SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SOPHIE WEINRYB
MARC YOR

Le mouvement brownien de Lévy indexé par $\mathbb{R}^3$ comme limite centrale de temps locaux d'intersection

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 225-248
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__225_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LE MOUVEMENT BROWNIEN DE LEVY INDEXE PAR $\mathbb{R}^3$ COMME LIMITE CENTRALE DE TEMPS LOCAUX D'INTERSECTION

Sophie Weinryb [1] et Marc Yor [2]

1. *Introduction.*

Dans tout ce travail, (β_t) et (β'_t) désignent - sauf précision contraire - deux mouvements browniens à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, indépendants, indexés par $t \in \mathbb{R}_+$.

(1.1) Pour tout $t > 0$, il existe un processus mesurable $(\alpha(x,t) \; ; \; x \in \mathbb{R}^3)$ tel que : pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$,

$$\text{(1.a)} \qquad \int_0^t du \int_0^u ds \; f(\beta_u - \beta'_s) = \int dx \; f(x) \; \alpha(x,t)$$

Il existe en outre une version bicontinue du processus $(\alpha(x,t) \; ; \; x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$ qui vérifie plus précisément : P-p.s., pour tous $t > 0$, $N > 0$, et $\eta \in (0, \frac{1}{2})$,

$$\text{(1.b)} \qquad \sup_{s \leq t \; ; \; |x|, |y| \leq N} \frac{|\alpha(x,s) - \alpha(y,s)|}{|x-y|^{1/2-\eta}} < \infty$$

(voir Geman-Horowitz-Rosen [2] ; Rosen [7]); nous donnons ci-dessous en (3.6) une démonstration de (1.b) à l'aide du calcul stochastique).

C'est cette version que nous considérerons toujours dans la suite.

L'objet principal de notre travail est la démonstration du

Théorème A : *Le processus continu :*

$$(\beta_t, \beta'_t \; ; \; n^{1/2}(\alpha(\tfrac{y}{n}, t) - \alpha(0,t) \; ; \quad y \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$$

converge en loi vers :

$$(\beta_t, \beta'_t \; ; \; c \; B_{\alpha(0,t)}(y) \qquad ; \quad y \in \mathbb{R}^3, \; t \geq 0)$$

---

(1) *Centre de Mathématiques appliquées. Ecole Polytechnique Palaiseau (91.128)*

(2) *Laboratoire de Probabilités - Université P. et M. Curie - Tour 56 - 4, Place Jussieu - 75252 PARIS CEDEX 05*

où $(B_u(y)\ ;\ u \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^3)$ *est un processus gaussien centré, indépendant de* (β,β'), *qui a pour covariance :*

$$E[B_s(x)\ B_t(y)] = (s \wedge t)\ \Gamma(x,y),$$

avec $\Gamma(x,y) = \frac{1}{2}\{|x| + |y| - |x-y|\}$, *et* c *une constante universelle.*

Commentaires A : 1) En particulier, pour tout $u > 0$, le processus $(B_u(x), x \in \mathbb{R}^3)$ a même loi que $(\sqrt{u}\, X_x\ ;\ x \in \mathbb{R}^3)$, où $(X_x, x \in \mathbb{R}^3)$ est un mouvement brownien de Lévy, indexé par $\mathbb{R}^3$, lequel est caractérisé par :

(1.c)
$$(X_x, x \in \mathbb{R}^3) \text{ est un processus gaussien centré tel que :}$$
$$X_o = 0 \quad \text{et} \quad E[(X_x - X_y)^2] = |x-y|.$$

2) Le théorème A est à rapprocher d'un résultat analogue pour le mouvement brownien réel $(\beta_t\ ;\ t \geq 0)$ (voir Yor [8]) :

si $(\ell_t^a\ ;\ a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ désigne la famille bicontinue des temps locaux du mouvement brownien $(\beta_t, t \geq 0)$, alors :

(1.d)
$$\left(\beta_t\ ;\ \frac{n^{1/2}}{2}\,(\ell_t^{a/n} - \ell_t^o)\ ;\ a \in \mathbb{R},\ t \geq 0\right)$$
converge en loi vers : $\left(\beta_t\ ;\ B_{(\ell_t^o, a)}\ ;\ a \in \mathbb{R},\ t \geq 0\right)$

où $(B_{(u,a)}\ ;\ a \in \mathbb{R},\ u \geq 0)$ désigne un drap brownien nul sur les axes, indépendant de β.

Fixons maintenant $\lambda > 0$, et posons $\tau_\lambda = \inf\{t : \ell_t^o > \lambda\}$.

On déduit du théorème central limite (1.d) :

(1.e)
$$\left(\frac{n^{1/2}}{2}\,(\ell_{\tau_\lambda}^{a/n} - \lambda)\ ;\ a \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} (\sqrt{\lambda}\ \gamma_a\ ;\ a \geq 0),$$

où $(\gamma_a\ ;\ a \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel, issu de 0 en $a = 0$.

Le résultat (1.e) peut également être obtenu comme conséquence du célèbre théorème suivant, dû à Ray [6] et Knight [3] :

(1.f)
$$\text{le processus } (\ell_{\tau_\lambda}^a\ ;\ a \geq 0) \text{ est le carré d'un processus de Bessel}$$
$$\text{de dimension 0, issu de } \sqrt{\lambda} \text{ en } a = 0.$$

3) Par analogie avec le commentaire 2) ci-dessus, on peut réénoncer partiellement le théorème A sous la forme suivante :
fixons $t > 0$; conditionnellement à $\alpha(0,t) = x$, le processus

$$\left(n^{1/2}(\alpha(\frac{y}{n} ; t) - \alpha(0 ; t)) ; y \in \mathbb{R}^3\right)$$

converge en loi vers : $(c\sqrt{x}\, X_y ; y \in \mathbb{R}^3)$,

où $(X_y ; y \in \mathbb{R}^3)$ est un mouvement brownien de Lévy indexé par $\mathbb{R}^3$, issu de 0 en $y = 0$.
Remarquons que l'on obtient le même théorème central limite en considérant :

$$(1.g) \qquad \frac{c}{2} n^{1/2} (|Y_{y/n} + \xi|^2 - |\xi|^2)$$

où $(Y_y ; y \in \mathbb{R}^3)$ est un mouvement brownien de Lévy, indexé par $\mathbb{R}^3$, valant 0 en $y = 0$, et $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|\xi|^2 = x$.
En effet, on a :

$$|Y_{y/n} + \xi|^2 - |\xi|^2 = |Y_{y/n}|^2 + 2(Y_{y/n}, \xi) \overset{(d)}{=} \frac{1}{n} |Y_y|^2 + \frac{2}{n^{1/2}} (Y_y, \xi)$$

et, finalement, l'expression (1.g) a même loi asymptotique que $(c\sqrt{x}\, X_y ; y \in \mathbb{R}^3)$.
Ce commentaire suggère fortement d'étudier la loi du processus $(\alpha(y ; t), y \in \mathbb{R}^3)$ pour t fixé, ou lorsque t est remplacé par un temps exponentiel indépendant des mouvements browniens β et β', et de la comparer à celle du carré de la norme d'un mouvement brownien de Lévy indexé par $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

(1.2) Le mouvement brownien de Lévy, caractérisé par (1.c), est un cas particulier des mouvements browniens fractionnaires. Pour tout $0 < \mu < 2$, il existe un processus gaussien centré $(X_x^{(\mu)} ; x \in \mathbb{R}^3)$ dont la loi est caractérisée par :

$$(1.c)_\mu \qquad X_o^{(\mu)} = 0 ; \quad E[(X_x^{(\mu)} - X_y^{(\mu)})^2] = |x-y|^\mu.$$

Nous dirons que $X^{(\mu)}$ est un mouvement brownien fractionnaire d'indice μ (pour différentes constructions de ces processus, voir l'exposé précédent dans ce volume). Nous nous proposons d'énoncer, ci-dessous, un théorème central limite - qui généralise le théorème A - dans lequel figure, comme limite en loi, un processus gaussien centré $(B_u^{(\mu)}(x) ; u \geq 0, x \in \mathbb{R}^3)$ ayant pour covariance :

$$(1.h) \qquad E[B_s^{(\mu)}(x)\, B_t^{(\mu)}(y)] = (s \wedge t)\, \Gamma_\mu(x,y),$$

où $\quad \Gamma_\mu(x,y) = \frac{1}{2}\,(|x|^\mu + |y|^\mu - |x-y|^\mu)$

Pour cela, nous introduisons les fonctionnelles du couple (β,β')

$$(I_p(y,t)\ ;\ y \in \mathbf{R}^3, t \geq 0)$$

indexées par p, pour $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$, et définies comme suit :

(i) lorsque $\frac{1}{2} < p < 1$, $\quad I_p(y,t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^t du \int_0^u ds \, \frac{1}{|\beta_u - \beta'_s - y|^{p+2}}$.

Cette expression est finie P-p.s., grâce à la formule de densité d'occupation (1.a), et à la continuité des temps locaux d'intersection.

(ii) lorsque $p = 1$, $\quad I_1(y,t) \overset{\text{def}}{=} \alpha(y,t)$.

(iii) lorsque $1 < p < \frac{3}{2}$,

$$I_p(y,t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^t du \int_0^u ds \, \frac{1_{|\beta_u - \beta'_s - y| \geq \varepsilon}}{|\beta_u - \beta'_s - y|^{p+2}} - \frac{4\pi\alpha(y,t)}{(p-1)\varepsilon^{p-1}} \right).$$

Cette limite existe grâce à la propriété de continuité (1.b) et à la formule de densité d'occupation (1.a).

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème A_p : *Soit* p *tel que* $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$, *et* $\tilde{p} = 3-2p$.

Le processus continu :

$$\left(\beta_t, \beta'_t \ ;\ n^{\frac{3}{2}-p} \, (I_p(\tfrac{y}{n},t) - I_p(0,t)) \ ;\ y \in \mathbf{R}^3, t \geq 0 \right)$$

converge en loi vers :

$$\left(\beta_t, \beta'_t \ ;\ c_p \, B^{(\tilde{p})}_{\alpha(0,t)}(y) \qquad ;\ y \in \mathbf{R}^3, t \geq 0 \right)$$

où $(B^{(\tilde{p})}_u(y)\ ;\ u \geq 0,\ y \in \mathbf{R}^3)$ *est un processus gaussien centré indépendant de* (β,β') *et dont la covariance est donnée par la formule (1.h), avec* $\mu = \tilde{p}$.

Commentaire A_p : De même que pour le théorème A, il existe un théorème analogue concernant le mouvement brownien réel $(\beta_t)_{t \geq 0}$.

Introduisons, pour $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$, les processus $(i_p(y\,;t)\ ;\ y \in \mathbf{R}, t \geq 0)$ définis par :

(i) lorsque $\frac{1}{2} < p < 1$, $i_p(y,t) = \int_0^t ds \ \frac{1}{|\beta_s - y|^p}$

(ii) lorsque $p = 1$, $i_p(y,t) = \ell_t^y$, temps local de β en y.

(iii) lorsque $1 < p < \frac{3}{2}$, $i_p(y,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^t ds \ \frac{1_{|\beta_s - y| \geq \varepsilon}}{|\beta_s - y|^p} - \frac{2\,\ell_t^y}{(p-1)\varepsilon^{p-1}} \right)$.

Cette limite existe grâce au caractère localement hôldérien d'ordre $(\frac{1}{2} - \eta)$ $(\eta > 0)$ des temps locaux dans la variable d'espace, et à la formule de densité d'occupation.

Alors, le processus $(\beta_t \ ; \ n^{\frac{3}{2}-p} \ (i_p(\frac{y}{n},t) - i_p(0,t) \ ; \ y \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers :

$$(\beta_t \ ; \ c_p \ B^{(\tilde{p})}_{(\ell_t^0, y)} \ ; \ y \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

où $(B^{(\tilde{p})}_{(u,y)}, u \geq 0, y \in \mathbb{R})$ est un processus gaussien centré, indépendant de β, et dont la covariance est donnée par la formule (1.h), avec $\mu = \tilde{p} \equiv 3-2p$.

(1.3) A l'aide de versions adéquates de la formule d'Itô, la démonstration du théorème A_p découlera aisément du théorème limite B ci-dessous, relatif à une certaine intégrale stochastique par rapport au couple (β, β').
Introduisons tout d'abord quelques notations :

si φ et ψ sont deux matrices 3×3, on note $((\varphi,\psi)) = \sum_{i,j=1}^{3} \varphi_{ij} \psi_{ij}$ le produit scalaire (de Hilbert-Schmidt) entre φ et ψ, et $\|\varphi\| = ((\varphi,\varphi))^{1/2}$. Appelons champ de matrices toute application mesurable $\Phi : \mathbb{R}^3 \to M_{3\times 3}$. Un champ de matrices est dit de carré intégrable si $\int dx \, \|\Phi(x)\|^2 < \infty$. Dans la suite, si $x,y \in \mathbb{R}^3$, $A \in M_{3\times 3}$, on note $x \cdot y$ le produit scalaire entre x et y, $A \cdot x$ l'image de x par A et $x \cdot A \cdot y$ le produit scalaire de x et $A \cdot y$.

Théorème B : Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to M_{3\times 3}$ un champ de matrices de carré intégrable. Définissons, pour $n \in \mathbb{N}$: $D_n(\Phi,t) = n^{3/2} \int_0^t d\beta_u \cdot \int_0^u \Phi(n(\beta_u - \beta'_s)) \cdot d\beta'_s \quad (t \geq 0)$.

Alors :

1) le processus $(\beta_t, \beta'_t \ ; \ D_n(\Phi,t) \ ; \ t \geq 0)$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers :

$$(\beta_t, \beta'_t \ ; \ \mathbb{B}_{\alpha(0,t)}(\Phi) \ ; \ t \geq 0)$$

où $(\mathbb{B}_u(\Phi)\ ;\ u \geq 0, \Phi)$ *est un processus gaussien centré, indépendant de* (β, β') *et ayant pour covariance :*

$$E[\mathbb{B}_s(\Phi)\,\mathbb{B}_t(\Psi)] = (s \wedge t) \int dx\ \{(\Phi(x), \Psi(x))\}.$$

2) pour tout $p > 1$, *il existe une constante universelle* C_p *telle que :*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E\Big[\sup_{s \leq t} |\mathcal{D}_n(\Phi, s)|^{2p}\Big] \leq C_p \Big(\int dx\ \|\Phi(x)\|^2\Big)^p\ t^{p/2}.$$

Commentaire B : L'analogue du théorème B pour le mouvement brownien réel $(\beta_t, t \geq 0)$ est le suivant :

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction borélienne, de carré intégrable.

1) le processus $\Big(\beta_t\ ;\ n^{1/2} \int_0^t d\beta_u\ \Phi(n\ \beta_u)\ ;\ t \geq 0\Big)$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers :

$$\Big(\beta_t\ ;\ \mathbb{B}_{\ell_t^o}(\Phi)\ ;\ t \geq 0\Big)\ ;$$

où (ℓ_t^o) est le temps local de β en 0 et $(\mathbb{B}_u(\Phi)\ ;\ u \geq 0, \Phi)$ est un processus gaussien, centré, indépendant de β, et ayant pour covariance

$$E[\mathbb{B}_s(\Phi)\,\mathbb{B}_t(\Psi)] = (s \wedge t) \int dx\ \Phi(x)\ \Psi(x)$$

2) pour tout $p > 1$, il existe une constante universelle C_p telle que

$$\sup_n E\Big[\sup_{s \leq t} |n^{1/2} \int_0^s d\beta_u\ \Phi(n\beta_u)|^{2p}\Big] \leq C_p \Big(\int dx\ \Phi^2(x)\Big)^p\ t^{p/2}.$$

2. *Réduction de la démonstration du théorème* A_p *à celle du théorème* B.

Il s'agit, à l'instar de la méthode de Papanicolaou-Stroock-Varadhan [5] de ramener l'étude asymptotique des intégrales (de Riemann) doubles qui figurent dans l'énoncé du théorème A_p à celle d'intégrales stochastiques doubles.

(2.1) Pour faciliter la lecture, nous écrivons tout d'abord deux formules qui se déduisent de la formule d'Itô classique au moyen du théorème de Fubini :

(i) pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, on a :

$$(2.a)\quad \int_0^t ds(\varphi(\beta_t - \beta'_s) - \varphi(\beta_s - \beta'_s)) = \int_0^t d\beta_u \cdot \int_0^u ds\ \nabla\varphi(\beta_u - \beta'_s) + \frac{1}{2} \int_0^t du \int_0^u ds\ \Delta\varphi(\beta_u - \beta'_s)$$

(ii) Supposons maintenant que φ s'écrive sous la forme $\varphi = \Delta\psi$, avec ψ fonction de classe C^4. On a alors, à partir de la formule (2.a), la formule plus compliquée :

$$\frac{1}{2}\int_0^t ds\ (\Delta\psi(\beta_t-\beta'_s) - \Delta\psi(\beta_s-\beta'_s))$$

$$(2.b) \qquad = \int_0^t d\beta_u\cdot[\nabla\psi(\beta_u-\beta'_u) - \nabla\psi(\beta_u-\beta'_o) + \int_0^u \mathrm{Hess}(\psi)(\beta_u-\beta'_s)\cdot d\beta'_s]$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^t du \int_0^u ds\ \Delta^2\psi(\beta_u-\beta'_s).$$

Dans la suite, nous ferons largement référence à cette identité ; de façon à ne pas devoir la réécrire sous diverses formes, nous numérotons de ① à ⑥ les différents termes qui apparaissent en (2.b), que nous écrivons maintenant sous la forme abrégée, mais bien commode :

$$(2.b') \qquad ① + ② = ③ + ④ + ⑤ + ⑥.$$

(2.2) En fait, nous"appliquerons" la formule (2.b) à la fonction

$$\psi(x) = |x|^{2-p}, \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}.$$

Cette application peut être légitimée au moyen des arguments développés en [9], quitte à interpréter le terme ⑥ comme un multiple (universel) de $I_p(0,t)$.

Nous notons l'identité (2.b) ainsi obtenue $(2.b)_{p,0}$.

Changeons maintenant $(\beta'_s\ ;\ s \geq 0)$ en $(\beta'_s + y\ ;\ s \geq 0)$, et notons l'identité (2.b) ainsi obtenue $(2.b)_{p,y}$. Soustrayons membre à membre l'identité $(2.b)_{p,0}$ de $(2.b)_{p,\frac{y}{n}}$, et multiplions les deux membres de l'identité ainsi obtenue par $n^{\frac{3}{2}-p}$ ce qui, avec des notations évidentes, nous fournit l'identité :

$$n^{\frac{3}{2}-p}\left[(2.b)_{p,\frac{y}{n}} - (2.b)_{p,0}\right]$$

dont nous notons $①_n,\ldots,⑥_n$ les termes de type ①,...,⑥ tels qu'ils ont été définis en (2.b').

Nous montrerons ci-dessous que, pour p,y fixés, on a :

$$(2.c) \qquad ①_n \xrightarrow{P} 0, \quad ②_n \xrightarrow{P} 0, \quad ③_n \xrightarrow{P} 0, \quad ④_n \xrightarrow{P} 0.$$

Ainsi, l'étude asymptotique de $⑥_n$, c'est-à-dire :

$$\{n^{\frac{3}{2}-p}(I_p(\tfrac{y}{n},t) - I_p(0,t)) ; y \in \mathbb{R}^3, t \geq 0\}$$

est ramenée à celle de $⑤_n$, expression que nous écrivons sous la forme suivante, de façon à pouvoir appliquer immédiatement le théorème B :

$$(2.d) \qquad n^{\frac{3}{2}} \int_0^t d\beta_u \cdot \int_0^u \Phi_y^{(p)}(n(\beta_u - \beta'_s)) \cdot d\beta'_s$$

où : $\Phi_y^{(p)}(x) = \gamma_p(x-y) - \gamma_p(x)$; $\gamma_p(x) = \frac{1}{|x|^p}\sigma_p(x)$; $\sigma_p(x)_{ij} = \delta_{ij} - p\frac{x_i x_j}{|x|^2}$

Le théorème A_p découle alors du théorème B et de la construction des mouvements browniens fractionnaires présentée en [11].

(2.3) Nous montrons maintenant les quatre convergences en probabilité (2.c). Auparavant, remarquons que si l'on note toujours $\psi(x) = |x|^{2-p}$, on a :

$$\nabla\psi(x) = (2-p)\frac{x}{|x|^p} \; ; \quad \Delta\psi(x) = (2-p)(3-p)\frac{1}{|x|^p} .$$

Pour simplifier la discussion, nous commençons par supposer $\beta_o \neq \beta'_o$ P-p.s.

(i) Montrons tout d'abord : $②_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

β et β' étant indépendants, et vérifiant : $\beta_o \neq \beta'_o$, il nous suffit de montrer que pour un mouvement brownien $(\delta_s, s \geq 0)$ issu de $\delta_o \neq 0$, on a :

$$J_n(t,y) \overset{\text{def}}{=} n^{\frac{3}{2}-p}\int_0^t ds \left| \frac{1}{|\delta_s - \frac{y}{n}|^p} - \frac{1}{|\delta_s|^p} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Or, à l'aide de la formule des accroissements finis, et de la majoration :

$$|\nabla(\frac{1}{|\xi|^p})| \leq \frac{c}{|\xi|^{p+1}},$$

on a :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} J_n(t,y) \leq \lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{2}-p}|y|\int_0^t \frac{ds}{|\delta_s|^{p+1}}\right) = 0.$$

La démonstration de : $①_n \xrightarrow{P} 0$ est tout à fait semblable.

(ii) Pour montrer que $③_n \xrightarrow{P} 0$, on peut remplacer la martingale locale qui constitue $③_n$ par son processus croissant, et il s'agit donc de montrer avec les mêmes notations qu'en (i), que, si l'on note en outre $\theta_p(x) = \frac{x}{|x|^p}$, on a :

$$K_n(t,y) \overset{\text{def}}{=} n^{3-2p} \int_0^t ds\ |\theta_p(\delta_s - \frac{y}{n}) - \theta_p(\delta_s)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

De même que précédemment, on a :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} K_n(t,y) \leq \lim_{n\to\infty} |y|^2 \left(n^{1-2p} \int_0^t \frac{ds}{|\delta_s|^{2p}} \right) = 0.$$

La démonstration de : $④_n \xrightarrow{P} 0$ est tout à fait semblable.

(iii) Dans le cas où $\beta_o = \beta'_o$, nous allons montrer directement, avec les notations introduites en (i) et (ii), $(\delta_s, s \geq 0)$ désignant maintenant un mouvement brownien dans $\mathbf{R}^3$, issu de 0, que les quantités

$$E[J_n(t,y)] \quad \text{et} \quad E[K_n(t,y)] \quad \text{convergent vers } 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

On a, par scaling :

$$E[J_n(t,y)] = n^{-1/2} E[J_1(tn^2,y)] \ ; \ E[K_n(t,y)] = \frac{1}{n} E[K_1(tn^2,y)]$$

Le problème est donc ramené à l'étude asymptotique, lorsque $t \to \infty$, de $E[J_1(t,y)]$ et $E[K_1(t,y)]$.

Or, à l'aide de la formule suivante, valable pour toute fonction $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_+$, borélienne :

$$E\left[\int_0^t ds\ f(\delta_s)\right] = c \int \frac{dx}{|x|} f(x) \int_{|x|^2/t}^{\infty} e^{-w/2} \frac{dw}{\sqrt{w}},$$

on montre facilement que :

si $p > 1$, $E[J_1(\infty,y)] < \infty$ et $E[K_1(\infty,y)] < \infty$;

si $p = 1$, $E[J_1(t,y)] = 0(\log t)$; $E[K_1(t,y)] = 0(\log t)$;

si $p < 1$, $E[J_1(t,y)] = 0\left(t^{\frac{1}{2}(1-p)}\right)$; $E[K_1(t,y)] = 0(t^{1-p})$.

Ces estimations entraînent aisément le résultat cherché.

(2.4) La réduction que nous venons d'effectuer du théorème A, et plus généralement du théorème A_p, au théorème B, ne nous permet de conclure, en toute rigueur, qu'à la convergence en loi des marginales de rang fini des processus :

$$n^{\frac{3}{2}-p} (I_p(\frac{y}{n},t) - I_p(0,t))$$

lorsque $n \to \infty$ et que (y,t) décrit $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+$.

Pour montrer la convergence en loi des processus continus en $(y,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$, il nous reste à vérifier les critères de tension, dérivés du lemme de continuité de Kolmogorov ou de celui, plus sophistiqué, de Garsia-Rodemich-Rumsey. Par souci de concision, nous ne considèrons que le cas $p = 1$, et, parmi les processus qui figurent en $①_n$, $②_n$, $③_n$, $④_n$:

$$U_n(y,t) = n^{1/2} \int_0^t ds \left(\frac{1}{|\beta_s - \beta'_s - \frac{y}{n}|} - \frac{1}{|\beta_s - \beta'_s|} \right)$$

et

$$V_n(y,t) = n^{1/2} \int_0^t d\beta_u \cdot (\theta(\beta_u - \beta'_u - \frac{y}{n}) - \theta(\beta_u - \beta'_u)), \text{ où } \theta(\xi) = \theta_1(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|} .$$

En posant $\delta_u = \beta_u - \beta'_u$, on obtient, pour $k > 0$:

$$E\Big[\sup_{s \le t} |U_n(y,s) - U_n(z,s)|^p\Big] \le n^{k/2} E\Big[\Big(\int_0^t du \Big| \frac{1}{|\delta_u - \frac{y}{n}|} - \frac{1}{|\delta_u - \frac{z}{n}|} \Big|\Big)^k\Big]$$

$$\le \frac{|y-z|^k}{n^{k/2}} E\Big[\Big(\int_0^t \frac{du}{|\delta_u - \frac{y}{n}||\delta_u - \frac{z}{n}|}\Big)^k\Big]$$

En utilisant la majoration : $\frac{2}{|a||b|} \le \frac{1}{|a|^2} + \frac{1}{|b|^2}$,

et l'estimation : $\sup_{t \ge 2} E\Big[\Big(\frac{1}{\log t} \int_0^t \frac{ds}{|B_s - 1|^2}\Big)^k\Big] < \infty$ (voir, par exemple, Yor [10], lemme 2), il vient :

$$E\Big[\sup_{s \le t} |U_n(y,s) - U_n(z,s)|^k\Big]$$

$$\le C_k \frac{|y-z|^k}{n^{k/2}} \Big(1 + \log n + \log^+(\frac{1}{|y|}) + \log^+(\frac{1}{|z|})\Big)^k$$

$$\le C_k |y-z|^k \Big(1 + \log^+(\frac{1}{|y|}) + \log^+(\frac{1}{|z|})\Big)^k$$

Cette estimation étant valable pour tout $k > 0$, on déduit aisément du lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey (voir, par exemple, Barlow-Yor [1], p. 203) que la suite des lois des processus U_n est tendue.

On a, de même :

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |V_n(y,s) - V_n(z,s)|^k\Big] \leq n^{k/2}\, E\Big[\Big(\int_0^t du\, |\theta(\delta_u - \tfrac{y}{n}) - \theta(\delta_u - \tfrac{z}{n})|^2\Big)^{k/2}\Big]$$

A l'aide de l'inégalité élémentaire : $\left|\frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|}\right| \leq \frac{2|a-b|}{|a|}$, on obtient :

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |V_n(y,s) - V_n(z,s)|^k\Big] \leq \frac{|y-z|^k}{n^{k/2}}\, E\Big[\Big(\int_0^t \frac{du}{|\delta_u - \frac{y}{n}|^2}\Big)^{k/2}\Big].$$

On en déduit, de même que précédemment :

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |V_n(y,s) - V_n(z,s)|^k\Big] \leq C\, |y-z|^k \left(1 + \log^+ \frac{1}{|y|}\right)^{k/2},$$

ce qui implique que la suite des lois des processus V_n est tendue.

3. *Démonstration du théorème B.*

(3.1) Préliminaires.

(i) L'indépendance de (β,β') et $\mathbb{B}$ reposera sur le résultat suivant :

$$(3.a) \qquad F_n(t) \overset{\text{def}}{=} n^{3/2} \int_0^t du \int_0^u \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot d\beta'_h \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$$

(Il suffirait de montrer la convergence en probabilité vers 0).

Pour démontrer (3.a), on peut raisonner composante par composante, et on peut donc supposer $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\int dx\ |\Phi(x)|^2 < \infty$.
Faisons, d'autre part, la majoration suivante, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(3.b) \qquad \left(\int_0^t du\, n^{3/2} \int_0^u \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot d\beta'_h\right)^2$$

$$\leq t \int_0^t du\, n^3 \left(\int_0^u \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot d\beta'_h\right)^2.$$

L'espérance de l'expression qui figure en (3.b) est donc majorée par :

$$t\, E\left[\int_0^t du\, n^3 \int_0^u |\Phi|^2\,(n(\beta_u-\beta'_h))dh\right] = t \int dx|\Phi|^2(x)\ E[\alpha(\tfrac{x}{n},t)].$$

Or, on montre aisément (voir (3.2) ci-dessous, et plus généralement, (3.6), (i)) :

$$(3.c) \qquad \sup_{y\in\mathbb{R}^3} E[\alpha(y,t)] \leq C\sqrt{t}.$$

On a donc, finalement :

$$E[(F_n(t))^2] \leq C\, t^{3/2} \int dx\ |\Phi(x)|^2.$$

En conséquence de cette estimation a priori, on peut supposer $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ borélienne, bornée, à support compact.
Ecrivons maintenant $F_n(t)$ sous la forme d'une intégrale stochastique en $d\beta'_h$.
On a :

$$F_n(t) = \int_0^t \{n^{3/2} \int_h^t du\ \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\}\cdot d\beta'_h,$$

d'où :

$$E[(F_n(t))^2] = E\Big[n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_h^t dv\ \Phi(n(\beta_u - \beta'_h)) \cdot \Phi(n(\beta_v - \beta'_h))\Big]$$

$$= 2n^3\, E\Big[\int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv\ \Phi(n(\beta_u - \beta'_h)) \cdot \Phi(n(\beta_v - \beta'_h))\Big].$$

Nous montrerons ci-dessous que, pour $f,g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_+$ boréliennes, bornées, à support compact :

$$(3.d) \qquad n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv\ f(n(\beta_u - \beta'_h))\, g(n(\beta_v - \beta'_h)) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0,$$

ce qui implique a fortiori : $E[(F_n(t))^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire (3.a).

(ii) L'étape suivante dans la démonstration du théorème B consiste à montrer que le processus croissant de l'intégrale stochastique (réelle) :

$$n^{3/2} \int_0^t d\beta_u \cdot \int_0^u \Phi(n(\beta_u - \beta'_h)) \cdot d\beta'_h$$

qui est précisément :

$$n^3 \int_0^t du\ \Big|\int_0^u \Phi(n(\beta_u - \beta'_h)) \cdot d\beta'_h\Big|^2$$

a même limite en probabilité que :

$$n^3 \int_0^t du \int_0^u dh\ \|\Phi(n(\beta_u - \beta'_h))\|^2.$$

[En effet, à l'aide de la formule de densité d'occupation, on voit facilement que cette dernière expression converge vers $\alpha(0,t) \int dx\ \|\Phi(x)\|^2$].

Pour étudier le comportement asymptotique de :

$$n^3 \int_0^t du\ \Big|\int_0^u \Phi(n(\beta_u - \beta'_h)) \cdot d\beta'_h\Big|^2,$$

on peut à nouveau supposer $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, borélienne, et satisfaisant :

$\int dx |\Phi(x)|^2 < \infty$.

Introduisons maintenant les notations :

$$M_u^{(n)}(x) = \int_0^u \Phi(n(x-\beta_h'))\cdot d\beta_h', \qquad \tilde{M}_u^{(n)}(x) = n^{3/2} M_u^{(n)}(x),$$

et $$N_u^{(n)}(x) = (\tilde{M}_u^{(n)}(x))^2 - \langle \tilde{M}_\cdot^{(n)}(x)\rangle_u.$$

Le processus croissant de $(\tilde{M}_u^{(n)}(x), u \geq 0)$ est :

$$\langle \tilde{M}_\cdot^{(n)}(x)\rangle_u = n^3 \int_0^u |\Phi(n(x-\beta_h'))|^2 dh,$$

et il nous suffira de démontrer :

$$(3.e) \qquad \int_0^t du\,(\tilde{M}_u^{(n)}(\beta_u))^2 - \langle \tilde{M}_\cdot^{(n)}(\beta_u)\rangle_u \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0.$$

Remarquons tout d'abord que la norme L^1 du membre de gauche de (3.e) est majorée par :

$$2E\Big[\int_0^t du(\tilde{M}_u^{(n)}(\beta_u))^2\Big] = 2E\Big[\int_0^t du\, n^3 \int_0^u dh\ |\Phi|^2(n(\beta_u-\beta_h'))\Big]$$
$$\leq C\, t^{1/2} \int dx\ |\Phi|^2(x),$$

comme on l'a vu en (i).

On peut donc, pour montrer (3.e), se restreindre au cas où $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est borélienne, bornée, à support compact.

Considérons maintenant :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du\, N_u^{(n)}(\beta_u)\Big)^2\Big]$$

$$= 2E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv\ N_u^{(n)}(\beta_u)\ N_v^{(n)}(\beta_v)\Big]$$

$$= 2E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv\ N_u^{(n)}(\beta_u) N_u^{(n)}(\beta_v)\Big]$$

$$= 8n^6\, E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv \int_0^u dh\ \Phi(n(\beta_u-\beta_h'))\cdot\Phi(n(\beta_v-\beta_h'))M_h^{(n)}(\beta_u)M_h^{(n)}(\beta_v)\Big].$$

En redistribuant les puissances de n, on se ramène à montrer la convergence vers 0 de l'espérance de :

$$G_n(t) \overset{\text{def}}{=} n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv\ \Phi(n(\beta_u-\beta_h'))\cdot\Phi(n(\beta_v-\beta_h'))\tilde{M}_h^{(n)}(\beta_u)\tilde{M}_h^{(n)}(\beta_v),$$

soit : (3.f) $\quad E[G_n(t)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

(3.2) Démonstration de (3.c).

Par définition de $\alpha(y,t)$, on a, pour toute fonction $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_+$ borélienne :

$$E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv\, f(\beta_u - \beta'_v)\Big] = \int dy\, f(y)\, E[\alpha(y,t)] ;$$

d'où, en posant $p_s(y) = \frac{1}{(2\pi s)^{3/2}} \exp(-\frac{|y|^2}{2s})$, on a :

$$E[\alpha(y,t)] = \int_0^t du \int_u^t dv\, p_{u+v}(y) \leq \int_0^t du \int_0^t dv\, p_{u+v}(y).$$

En conséquence :

$$E[\alpha(y,t)] \leq \int_0^t du \int_u^{u+t} dv\, p_v(y) \leq \int_0^{2t} dv\, p_v(y) v \leq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2t} \frac{dv}{\sqrt{v}} = C\cdot\sqrt{t}.$$

(3.3) Démonstration de (3.d).

Il s'agit de montrer la convergence dans L^1 vers 0 de l'expression :

$$H_n(t) = n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv\, f(n(\beta_u - \beta'_h))g(n(\beta_v - \beta'_h)).$$

En fait, nous montrerons, plus précisément, que :

$$n^2\, E[H_n(t)] \quad \text{converge vers une limite finie.}$$

Posons : $f_n(y) = n^3 f(ny)$ et $p_u(x) = \frac{1}{(2\pi u)^{3/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2u}\Big)$.

On a :

$$E[H_n(t)]$$

$$= E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv \int_0^u dh \int dx\, p_h(x)\, f_n(\beta_u + x)\, g(n(\beta_v + x))\Big]$$

$$= E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv \int dy \int_0^u dh\, p_h(y - \beta_u)\, f_n(y) g(n(\beta_v - \beta_u) + ny)\Big]$$

$$= E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv \int dy \int_0^u dh\, p_h(\tfrac{y}{n} - \beta_u)\, f(y)\, g(n(\beta_v - \beta_u) + y)\Big]$$

$$= \int dy\ f(y) \int dx \int_0^t du\ p_u(x) \int_0^u dh\ p_h(\tfrac{y}{n} - x) \int dz \int_0^{t-u} dv\ p_v(z)\ g(nz+y).$$

Or, pour tout $x \neq 0$, on a : $\int_0^u dh\ p_h(\frac{y}{n} - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^u dh\ p_h(x)$

de sorte que l'intégrale en (dx) converge vers :

$$\frac{1}{2} \int dx \left(\int_0^t du\ p_u(x)\right)^2$$

(il est facile de montrer que cette quantité est finie).

Considérons maintenant l'intégrale en (dz) que nous multiplions par n^2, soit :

$$n^2 \int dz \int_0^{t-u} dv\ p_v(z)\ g(nz+y) = \frac{1}{n} \int d\xi \int_0^{t-u} dv\ p_v(\tfrac{\xi}{n})\ g(\xi+y).$$

Or, on a :

$$\frac{1}{n} \int_0^t dv\ p_v(\tfrac{\xi}{n}) = \frac{1}{n} \int_0^t \frac{dv}{(2\pi v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2(n^2 v)}\right) = \int_0^{tn^2} \frac{dw}{(2\pi w)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2w}\right).$$

Cette expression converge, lorsque $n \to \infty$, vers :

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(2\pi w)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2w}\right) = \frac{1}{|\xi|} \int_0^\infty \frac{du}{(2\pi u)^{3/2}} \exp(-1/2u) = \frac{1}{2\pi|\xi|}$$

Finalement, on a montré :

$$n^2\, E[H_n(t)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \{\frac{1}{2} \int dx \int_0^t du\ p_u(x)^{\,2}\} \int dy\ f(y) \int \frac{d\xi}{2\pi|\xi|}\ g(\xi+y).$$

Les remarques suivantes permettent de mieux comprendre le résultat précédent.
En conséquence de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien β, la variable $H_n(t)$ a même espérance que :

$$\tilde{H}_n(t) = n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_0^{t-u} dv\ f(n(\beta_u - \beta'_h))\, g(n(\beta''_v + \beta_u - \beta'_h))$$

où β'' est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de 0, indépendant de β et β'.
En utilisant maintenant, d'une part la propriété de scaling pour le mouvement brownien β'', et d'autre part la formule de densité d'occupation qui fait intervenir les temps locaux d'intersection $(\alpha(y\ ;\ dh\ du)\ ;\ y \in \mathbb{R}^3)$ de (β, β'), on obtient :

$$n^2 \tilde{H}_n(t) \overset{(d)}{=} \int dy\ f(y) \int_{h\le u\le t} \alpha(\tfrac{y}{n}\ ;\ dh\ du) \int_0^{n^2(t-u)} dv\ g(\beta''_v+y),$$

d'où l'on déduit aisément le résultat de convergence en loi :

$$n^2 \tilde{H}_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \int dy\ f(y) \int_0^{\infty} dv\ g(\beta''_v+y)\quad \alpha(0;t).$$

Compte-tenu de ce résultat, il est maintenant naturel de se demander si la suite des processus : $(n^2 H_n(t)\ ;\ t \ge 0)$ converge en loi lorsque $n \to \infty$.
Nous ne savons pas répondre à cette question.

(3.4) Démonstration de (3.f).

Nous ne donnons que les principales étapes de la démonstration, inspirée fortement des arguments de la partie b) du paragraphe (3.3) ci-dessus.

a) Introduisons la fonction de 3 variables :

$$\gamma_h^{(n)}(x,y;z) = E[\tilde{M}_h^{(n)}(x)\ \tilde{M}_h^{(n)}(y)\,|\,\beta'_h=z]$$

et remarquons que l'on a :

$$(3.g)\qquad |\gamma_h^{(n)}(x,y;z)| \le \delta_h^{(n)}(x;z)\ \delta_h^{(n)}(y;z)$$

où l'on note, pour $\xi \in \mathbb{R}^3$: $\delta_h^{(n)}(\xi;z) = E[(\tilde{M}_h^{(n)}(\xi))^2\,|\,\beta'_h=z]^{1/2}$.

On a alors :

$$E[G_n(t)] = n^3\, E\Big[\int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv\ \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot\Phi(n(\beta_v-\beta'_h))\ \gamma_h^{(n)}(\beta_u,\beta_v\ ;\ \beta'_h)\Big].$$

D'après (3.g), la valeur absolue de l'expression qui figure dans la dernière espérance écrite est majorée par :

$$\int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv |\Phi|(n(\beta_u-\beta'_h))\ |\Phi|(n(\beta_v-\beta'_h))\delta_h^{(n)}(\beta_u;\beta'_h)\delta_h^{(n)}(\beta_v;\beta'_h).$$

En conséquence de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien β, cette expression a même espérance que :

$$\int_0^t dh \int_h^t du \int_0^{t-u} dv\ |\Phi|(n(\beta_u-\beta'_h))|\Phi|(n(\beta''_v+\beta_u-\beta'_h))\ \delta_h^{(n)}(\beta_u;\beta'_h)\ \delta_h^{(n)}(\beta''_v+\beta_u;\beta'_h)$$

où β'' désigne un troisième mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, indépendant de β et β'.

En utilisant maintenant, d'une part la propriété de scaling pour le mouvement brownien β'', et d'autre part la formule de densité d'occupation qui fait intervenir les temps locaux d'intersection $(\alpha(y;dh\ du)\ ;\ y \in \mathbb{R}^3)$ de (β,β'), on obtient :

$$E[G_n(t)] \leq \int dx|\Phi|(x)\ E\Big[\int_{h\leq u\leq t} \alpha(\tfrac{x}{n};dh\ du) \int_0^{(t-u)n^2} \frac{dw}{n^2}\ |\Phi|(x+\beta''_w)\ ..$$

$$.. \delta_h^{(n)}(\tfrac{x}{n}+\beta'_h;\beta'_h)\delta_h^{(n)}\ (\tfrac{x+\beta''_w}{n}+\beta'_h\ ;\ \beta'_h)\Big].$$

En remplaçant $(t-u)n^2$ par ∞ comme borne de l'intégrale en dw, et en explicitant la valeur du potentiel en β'' ainsi obtenu, il vient :

$$E[G_n(t)] \leq \int dx\ |\Phi|(x) \int \frac{dy}{2\pi|y|}\ |\Phi|(x+y)\ ..$$

$$.. E\Big[\int_{h\leq u\leq t} \alpha(\tfrac{x}{n};dh\ du)\ \frac{1}{n^2}\ \delta_h^{(n)}(\tfrac{x}{n}+\beta'_h;\beta'_h)\delta_h^{(n)}(\tfrac{x+y}{n}+\beta'_h;\beta'_h)\Big]$$

b) Pour simplifier la discussion, nous considérons simplement :

$$(\frac{1}{n}\ \delta_h^{(n)}(\beta'_h;\beta'_h))^2 \quad \text{au lieu de :} \quad \frac{1}{n^2}\ \delta_h^{(n)}(\tfrac{x}{n}+\beta'_h;\beta'_h)\delta_h^{(n)}(\tfrac{x+y}{n}+\beta'_h;\beta'_h).$$

Nous allons montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$(3.h) \qquad (\frac{1}{n}\ \delta_h^{(n)}(x,x))^2 = O(\tfrac{1}{n})$$

estimation dont on peut déduire, à l'aide des majorations faites en a), que :

$$E[G_n(t)] = O(\tfrac{1}{n}).$$

c) Pour montrer (3.h), nous utilisons le grossissement de la filtration naturelle de $(\beta'_u\ ;\ u \geq 0)$ par la variable β'_h.

De façon à simplifier les notations, nous remplaçons partout, dans ce sous-paragraphe c), la notation $(\beta'_u, u \geq 0)$ par $(B_u, u \geq 0)$.

Rappelons que la décomposition canonique de $(B_u, u \geq 0)$ dans sa filtration naturelle grossie avec la variable B_h est :

$$B_u = \tilde{B}_u + \int_0^{u\wedge h} ds\, \frac{B_h - B_s}{h-s}\ ,$$

où $(\tilde{B}_u, u \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de la variable B_h.

En conséquence de cette décomposition, on a :

$$\left(\frac{1}{n}\,\delta_h^{(n)}(x,x)\right)^2 \leq 2\{a_h(x,n) + b_h(x,n)\},$$

où :

$$a_h(x,n) = n\,E\left[\int_0^h ds\ |\Phi|^2(n(x-B_s))\,|B_h=x\right]$$

et

$$b_h(x,n) = n\,E\left[\left(\int_0^h ds\ \ |\Phi|(n(x-B_s))\ \frac{|B_h-B_s|}{h-s}\right)^2 |B_h=x\right].$$

En retournant le mouvement brownien B au temps h, on obtient les égalités :

$$a_h(x,n) = n\,E\left[\int_0^h ds\ |\Phi|^2(nB_s)\,|B_h=x\right]$$

et

$$b_h(x,n) = n\,E\left[\left(\int_0^h ds\ |\Phi|(nB_s)\ \frac{|B_s|}{s}\right)^2 |B_h=x\right].$$

On a maintenant, par scaling :

$$a_h(x,n) = \frac{1}{n}\,E\left[\int_0^{hn^2} ds\ \ |\Phi|^2(B_s)\,|B_{hn^2} = xn\right]$$

et

$$b_h(x,n) = \frac{1}{n}\,E\left[\left(\int_0^{hn^2} ds\ |\Phi|(B_s)\ \frac{|B_s|}{s}\right)^2 |B_{hn^2} = xn\right].$$

Le résultat (3.h) découle alors de ce que, si l'on note :

$$C_t = \int_0^t ds\ |\Phi|^2(B_s) \quad \text{et} \quad D_t = \int_0^t ds\ |\Phi|(B_s)\ \frac{|B_s|}{s}\ ,$$

on a :

(3.i) $$E[C_t | B_t = x\sqrt{t}] \xrightarrow[t\to\infty]{} E[C_\infty] \quad (< \infty)$$

et

(3.j) $$E[D_t^2 | B_t = x\sqrt{t}] \xrightarrow[t\to\infty]{} E[D_\infty^2] \quad (< \infty).$$

La démonstration, aisée mais un peu fastidieuse, de ces deux points est laissée au lecteur. Vérifions simplement que la variable D_∞, associée à un mouvement brownien B issu de 0, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, pour d entier quelconque, appartient à tous les L^p $(p < \infty)$.

Φ étant bornée et à support compact, on peut remplacer $|\Phi|(B_s)$ par $1_{(|B_s|\le 1)}$ (pour simplifier). On a alors :

$$\|D_\infty\|_p \le \int_0^\infty \frac{ds}{s}\ \| |B_s|\ 1_{(|B_s|\le 1)} \|_p \le \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}}\ \| |B_1|\ 1_{(|B_1|\le \frac{1}{\sqrt{s}})} \|_p .$$

Or, quand $\varepsilon \to 0$, on a l'estimation :

$$E\left[|B_1|^p\ 1_{(|B_1|\le\varepsilon)} \right] \le c_1 \int_0^\varepsilon \rho^{p+d-1}\ d\rho \le c_2\ \varepsilon^{d+p}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes universelles.

On a donc :

$$\| |B_1|\ 1_{(|B_1|\le \frac{1}{\sqrt{s}})} \|_p = O\left(s^{-\frac{1}{2}(1+\frac{d}{p})} \right) \quad (s \to \infty)$$

d'où l'on déduit : $\|D_\infty\|_p < \infty$.

(3.5) Démonstration de la seconde partie du théorème B.

$\Phi^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} n^{3/2}\ \Phi(nx)$ satisfaisant : $\int dx\ \|\Phi^{(n)}(x)\|^2 = \int dx\ \|\Phi(x)\|^2$, il suffit de montrer la majoration cherchée pour $n = 1$.

On a, d'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy :

$$E\left[\sup_{s\le t} |D_1(\Phi, s)|^{2p} \right] \le C_p\ E\left[\left(\int_0^t du\ \left| \int_0^u \Phi(\beta_u - \beta'_s) \cdot d\beta'_s \right|^2 \right)^p \right].$$

En développant l'intégrand en du, on se ramène à majorer les expressions :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du\Big(\int_0^u f(\beta_u-\beta'_s)d\gamma_s\Big)^2\Big)^p\Big],$$

où (γ_s) désigne une composante du mouvement brownien (β'_s), et $f(\cdot)$ une composante du champ de matrices $\Phi(\cdot)$.

Pour simplifier l'écriture, notons :

$$h(u,s) = f(\beta_u-\beta'_s) \quad \text{et} \quad H(u) = \int_0^u h(u,s)d\gamma_s$$

Introduisons encore $(\varphi_k(\cdot)\ ;\ k = 1,2,\ldots)$ base orthonormée de $L^2([0,t],du)$. On a alors :

$$\int_0^t du\ H(u)^2 = \Sigma_k \Big(\int_0^t du\ \varphi_k(u)H(u)\Big)^2 = \Sigma_k \Big(\int_0^t \Big(\int_s^t du\ \varphi_k(u)\ h(u,s)\Big)d\gamma_s\Big)^2.$$

A l'aide de l'extension des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy aux suites de martingales, on a :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du\ H^2(u)\Big)^p\Big] \le C_p\ E\Big[\Big(\Sigma_k \int_0^t ds\ \Big(\int_s^t du\ \varphi_k(u)\ h(u,s)\Big)^2\Big)^p\Big]$$

(φ_k) étant une base orthonormée de $L^2[0,t]$, on a :

$$\Sigma_k\Big(\int_s^t du\ \varphi_k(u)h(u,s)\Big)^2 = \int_s^t du\ h^2(u,s)$$

et donc :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du\ H^2(u)\Big)^p\Big] \le C_p\ E\Big[\Big(\int_0^t du \int_0^u ds\ h^2(u,s)\Big)^p\Big].$$

Appliquons maintenant la formule de densité d'occupation. Il vient :

$$\int_0^t du \int_0^u ds\ h^2(u,s) = \int dx\ f^2(x)\ \alpha(x,t) = \Big(\int dx\ f^2(x)\Big)\int d\mu(x)\ \alpha(x,t)$$

où $d\mu(x) = \dfrac{dx\ f^2(x)}{\int dx\ f^2(x)}$ est une probabilité sur $\mathbb{R}^3$.

On déduit alors de l'inégalité de Hölder que :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du \int_0^u ds\ h^2(u,s)\Big)^p\Big] \le \Big(\int dx\ f^2(x)\Big)^p \sup_x E[\alpha(x,t)^p].$$

Nous montrons ci-dessous l'inégalité

$$(3.k) \qquad \sup_x E[\alpha(x,t)^p] \le C_p\ t^{p/2}$$

ce qui termine la démonstration de la seconde partie du théorème B.

(3.6) Régularité et intégrabilité des temps locaux d'intersection.

Ce sous-paragraphe est consacré, d'une part à la démonstration de (3.k), d'autre part à celle de (1.b), les deux démonstrations s'appuyant pour l'essentiel sur la formule de Tanaka-Rosen $(2.b)_{1,x}$, x décrivant $\mathbb{R}^3$.

(i) Pour montrer (3.k), il nous suffit de prouver que les terme $①_x,\dots,⑤_x$ qui figurent en $(2.b)_{1,x}$ sont bornés dans L^p, uniformément en x, par $C_p t^{1/2}$. En ce qui concerne les termes $①_x$ et $②_x$, cette propriété découle de :

$$(3.\ell) \qquad \sup_x E\Big[\Big(\int_0^t \frac{ds}{|\delta_s - x|}\Big)^p\Big] \leq C_p t^{p/2},$$

où $(\delta_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de 0.

L'estimation (3.ℓ) est une conséquence immédiate de la formule d'Itô suivante :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^3, \quad |\delta_t - x| - |x| = \varepsilon_t + \int_0^t \frac{ds}{|\delta_s - x|}$$

avec $(\varepsilon_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel.

La majoration dans L^p, uniformément en x, des termes $③_x$ et $④_x$, par $C_p t^{1/2}$ découle immédiatement des inégalités de Burkholder-Gundy, les intégrands qui figurent dans les intégrales stochastiques étant uniformément bornés.

Il reste finalement à estimer $⑤_x$, c'est-à-dire à montrer, avec les notations qui suivent (2.d), l'inégalité :

$$(3.m) \qquad \sup_x E\Big[\Big|\int_0^t d\beta_u \cdot \int_0^u \gamma_1(\beta_u - \beta'_s - x)\cdot d\beta'_s\Big|^p\Big] \leq C_p\, t^{p/2}.$$

A l'aide des inégalités de Burkholder-Gundy et de l'inégalité de Hölder, on se ramène à montrer :

$$(3.m') \qquad \sup_x \frac{1}{t}\int_0^t du\, E\Big[\Big(\int_0^u \frac{ds}{|\beta_u - \beta'_s - x|^2}\Big)^{p/2}\Big] \leq C_p.$$

Or, on montre sans difficulté :

$$E\Big[\Big(\int_0^t \frac{ds}{|\beta'_s - 1|^2}\Big)^p\Big] \leq C_p(1 + \log^+ t)^{p/2}$$

ce qui entraîne, par scaling, que le membre de gauche de (3.m') peut être majoré par :

$$C_p\Big(1 + \sup_y E\Big[(\log^+ \frac{1}{|\beta_1 - y|})^{p/2}\Big]\Big) \leq C_p\Big(1 + \int_{|\xi|\leq 1} d\xi (\log \frac{1}{|\xi|})^{p/2}\Big) < \infty.$$

Remarque : J.F. Le Gall (communication personnelle) nous a indiqué que l'on peut montrer, à l'aide des calculs de moments faits en [4], p. 478, que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, et tout p entier, on a :

$$E[\alpha(x,t)^p] \leq E[\alpha(0,t)^p] \quad (< \infty),$$

ce qui entraîne a fortiori (3.k), par scaling.

(ii) Pour démontrer (1.b), nous nous appuyons de façon essentielle sur la formule de Tanaka-Rosen $(2.b)_{1,x} - (2.b)_{1,y}$, prise au temps s, x et y satisfaisant : $|x|, |y| \leq N$.

Le terme ⑤ qui figure dans cette formule est, avec les notations du théorème B,

$$D_1(\Phi_{x,y}, s), \quad \text{où} \quad \Phi_{x,y}(\xi) = \Phi_x^{(1)}(\xi) - \Phi_y^{(1)}(\xi).$$

On a, d'après la seconde partie du théorème B, et les calculs faits en [11] :

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |D_1(\Phi_{x,y}, s)|^p\Big] \leq C_p \Big(\int d\xi \, \|\Phi_{x,y}(\xi)\|^2\Big)^{p/2} t^{p/4}$$

$$\leq C_p \, |x-y|^{p/2} \, t^{p/4}. \tag{3.n}$$

Par ailleurs, les estimations de tension faites en (2.4) nous donnent, pour les termes de type ①, ②, ③, ④, des majorations du genre suivant :

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |U(x,s) - U(y,s)|^p\Big] \leq C_p(t) |x-y|^p \Big(1 + \log^+(\frac{1}{|x|}) + \log^+(\frac{1}{|y|})\Big)^p. \tag{3.o}$$

On déduit finalement (1.b) des estimations (3.n) et (3.o) et du lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey (voir, par exemple, [1], p. 203).

REFERENCES :

[1] M.T. BARLOW, M. YOR : Semimartingale inequalities via the Garsia-Rodemich Rumsey lemma and applications to local times. Journal Funct. Anal. 49, 198-229, 1982.

[2] D. GEMAN, J. HOROWITZ, J. ROSEN : A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Annals of Proba. 12, 86-107, 1984.

[3] F.B. KNIGHT : Random Walks and the sojourn density process of Brownian motion.
Trans. Amer. Math. Soc. 109, 56-86, 1963.

[4] J.F. LE GALL : Propriétés d'intersection des marches aléatoires.
I. Convergence vers le temps local d'intersection.
Comm. Math. Physics. 104, 471-507, 1986.

[5] G. PAPANICOLAOU, D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN : Martingale approach to some limit theorems.
Duke Univ. Maths. Series III, Statistical Mechanics and Dynamical Systems, 1977.

[6] D.B. RAY : Sojourn times of diffusion processes.
Illinois J. Maths. 7, 615-630, 1963.

[7] J. ROSEN : A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space.
Comm. Maths. Phys. 88, 327-338, 1983.

[8] M. YOR : Le drap brownien comme limite en loi de temps locaux linéaires.
Séminaire de Probabilités XVII. Lect. Notes in Maths 986. Springer (1983).

[9] M. YOR : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen.
Séminaire de Probabilités XIX. Lect. Notes in Maths 1123.
p. 332-349. Springer (1985).

[10] M. YOR : Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Séminaire de Probabilités XIX. Lect. Notes in Maths 1123, p. 350-365. Springer (1985).

[11] M. YOR : Remarques sur certaines constructions des mouvements browniens fractionnaires.
Article précédent dans ce volume.