SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RÉMI LÉANDRE
MICHEL WEBER

Une représentation gaussienne de l'indice d'un opérateur

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 105-106
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__105_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNE REPRESENTATION GAUSSIENNE DE L'INDICE D'UN OPERATEUR

Rémi LEANDRE et Michel WEBER

Soit M une variété compacte de dimension n, S_+ et S_- deux fibrés complexes hermitiens sur M. On désignera par φ^+ (resp. φ^-), une section de S_+ (resp. S^-). Soit D_+ un opérateur pseudo-différentiel ([G], chap. 1.3) elliptique d'ordre d de S_+ sur S_-, et soit D_- son adjoint. Puisque M est compacte, il possède un indice fini. On note D^2 l'opérateur sur $S_+ \oplus S_-$ égal à D_-D_+ sur S_+ et D_+D_- sur S_-, préservant la décomposition de $S_+ \oplus S_-$. Alors D_-D_+ et D_+D_- possèdent un spectre discret $\{ \lambda_{i,+} \}$ et $\{ \lambda_{i,-} \}$. Si $\lambda_{i,+}$ est une valeur propre non nulle d'ordre r pour D_-D_+, $\lambda_{i,+}$ est encore une valeur propre de D_+D_- et de même ordre. De plus, on a classiquement,([G], chap. 1.7)

$$(1)\quad \zeta(s) = \sum_{\lambda_{i,+} \neq 0} (\lambda_{i,+})^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} (\mathrm{tr}\, \exp[-tD_-D_+] - \dim \mathrm{Ker} D_-D_+)\, dt$$

Lorsque t tend vers zéro, on a ([G], chap. 1.7, lemme 1.7.4),

$$(2)\quad \mathrm{tr}\, \exp[-tD_-D_+] = \sum_{i=0}^{n} \int_M a_i^+(x)\, t^{(i-n)/2d}\, dx + o(t);$$

la série dans (1) converge donc pour tout $s > s_0 = n/2d$. Il en est de même pour la série $\sum_{\lambda_{i,-} \neq 0} 1/\lambda_{i,-}^s$. Soit m un réel positif. On conclut que

$$(3)\quad \mathrm{Ind}(D_+) = m\{ \sum_i 1/[\lambda_{i,+}^s + m] - \sum_i 1/[\lambda_{i,-}^s + m] \}.$$

Soit $P_{+,s}$ le champ gaussien sur l'ensemble des sections φ_+ de S_+, de covariance $(m + (D_-D_+))^{-1}$, et $P_{-,s}$ le champ ''symétrique'' sur l'ensemble des sections φ_- de S_- de covariance $(m + (D_+D_-))^{-1}$. Soit $\{ \varphi_i^+ \}$ un système orthonormé de vecteurs propres associé à $\{ \lambda_i^+ \}$; et soit $\{ \eta_i^+ \}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes centrées réduites. Le champ gaussien $P_{+,s}$ peut-être représenté suivant le développement convergent dans L^2

$$\sum_i [\lambda_{i,+}^s + m]^{-1/2}\, \eta_i^+\, \varphi_i^+ .$$

On a une représentation analogue pour le champ $P_{-,s}$.

Théorème: Pour tout $s>s_0$, on a la représentation suivante de l'indice de D_+

$$(4)\quad \mathrm{Ind}(D_+) = m\{ E_{+,s}[\ |\varphi^+|^2\ ] - E_{-,s}[\ |\varphi^-|^2\ ]\ \}\ .$$

Preuve: Il suffit d'observer que

$$(5)\quad E_{+,s}[\ |\varphi^+|^2\ ] = E[\ \sum_{i,j} (\lambda^{s}_{i,+} + m)^{-1/2} (\lambda^{s}_{j,+} + m)^{-1/2}\ \eta^+_i \eta^+_j\ \langle \varphi^+_i, \varphi^+_j \rangle\ ],$$

$$= \sum_i (\lambda^{s}_{i,+} + m)^{-1}\ ,$$

puisque la suite $\{\ \eta^+_i\ \}$ est gaussienne indépendante centrée réduite.
On a de la même façon

$$(5')\quad E_{-,s}[\ |\varphi^-|^2\ ] = \sum_i (\lambda^{s}_{i,-} + m)^{-1}\ .$$

On conclut en appliquant (5) et (5') à (3).

Remerciements: Nous remercions D. Bennequin et P.A. Meyer pour d'utiles suggestions.

References:

[G] GILKEY, P.B. Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer theorem. Boston Publish. and Perish, (1984).

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Laboratoire associé au C.N.R.S.,
Université Louis-Pasteur,
67084 Strasbourg Cedex .