(h_k))^2] \\ &= E(\sum_{k=1}^m F_k^2\, I(h_k)^2) + 2\sum_{k<\ell} E(F_k\, F_\ell\, I(h_k)\, I(h_\ell)) \\ &= E(\langle u,u\rangle_H), \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de ce que $F_kF_\ell I(h_k)$ est $\mathcal{F}_{\lambda_\ell}$-mesurable, et donc indépendante de $I(h_\ell)$. On a donc $u\in IM(\delta)$. □

Il résulte de ce lemme et de la proposition 3 que $V=\overline{S}$ appartient aussi à Φ. Nous appelons $V=\overline{S}$ le <u>sous-espace d'isométrie</u> de δ, associé à $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$.

Voici un autre résultat important de cet article:

<u>Théorème 3</u>. Pour le sous-espace d'isométrie $V=\overline{S}$ de δ associé à $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, les deux conditions ci-dessous sont équivalentes:

(a) $\delta(V) = L_0^2(X,\mu)$;

(b) $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est fortement continu, c'est-à-dire:

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} E_{\lambda'}h = E_\lambda h$$

pour tous $h\in H$, $\lambda\in\mathbb{R}$, ou de manière équivalente: $H_{\lambda-}=H_\lambda$ pour tout λ.

Preuve. Avant de donner la démonstration proprement dite, rappelons rapidement, selon Yoshida [26], qu'on peut définir l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\ dE_\lambda h \qquad (3.3)$$

où g est une application de $\mathbb{R}$ dans un Hilbert Y, et $h\in H$. L'intégrale (3.3) a les propriétés suivantes:

(i) Si $g = \sum_k y_k 1_{]\lambda_k,\lambda_{k+1}]}$ (somme finie), où $y_k\in Y$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\ dE_\lambda h = \sum_k u_k\otimes(E_{\lambda_{k+1}}h - E_{\lambda_k}h). \qquad (3.4)$$

(ii) Si $g\in L^2(\mathbb{R},d\langle E_\lambda h,h\rangle;Y)$, l'intégrale (3.3) existe, et on a

$$\langle\int g(\lambda)\ dE_\lambda h,\int g(\lambda)\ dE_\lambda h\rangle_{Y\otimes H} = \int\langle g(\lambda),g(\lambda)\rangle_Y\ d\langle E_\lambda h,h\rangle_H. \qquad (3.5)$$

Rappelons aussi la formule d'intégration par parties suivante:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(F_{s-})dF_s = f(F_{+\infty})-f(F_{-\infty})-\sum_{s\in\mathbb{R}}[f(F_s)-f(F_{s-})-f'(F_{s-})(F_s-F_{s-})] \qquad (3.6)$$

où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continuement dérivable, et où $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est croissante, càd, avec $F_{+\infty} := \lim_{t\uparrow\infty} F_t < \infty$ et $F_{-\infty} := \lim_{t\downarrow-\infty} F_t > -\infty$.

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème. Pour $f\in H$ fixé, on note $F(\lambda) = \langle E_\lambda f,E_\lambda f\rangle_H = \langle E_\lambda f,f\rangle_H$, qui est une fonction positive croissante càd sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{\lambda\uparrow\infty} F(\lambda) = \langle f,f\rangle_H$ et $\lim_{\lambda\downarrow-\infty} F(\lambda) = 0$.

D'après (1.3) et (1.7), on a d'abord

$$D\varepsilon(f) = \varepsilon(f)\otimes f.$$

Ensuite, nous allons montrer que

$$P_V D\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}}\varepsilon(E_{\lambda-}f)\ dE_\lambda f. \qquad (3.7)$$

Pour cela, il suffit de montrer les deux propriétés

$$\int_{\mathbb{R}}\varepsilon(E_{\lambda-}f)\ dE_\lambda f \in V, \qquad (3.8)$$

$$\langle\int_{\mathbb{R}}\varepsilon(E_{\lambda-}f)\ dE_\lambda f,Fh\rangle_{L^2(X,\mu)\otimes H} = \langle D\varepsilon(f),Fh\rangle_{L^2(X,\mu)\otimes H}, \qquad (3.9)$$

pour tous $F\in L^2(X,\mathcal{F}_{\lambda_0},\mu)$ et $h\in H_{\lambda_0}^{\perp}$, où $\lambda_0\in\mathbb{R}$ est arbitraire.

Pour (3.8), on remarque d'abord que $\lambda\to\varepsilon(E_{\lambda-}f)$ est une application càg de $\mathbb{R}$ dans $L^2(X,\mu)$, qui en outre appartient à $L^2(\mathbb{R},d\langle E_\lambda f,f\rangle;L^2(X,\mu))$ puisque si $F(\lambda) = \langle E_\lambda f,f\rangle = \langle E_\lambda f,E_\lambda f\rangle$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \|\varepsilon(E_{\lambda-}f)\|^2_{L^2(X,\mu)} \, d\langle E_\lambda f,f\rangle_H = \int_{\mathbb{R}} \exp \langle E_{\lambda-}f,f\rangle_H \, d\langle E_\lambda f,f\rangle$$
$$= e^{\langle f,f\rangle} - 1 - \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} [e^{F(\lambda)} - e^{F(\lambda-)} - e^{F(\lambda-)}(F(\lambda)-F(\lambda-))]$$
$$\leq e^{\langle f,f\rangle} - 1 \tag{3.10}$$

(on a utilisé la formule d'intégration par parties (3.6)). Ceci montre que l'intégrale dans (3.8) existe, et aussi qu'on peut choisir une suite de subdivisions $\{-\infty<\lambda_1^n<\ldots<\lambda_{k_n}^n<+\infty\}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{k_n-1} \varepsilon(E_{\lambda_k^n}f)\, 1_{]\lambda_k^n,\lambda_{k+1}^n]}(\lambda) \longrightarrow \varepsilon(E_{\lambda-}f)$$

dans $L^2(\mathbb{R},d\langle E_\lambda f,f\rangle;L^2(X,\mu))$. Par conséquent nous déduisons de (3.5):

$$u_n := \sum_{k=1}^{k_n-1} \varepsilon(E_{\lambda_k^n}f)[E_{\lambda_{k+1}^n}f - E_{\lambda_k^n}f] \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \varepsilon(E_{\lambda-}f)\, dE_\lambda f \tag{3.11}$$

dans $L^2(X,\mu)\otimes H = L^2(X,\mu;H)$. On a évidemment $u_n\in S$, donc (3.8) est établi.

Pour obtenir (3.9), nous obtenons d'après (3.11):

$$\langle\int_{\mathbb{R}} \varepsilon(E_{\lambda-}f)\, dE_\lambda f, Fh\rangle_{L^2(X,\mu)\otimes H} = \int_{\mathbb{R}} E[F\,\varepsilon(E_{\lambda-}f)]\, d\langle E_\lambda f,h\rangle$$

$$= \int_{]\lambda_0,\infty[} E[F\,\varepsilon(f)]\, d\langle E_\lambda f,h\rangle \quad \text{(d'après les hypothèses sur } F \text{ et } h)$$

$$= E[F\,\varepsilon(f)\,\langle f,h\rangle_H) = E(\langle D\varepsilon(f),Fh\rangle_H) \quad \text{(d'après (1.7).}$$

(3.9) est ainsi établi, et on a donc prouvé (3.7).

Nous pouvons maintenant montrer aisément l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b). D'abord, si on a (a), le corollaire du théorème 1 montre que pour tout $f\in F$,

$$e^{\langle f,f\rangle} - 1 = E[(\varepsilon(f) - 1)^2]$$
$$= E(\|P_V\, D\, \varepsilon(f)\|_H^2)$$
$$= E(\|\int_{\mathbb{R}} \varepsilon(E_{\lambda-}f)\, dE_\lambda f\|_H^2) \quad \text{(par (3.7))}$$
$$= E(\int_{\mathbb{R}} \varepsilon(E_{\lambda-}f)^2\, d\langle E_\lambda f,f\rangle) \quad \text{(par (3.5)).}$$

Nous en déduisons, d'après (3.10), que $\lambda \to \langle E_\lambda f,f\rangle$ est continu, et donc $E_\lambda f = E_{\lambda-}f$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. On a donc (b).

Inversement, supposons (b). Pour obtenir (a), et comme $\delta(V)$ est un sous-espace fermé de $L_0^2(X,\mu)$, il nous suffit de montrer que pour tout $f\in H$:

$$\varepsilon(f) - 1 = P_{\delta(V)}(\varepsilon(f)-1).$$

D'après le théorème 1, on a $\delta(P_V D\varepsilon(f)) = P_{\delta(V)}(\varepsilon(f)-1)$, donc il suffit de montrer que $\delta(P_V D\varepsilon(f))$ et $\varepsilon(f)-1$ ont la même norme dans

$L^2(X,\mu)$. Pour ceci, on remarque que (b) implique que (3.10) est une égalité, et on peut donc remonter les calculs de la preuve de l'implication (a) $\Rightarrow$ (b). $\square$

<u>Proposition 4</u>. Quand $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est fortement continu, la filtration $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est continue; autrement dit, toute $(\mathcal{F}_\lambda)$-martingale est p.s. à trajectoires continues.

<u>Preuve</u>. D'après les résultats généraux de la théorie des martingales, il suffit de montrer que pour tout $f\in H$, le processus $E(\varepsilon(f)\,|\,\mathcal{F}_\lambda)$ est à trajectoires continues. On a

$$E(\varepsilon(f)\,|\,\mathcal{F}_\lambda) \;=\; \varepsilon(E_\lambda f) \;=\; \exp\,(I(E_\lambda f) - \tfrac{1}{2}\,\|E_\lambda f\|_H^2).$$

La continuité de la martingale $E(\varepsilon(f)\,|\,\mathcal{F}_\lambda)$ est alors une conséquence immédiate de la continuité forte de $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, qui entraine en particulier la continuité du processus gaussien à accroissements indépendants $(I(E_\lambda f))_{\lambda\in\mathbb{R}}$. $\square$

<u>3.2. Un élément maximal V de Φ tel que</u> $\delta(V) \neq L_0^2(X,\mu)$.

Nous donnons dans cette section le contre-exemple promis pour le théorème 2.

Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base orthonormale de H. On note E_n le projecteur de H sur le sous-espace engendré par $(e_1,\ldots,e_n)$, et on associe une résolution de l'identité $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ par

$$\begin{cases} E_\lambda = 0 & \text{si } \lambda<1 \\ E_\lambda = E_{[\lambda]} & \text{si } \lambda\geq 1. \end{cases}$$

Le sous-espace isométrique de δ associé à $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est donné par

$$V = \{\textstyle\sum_{n=1}^\infty F_n e_n :\ \sum_n E(F_n^2) < \infty,\ F_n \text{ est } \sigma(I(e_1),\ldots,I(e_{n-1}))\text{-mesurable}\}. \tag{3.12}$$

Le théorème 3 nous dit que $\delta(V) \neq L_0^2(X,\mu)$. Nous allons montrer ci-dessous que $V\in\Phi_e$.

Supposons en effet que $V\notin\Phi_e$. Il existe alors $u\in IM(\delta)$ avec

$$u \neq 0, \qquad u \perp V, \qquad \delta(u) \perp \delta(V). \tag{3.13}$$

Ecrivons la décomposition chaotique de u:

$$u \;=\; E(u) + \textstyle\sum_{n=1}^\infty I_n(f_n), \tag{3.14}$$

où $f_n\in H^{\odot n}\otimes H$. Comme $\{e_{k_1}\odot\ldots\odot e_{k_n}\otimes e_k :\ 1\leq k_1\leq\ldots\leq k_n,\ k\geq 1\}$ est une base orthonormale de $H^{\odot n}\otimes H$, f_n peut s'écrire

$$f_n \;=\; \textstyle\sum_k \sum_{k_1\leq\ldots\leq k_n} c_{k_1,\ldots,k_n,k}\; e_{k_1}\odot\ldots\odot e_{k_n}\otimes e_k. \tag{3.15}$$

De (3.13), nous déduisons que $E(u) = 0$ et que f_n et $\mathrm{sym}(f_n)$ sont orthogonaux à $e_{k_1} \odot \ldots \odot e_{k_n} \otimes e_k$ pour tous entiers $k, k_1, \ldots, k_n$ tels que $k > \max(k_1, \ldots, k_n)$. Donc $c_{k_1, \ldots, k_n, k} = 0$, sauf si $k = k_1 = \ldots = k_n$. Autrement dit, f_n s'écrit

$$f_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, e_k^{\otimes(n+1)} = \mathrm{sym}(f_n). \tag{3.16}$$

Finalement, la condition $u \in IM(\delta)$ entraine

$$\begin{aligned} E(\langle u,u\rangle_H) &= \sum_{n=1}^{\infty} n! \, \langle f_n, f_n \rangle_{H^{\otimes(n+1)}} \\ &= E(\delta(u)^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! \, \langle \mathrm{sym}(f_n), \mathrm{sym}(f_n) \rangle_{H^{\otimes(n+1)}}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit grâce à (3.16) que $f_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Il y a donc une contradiction avec (3.13), d'où $V \in \Phi_e$.

4 - APPLICATIONS

Nous présentons dans ce paragraphe des applications des théorèmes 1 et 3 à la représentation des fonctionnelles sur les différents espaces de Wiener. Les idées principales sont toujours les mêmes: (1) choisir une résolution de l'identité convenable; (2) montrer que sur l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions simples correspondantes, δ coïncide avec l'intégrale stochastique usuelle; (3) appliquer les théorèmes 1 et 3.

4.1. Formule de Clark classique.

Soit $(C_0([0,1]), \mu)$ l'espace de Wiener classique. L'espace de Hilbert $L^2([0,1], dt)$ est immergé dans $C_0([0,1])$ par

$$L^2([0,1]) \ni h \longrightarrow \tilde{h}(.) = \int_0^{.} h(s)ds.$$

Avec cette immersion, $(C_0([0,1]), L^2([0,1]), \mu)$ devient un espace de Wiener abstrait. On note $W = (w(t))_{t \in [0,1]}$ la famille des applications coordonnées, qui sous μ est le mouvement brownien standard, et soit $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par les $w(s)$, $s \leq t$.

On introduit maintenant la résolution de l'identité de $L^2([0,1])$:

$$E_\lambda h = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < 0 \\ h \, 1_{[0,\lambda]} & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ h & \text{si } \lambda > 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

qui est fortement continue.

<u>Théorème A</u>. (a) Le sous-espace d'isométrie V de δ associé à (E_λ)

ci-dessus est l'espace des processus prévisibles $v=(v_t)_{t\in[0,1]}$ tels que $\int_0^t E(v_s^2)ds < \infty$, et la restriction $\delta_{|V}$ est l'intégrale d'Ito.

(b) (Théorèmes 1 et 3, et remarque (2) suivant le théorème 1) pour tout $F\in L^2(C_0([0,1]),\mu)$, on a

$$F = E(F) + \delta[(P_V D)F] = E(F) + \int_0^1 v(t)\, dw(t), \qquad (4.2)$$

où $v = (P_V D)F \in V$ et où la dernière intégrale est au sens d'Ito.

(c) Si de plus $F\in Dom(D)$, on peut exprimer l'intégrand v de (4.2) comme

$$v(t) = E(DF(t)|\mathcal{F}_t) \qquad dt\otimes\mu\text{-p.s.} \qquad (4.3)$$

La partie (a) est bien connue. (4.3) est la formule de Clark classique, établie par Clark [4] pour F suffisamment Fréchet-dérivable. La forme ci-dessus a été donnée par Malliavin [13] et Ocone [19].

Remarques. 1) Si, à la place de (4.1), on définit la résolution de l'identité suivante:

$$\hat{E}_\lambda h = h\, 1_{[(1-\lambda)\vee 0,1]},$$

on obtient comme ci-dessus, pour $F\in Dom(D)$:

$$F = E(F) + \int_0^1 E[DF(1-t)|\mathcal{F}^t]\, dw^t, \qquad (4.4)$$

où $w^t = w(1)-w(1-t)$, où $\mathcal{F}^t = \sigma(w^s\colon s\le t)$, et où le dernier terme de (4.4) est une intégrale d'Ito par rapport au brownien $(w^t,\mathcal{F}^t)_{t\in[0,1]}$.

2) Si on choisit la résolution de l'identité suivante:

$$E_\lambda h = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < 0 \\ h\, 1_{[0,\lambda]\cup[1-\lambda,1]} & \text{si } 0\le \lambda \le \frac{1}{2} \\ h & \text{si } \lambda > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

on obtiendra la formule suivante pour $F\in Dom(D)$:

$$F = E(F) + \int_0^{1/2} E[DF(t)|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{F}^t]\, dw(t) + \int_0^{1/2} E[DF(1-t)|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{F}^t]\, dw^t,$$

(les intégrales sont toujours au sens d'Ito), en remarquant que $w(t)$ et w^t sont deux browniens relativement à la filtration $\mathcal{F}_t\vee\mathcal{F}^t$, sur l'intervalle de temps $[0,\frac{1}{2}]$. □

Nous pouvons maintenant compléter la preuve de la proposition 3. Il nous faut montrer que sur (X,H,μ),

$$\cap_{V\in\Phi_e} V \subset H.$$

Il nous suffit de l'établir sur $(C_0([0,1]),L^2([0,1]),\mu)$, parce que

Φ_e ne dépend de H qu'à un isomorphisme près. Sur ce dernier espace nous avons déjà construit deux éléments de Φ_e: le sous-espace d'isométrie V de δ associé à la résolution (E_λ) de (4.1), et celui, $\hat{V}$, associé à la résolution $(\hat{E}_\lambda)$ de la remarque (1) ci-dessus. Or, il est clair que $V \cap \hat{V} = L^2([0,1])$.

4.2. Représentation des fonctionnelles d'un mouvement brownien de dimension infinie.

Soit (X,H,μ) un espace de Wiener abstrait où l'immersion de H dans X est notée i. On peut construire un "gros" espace de Wiener abstrait $(\hat{X},\hat{H},\hat{\mu})$ de la façon suivante (voir Kuo [12]):

1) $\hat{X} = C_0([0,1],X) = \{f: [0,1] \to X,$ où f est continue et $f(0)=0\}$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{s\in[0,1]} \|f(s)\|_X$.

2) $\hat{H} = L^2([0,1],dt;H)$, et l'immersion $\hat{i}$ de $\hat{H}$ dans $\hat{X}$ est
$$\hat{h} \to \hat{i}(\hat{h}) = \int_0^{\cdot} i(\hat{h}(s))\, ds.$$

3) Comme $\hat{i}^*: \hat{X}^* \to \hat{H}^* = \hat{H}$ est une immersion, on peut définir $\hat{\mu}$ comme l'unique mesure gaussienne vérifiant
$$\forall \ell \in \hat{X}^*: \quad \int_{\hat{X}} \exp\,(\sqrt{-1}\ \ell(x))\ \hat{\mu}(dx) = \exp - \tfrac{1}{2}\ \|\ell\|^2_{\hat{H}}.$$

Si on désigne par $W = (W(t))_{t\in[0,1]}$ la famille des applications coordonnées de $\hat{X} = C_0([0,1],X)$ dans X, la propriété (3) ci-dessus revient à dire que W est un mouvement brownien standard à valeurs dans (X,H,μ) (voir [12]). On note $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par les $W(s)$ pour $s \leq t$.

On rappelle que l'espace des intégrands de l'intégrale stochastique introduite dans cette situation par Kuo est

$$V = \{u: \hat{X}\times[0,1] \to H \text{ tel que } u(.,t) \text{ soit } \mathcal{F}_t\text{-mesurable pour tout } t, \text{ et } E(\int_0^1 \|u(t)\|^2_H\, dt < \infty\}. \tag{4.5}$$

Cet espace est la fermeture dans $L^2(\hat{X},\hat{\mu};\hat{H}) = L^2(\hat{X}\times[0,1],\hat{\mu}\otimes dt;H)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ engendré par l'ensemble
$$\{F i^*(\ell) 1_{]t,t']}: \ell \in X^*,\ F \in L^2(\hat{X},\mathcal{F}_t,\hat{\mu}),\ t<t'\}.$$

Pour $u = F i^*(\ell) 1_{]t,t']} \in \mathcal{L}$, l'intégrale de Kuo est donnée par
$$\int_0^1 \langle u(t), dW(t)\rangle = F\ \ell(W(t')-W(t)), \tag{4.6}$$
qui est égale à $\delta(u)$ d'après la proposition 2 et (1.13).

Introduisons maintenant une résolution de l'identité (E_λ) de $\hat{H}$:
$$E_\lambda \hat{h} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < 0 \\ \hat{h}\ 1_{[0,\lambda]} & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \hat{h} & \text{si } \lambda > 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

En remarquant que $\mathcal{F}_t = \sigma(I(E_t\hat{h}) : \hat{h}\in\hat{H})$, nous voyons clairement que le sous-espace isométrique de δ associé à (E_λ) ci-dessus est exactement l'espace des intégrands V, donné par (4.5). Par suite nous avons d'après les théorèmes 1 et 3 et la remarque (2) suivant le théorème 1:

<u>Théorème B</u>. Sur $(\hat{X},\hat{H},\hat{\mu})$, nous avons:

(a) δ est une extension de l'intégrale stochastique de Kuo.

(b) Pour tout $F\in L^2(\hat{X},\hat{\mu})$,

$$F = E(F) + \delta((P_V D)F) = E(F) + \int_0^1 \langle v(t), dW(t)\rangle,$$

où $v = (P_V D)F \in V$ avec V espace défini par (4.5).

(c) Si de plus $F\in \mathrm{Dom}(D)$, alors

$$F = E(F) + \int_0^1 \langle E[DF(t)|\mathcal{F}_t], dW(t)\rangle.$$

<u>Remarques</u>. 1) Quand $(X,H,\mu) = (\mathbb{R},\mathbb{R},\mu(dx) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)\,dx)$, le théorème B devient le théorème A.

2) Supposons que $(X,H,\mu) = (L^2(\mathbb{N},d\lambda),\ell^2,\mu)$, où

- $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(i) < \infty$ et $\lambda(i) > 0$ pour tout $i\in\mathbb{N}$;
- si $x=(x(i) : i\in\mathbb{N})$ est la suite des coordonnées de $x\in L^2(\mathbb{N},d\lambda)$ alors μ désigne l'unique probabilité sous laquelle les $x(i)$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Dans cette situation, le théorème B donne la représentation des fonctionnelles d'un nombre infini de browniens $W=(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ indépendants, établie par Hitsuda et Watanabe [8], ainsi que la formule de Clark associée donnée par Blum [2].

3) Quand $(X,H,\mu) = (C_0([0,1]),L^2([0,1]),\mu)$, la formule de Clark (i.e. (c) du théorème B) a aussi été établie par Blum [2].

4) Bien que le théorème B n'apporte pas de résultats nouveaux dans les cas 1,2,3 décrits ci-dessus, il est intéressant par sa généralité.

<u>4.3. La représentation de Wong-Zakai des fonctionnelles d'un drap brownien</u>.

Nous commençons par introduire les notations nécessaires:

1) $C_0([0,1]^2)$ est l'espace des fonctions $f: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, continues, nulles sur les axes, avec la norme $\|f\| = \sup|f(z)|$.

2) L'application $h \to \hat{h}$, où $\hat{h}(s,t) = \int_0^s\int_0^t h(s',t')ds'dt'$ est une immersion dense de $L^2([0,1]^2, dz = ds\otimes dt)$ dans $C_0([0,1]^2)$.

3) On note $(W_z)_{z\in[0,1]^2}$ l'ensemble des applications coordonnées sur $C_0([0,1]^2)$. On désigne par $\mathcal{F}_z$ la tribu engendrée par les $W_{z'}$, pour $z'\leq z$ ($\leq$ désigne l'ordre partiel naturel sur $[0,1]^2$).

4) μ est l'unique mesure gaussienne sur $C_0([0,1]^2)$ faisant de $W=(W_z)_{z\in[0,1]^2}$ un drap brownien canonique, i.e.

- W est un champ gaussien centré,
- $E(W_zW_{z'}) = (s\wedge s')(t\wedge t')$, où $z=(s,t)$ et $z'=(s',t')$.

Il est bien connu que $(C_0([0,1]^2,L^2([0,1]^2,dz),\mu)$ constitue un espace de Wiener abstrait, avec l'immersion $h \to \hat{h}$ donnée ci-dessus.

Introduisons deux résolutions de l'identité de $L^2([0,1]^2,dz)$:

$$\begin{cases} E^1_\lambda h = h\ 1_{(]-\infty,\lambda]\cap[0,1])\times[0,1]} \\ E^2_\lambda h = h\ 1_{[0,1]\times(]-\infty,\lambda]\cap[0,1])}, \end{cases} \tag{4.8}$$

qui sont toutes deux fortement continues. Il est clair que le sous-espace d'isométrie V^i de δ associé à $(E^i_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est

$$V^i = \{u\in L^2(C_0([0,1]^2)\times[0,1]^2,\mu\otimes dz):\ u(.,z)\ \text{est}\ \mathcal{F}_{z^i}\text{-mesurable pour } dz\text{-presque tout } z\in[0,1]^2\},$$

où $z^1=(s,1)$ et $z^2=(1,t)$ lorsque $z=(s,t)$.

On remarque que

$$V^1\cap V^2 = \{u\in L^2(C_0([0,1]^2)\times[0,1]^2,\mu\otimes dz):\ u(.,z)\ \text{est}\ \mathcal{F}_z\text{-mesurable pour } dz\text{-presque tout } z\in[0,1]^2\}.$$

Notons aussi que V^1, V^2 et $V^1\cap V^2$ sont respectivement les espaces d'intégrands de la 1-intégrale stochastique, de la 2-intégrale stochastique, et de l'intégrale stochastique sur le plan, introduites par Cairoli et Walsh [3]. De la même manière que dans les sections précédentes, nous avons le:

<u>Théorème C</u>.

(a) Les restrictions $\delta_{|V^1}$, $\delta_{|V^2}$, $\delta_{|V^1\cap V^2}$ sont respectivement les 1-intégrale, 2-intégrale, intégrale sur le plan, de Cairoli et Walsh.

(b) Pour tout $F\in L^2(C_0([0,1]^2),\mu)$, on a

$$\begin{aligned} F &= E(F) + \delta((P_{V^1}D)F) \\ &= E(F) + \int_{[0,1]^2} v_1(z)\ d^1W(z) \\ &= E(F) + \delta((P_{V^2}D)F) \end{aligned}$$

$$= E(F) + \int_{[0,1]^2} v_2(z)\, d^2W(z),$$

où $v_i = (P_{V^i}D)F$ et $\int_{[0,1]^2} v_i(z)\, d^iW(z)$ désigne la i-intégrale.

(c) Si de plus $F \in Dom(D)$, alors dz-presque partout en $z \in [0,1]^2$:

$$(P_{V^i}DF)(z) = E(DF(z) | \mathcal{F}_{z^i})$$

pour $i=1,2$ (z^i a été défini plus haut).

L'originalité essentielle de la théorie de l'intégrale stochastique sur le plan développée par Cairoli et Walsh [3] réside dans l'introduction d'une intégrale stochastique double d'un type nouveau. Wong et Zakai [23] ont développé le calcul stochastique correspondant, et ils ont notamment montré que tout $F \in L^2(C_0([0,1]^2),\mu)$ s'écrit comme

$$F = E(F) + \int_{[0,1]^2} v(z)\, dW(z) + \int_{[0,1]^2}\int_{[0,1]^2} 1_{\{z \downarrow z'\}}\, u(z,z')\, dW(z)\, dW(z'); \tag{4.9}$$

dans cette expression, $v \in V^1 \cap V^2$ et la première intégrale ci-dessus est l'intégrale sur le plan, qui coïncide avec $\delta(v)$ d'après le théorème C; ensuite $\{z \downarrow z'\} = \{s \geq s'\} \cap \{t \leq t'\}$, avec $z=(s,t)$, $z'=(s',t')$; puis u appartient à l'ensemble suivant

$$G = \{u \in L^2(C_0([0,1]^2)\times[0,1]^2\times[0,1]^2, \mu \otimes dz \otimes dz) : \ u(.,z,z') \text{ est } \mathcal{F}_{z \vee z'}\text{-mesurable pour presque tous } z,z'\};$$

finalement, le dernier terme de (4.9) est l'intégrale stochastique double de Cairoli et Walsh.

La formule de Clark correspondant à cette représentation a été établie par Blum [2]. En renvoyant le lecteur à Cairoli et Walsh [3] pour l'intégrale double, et suivant un résultat de Nualart [16], nous avons pour tout $u \in G$:

$$\delta^2(1_{\{z \downarrow z'\}}u) = \int_{[0,1]^2}\int_{[0,1]^2} 1_{\{z \downarrow z'\}}\, u(z,z')\, dW(z)\, dW(z')$$

où $\delta^2 = \delta \circ \delta$ est l'adjoint de D^2.

Donnons maintenant une preuve extrêmement simple de la représentation (4.9) de Wong et Zakai, et de la formule de Clark associée.

<u>Corollaire du théorème C</u>. Soit $V = V^1 \cap V^2$.

(a) Si $F \in Dom(D^2)$, on a

$$\begin{aligned} F &= E(F) + \delta(P_V DF) + \delta(P_{V^1}DF - P_V DF) \\ &= E(F) + \int_{[0,1]^2} E(DF(z) | \mathcal{F}_z)\, dW(z) \\ &\quad + \int_{[0,1]^2}\int_{[0,1]^2} E[D^2F(z,z') | \mathcal{F}_{z \vee z'}]\, 1_{\{z \downarrow z'\}}\, dW(z)\, dW(z'). \end{aligned}$$

(b) On a la représentation de Wong et Zakai (4.9).

Preuve. En appliquant le théorème C à la fonctionnelle $P_{V^1}DF - P_V DF$, qui à valeurs hilbertienne (cf. remarque (4) suivant le théorème 1), on obtient

$$P_{V^1}DF - P_V DF = \delta[P_{V^2}D(P_{V^1}DF - P_V DF)],$$

puisque $E(P_{V^1}DF - P_V DF) = 0$. Pour obtenir (a) il suffit donc de montrer que si $F\in\mathrm{Dom}(D^2)$,

$$P_{V^2}DP_{V^1-V}DF(z,z') = 1_{\{z\downarrow z'\}}\, E[D^2F(z,z')|\mathcal{F}_{z\vee z'}] \qquad dz\otimes dz'\text{-p.p.}$$

Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} D(P_{V^1}DF - P_V DF)(z,z') &= D[E(DF(z)|\mathcal{F}_{z^1}) - E(DF(z)|\mathcal{F}_z)](z') \\ &= E(D^2F(z,z')|\mathcal{F}_{z^1})1_{\{z'\le z^1\}} - E(D^2F(z,z')|\mathcal{F}_z)1_{\{z'\le z\}}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} &P_{V^2}DP_{V^1-V}DF(z,z') \\ &= E[E(D^2F(z,z')|\mathcal{F}_{z^1})\, 1_{\{z'\le z^1\}}|\mathcal{F}_{z'^2}] - E[E(D^2F(z,z')|\mathcal{F}_z)\, 1_{\{z'\le z\}}|\mathcal{F}_{z^2}] \\ &= E(D^2F(z,z')|\mathcal{F}_{z^1\wedge z'^2})\, 1_{\{z'\le z^1\}} - E(D^2F(z,z')|\mathcal{F}_{z\wedge z'^2})\, 1_{\{z'\le z\}} \\ &= E(D^2F(z,z')|\mathcal{F}_{z\vee z'})\, 1_{\{z\downarrow z'\}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait suivant

$$E[E(\,.\,|\mathcal{F}_z)|\mathcal{F}_{z'}] = E(\,.\,|\mathcal{F}_{z\wedge z'}). \tag{4.10}$$

On a ainsi (a), ce qui donne également (b) sous la condition que $F\in\mathrm{Dom}(D^2)$. Pour obtenir (b) dans le cas général, on approche F par une suite de F_n appartenant à $\mathrm{Dom}(D^2)$. □

Remarques. 1) En regardant le drap brownien $(W(s,t))_{(s,t)\in[0,1]^2}$ comme un brownien à valeurs dans $C_0([0,1])$, soit $s \to W(s,.)$, la 1-intégrale de Cairoli et Walsh est exactement l'intégrale de Kuo présentée au §4.2. Ainsi, le théorème C peut être considéré comme un cas particulier du théorème B; cette remarque a été faite par Blum [2].

2) Soit $V^1, V^2\in\Phi_e$ tels que $\delta(V^1) = \delta(V^2) = L^2_0(X,\mu)$. D'après le théorème 1 on a, comme dans la preuve du corollaire ci-dessus:

$$F = E(F) + \delta(P_{V^1\cap V^2}DF) + \delta^2[P_{V^2}D(P_{V^1}DF - P_{V^1\cap V^2}DF)]$$

(parce que $E(P_{V^1}DF) = P_H DF = E(P_{V^1\cap V^2}DF)$, puisque $H\subset V^i$), qui peut être considéré comme la version abstraite de la représentation de Wong et Zakai.

S'il y a n éléments maximaux $V^1,\dots,V^n$ de Φ tels que $\delta(V^i) = L_0^2(X,\mu)$, on peut procéder comme ci-dessus jusqu'à l'apparition de δ^n (c'est une généralisation de l'intégrale stochastique multiple adaptée de Nualart [16] et Nualart, Zakai [18]). Par exemple si $n=3$,

$$F = E(F) + \delta(P_{V^1\cap V^2\cap V^3}DF) + \delta^2[P_{V^1\cap V^2}D(P_{V^1} - P_{V^1\cap V^2\cap V^3})DF]$$
$$+ \delta^3[P_{V^1}\, D\, P_{V^1\cap V^2}\, D\, (P_{V^1} - P_{V^1\cap V^2\cap V^3})DF].$$

Pour le processus de Wiener indexé par $[0,1]^3$, cette formule peut être calculée explicitement comme dans le cas du drap brownien.

Remerciements. Je remercie sincèrement Monsieur Albert Badrikian pour les conversations sympathiques pendant son séjour à Wuhan, et aussi pour les références qu'il m'a communiquées. Je remercie profondément Monsieur Hans Föllmer pour son invitation chaleureuse à l'ETH de Zürich, où j'ai connu la thèse de Jonas Blum.

Références

[1] Bismut, J.M.: Martingales, the Malliavin Calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions. Z. Wahrsch. Th. 56, 469-505 (1981).

[2] Blum, J.: Clark-Haussmann formulas for the Wiener sheet. Diss. ETH No 8159.

[3] Cairoli, R. et Walsh, J.B.: Stochastic integrals in the plane. Acta Math, 134, 111-183 (1975).

[4] Clark, J.M.C.: The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. Ann. Math. Statist. 41, 1282-1295 (1971).

[5] Dermoune, A., Krée, P., Wu, L.M.: Calcul stochastique non-adapté sur l'espace de Poisson. Sém. Proba. XXII. Lect. Notes in Math. 1321, Springer Verlag, Berlin (1988).

[6] Gaveau, B. et Trauber, P.: L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel. J. Funct. Anal. 46, 230-238 (1982).

[7] Haussmann, U.: Functionals of diffusion processes as stochastic integrals. SIAM J. Control and Opt. 16, 252-269 (1978).

[8] Hitsuda, H. et Watanabe, S.: On stochastic integrals with respect to an infinite number of Brownian motions and its applications. In Proc. Int. Symp. on SDE, Kyoto 1976, ed. Ito, Wiley, New York (1978).

[9] Ito, K.: Multiple Wiener integrals. J. Math. Soc. Japan 3, 385-392 (1951).

[10] Krée, P.: La théorie des distributions en dimension quelconque (ou calcul chaotique) et l'intégration stochastique. Actes Coll. Analyse stochastique, Silivri (1986).

[11] Kunita, H.: On backward stochastic differential equations. Stochastics, 6, 293-313 (1982).

[12] Kuo, H.: Gaussian measures in Banach spaces. Lect. Notes in Math. 463, Springer Verlag, Berlin (1975).

[13] Malliavin, P.: Calcul des variations, intégrales stochastiques et complexes de de Rham sur l'espace de Wiener. C.R.A.S. Paris 299, série 1, 347-350 (1984).

[14] Meyer, P.A.: Eléments de probabilités quantiques I,II. Sém. Proba. XX, XXI. Lect. Notes in Math. (1986, 1987).

[15] Meyer, P.A. et Yan, J.A.: A propos des distributions sur l'espace de Wiener. Sém. Proba. XXI, Lect. Notes in Math. 1247, Springer Verlag, Berlin (1987).

[16] Nualart, D.: Noncausal stochastic integrals and calculus. Preprint (1987).

[17] Nualart, D. et Zakai, M.: Generalized stochastic integrals and Malliavin Calculus. Proba. Th. Rel. Fields 73, 255-280 (1986).

[18] Nualart, D. et Zakai, M.: Generalized multiple stochastic integrals and the representation of Wiener functionals. Preprint.

[19] Ocone, D.: Malliavin Calculus and stochastic integral representation of functionals of diffusion processes. Stochastics 12, 161-185 (1984).

[20] Rozanov, Yu.A.: Markov Fields. Springer Verlag, Berlin (1982).

[21] Skorohod, A.V.: On a generalization of a stochastic integral. Theory Probab. Appl. XX, 219-233 (1975).

[22] Ustunel, A.S.: Representation of the distributions on Wiener space and stochastic calculus of variations. J. Funct. Anal. 70, 126-139 (1987).

[23] Wong, E. et Zakai, M.: Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter. Z. Wahrsch. Th. 29, 109-122 (1974).

[24] Wu, L.M.: Semigroupes markoviens sur l'espace de Wiener. Thèse de doctorat de l'Univ. Paris 6 (1987).

[25] Yan. J.A.: Développement des distributions suivant les chaos de Wiener et applications à l'analyse stochastique. Sém. Proba. XXI Lect. Notes in Math. 1247, Springer Verlag, Berlin (1987).

[26] Yoshida, K.: Functional analysis. Springer Verlag, Berlin (1966)