SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ROLANDO REBOLLEDO

Topologie faible et méta-stabilité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 544-562

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__544_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TOPOLOGIE FAIBLE ET META-STABILITE (*)

Rolando Rebolledo
Facultad de Matematicas
Universidad Católica de Chile
Casilla 6177. Santiago
CHILI

Cette note propose une méthode d'analyse des limites méta-stables de systèmes stochastiques de particules. Elle a été motivée par les travaux de CASSANDRO, GALVES, OLIVIERI, VARES qui ont été les premiers à étudier la méta-stabilité d'un point de vue "trajectoriel". L'auteur veut en particulier remercier Antonio GALVES, Maria-Eulália VARES et Errico PRESUTTI pour le temps qu'ils ont passé à lui expliquer "l'alphabet" de la méta-stabilité.

§1. UN EXEMPLE DE COMPORTEMENT META-STABLE: UNE FAMILLE DE SYSTEMES DYNAMIQUES ALEATOIREMENT PERTURBES.

Nous reprenons ici la famille de systèmes dynamiques considéréé par GALVES, OLIVIERI, VARES (1984).

On considère les équations différentielles stochastiques

$$(1.1)\quad \begin{cases} dX_\varepsilon^x(t) = b(X_\varepsilon^x(t))dt + \varepsilon dW(t) \\ X_\varepsilon^x(0) = x \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$; b est une fonction Lipschitzienne qui est le gradient d'un potentiel possédant "deux puits"dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à - dire $b(x) = - \nabla a(x)$ où a est de classe C^2 , $a(x) \to \infty$ si $|x| \to \infty$, possédant des points critiques hyperboliques (c.f. figure 1) .

(*) Cette recherche a été réalisée avec le concours de DIUC,FONDECYT, et du Projet UNESCO-PNUD pour le développement des Mathématiques au Chili. Le titre correspond à une conférence invitée au "5°Convegno su Calcolo Stocastico e Sistemi Dinamici Stocastici" (Pisa , 22-24 Sept. 1986).

On suppose en outre qu'il existe $K > 0$ tel que $|b(x)| \leq K(1+|x|)$ sur $\mathbb{R}^d$.

W représente ici un mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^d$

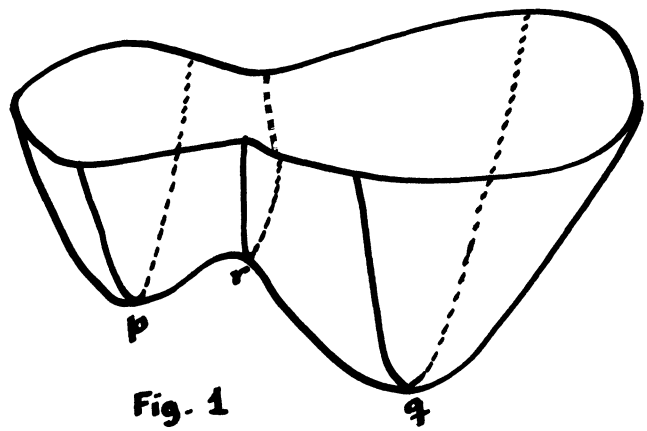

Fig. 1

Le système déterministe ($\varepsilon=0$) a été largement étudié : il existe une décomposition de l' espace $\mathbb{R}^d$: $\mathbb{R}^d = Dp \cup W_r^s \cup Dq$, où Dp (resp. Dq) est le domaine d'altraction du minimum p (resp. q) et W_r^s est la variété stable de r. Le fait d'ajouter la perturbation aléatoire $\varepsilon W(t)$ a pour effet que la particule en mouvement peut échapper au domaine d' un minimum pour tomber dans le domaine de l'autre minimum. Cela intervient pour un temps large si ε est suffisamment petit , c'est-à - dire, la trajectoire semble trouver un "état stable" , pendant une longue durée, puis elle évolue vers un autre état d'équilibre.

C'est ainsi que , si le point de départ x appartient à Dp (noter que $a(p) > a(q)$) , X_ε^x est d'abord attiré vers p , à cause de l'action de b , mais quand X_ε^x est près de p , l'action du bruit est plus importante que celle du champ b à cause de la condition $|b(x)| \leq K(1+|x|)$. Cela rend possible que la trajectoire X_ε^x s'éloigne de p. Mais elle est à nouveau attirée par p , puis elle s'éloigne ; l'évolution continue ainsi dans Dp jusqu'au moment où - par l'action du bruit - la parti-

cule échappe à ce domaine pour tomber dans Dq . Dans Dq nous avons le même tableau : attraction vers q; puis éloignement rendu possible par le bruit; éventuel passage au domaine Dp après un temps très long. Ce dernier passage devient "plus difficile" à cause de l'inégalité $a(p) > a(q)$; pour ε petit, le temps de sortie de Dq sera très grand , d'autre part, la mesure invariante du système ,

$$\mu_\varepsilon(dx) = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{2a(y)}{\varepsilon^2}\right)dy\right)^{-1} \exp\left(-\varepsilon^{-2} 2a(x)\right)dx$$

tend à se concentrer sur des petits voisinages de q.

L'évolution du système suggère alors l'emploi de "moyennes temporelles" rénormalisées pour étudier le comportement limite de X_ε^x - C'est la méthode utilisée par GALVES - OLIVIERI - VARES : ils introduisent une famille $(\mu^\varepsilon{}_t)_{t\geq 0}$ de mesures aléatoires comme suit.

$$\mu_t^\varepsilon(f) := \frac{1}{\beta_\varepsilon} \int_{\alpha_\varepsilon t}^{\alpha_\varepsilon t + \beta_\varepsilon} f(X_\varepsilon^p(s))ds$$

$$= \frac{1}{\beta_\varepsilon} \int_{\alpha_\varepsilon t}^{\alpha_\varepsilon t + \beta_\varepsilon} \delta_{X_\varepsilon^p(s)}(f)ds$$

où f est une fonction réelle, continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$; α_ε , β_ε sont des constantes de rénormalisation prises sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ croissant vers l'infini d'une façon "convenable".

Dans le travail cité, les auteurs prouvent qu'il existe un temps d'arrêt T , exponentiellement distribué , tel que si $t < T$, μ_t^ε converge en loi vers la mesure de Dirac δ_p . C'est une sorte de "convergence en loi conditionnelle" . Ils prouvent de même que si $t \geq T$,

μ^ε_t converge en loi vers la mesure δ_q. On est donc tenté de dire que $(\mu^\varepsilon{}_t)_{t\geq 0}$ "converge" vers le processus $(\mu_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$\mu_t = \begin{cases} \delta p & \text{si} \quad t < T \\ \\ \delta q & \text{si} \quad t \geq T \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$$

Mais il faut prendre beaucoup de précautions et choisir la bonne topologie dans ce cas. En effet, la famille de processus (μ^ε) possède des trajectoires dans $C(\mathbb{R}_+, \Pi(\mathbb{R}^d))$, l'espace de fonctions continues à valeurs probabilités sur $\mathbb{R}^d$, définies sur $\mathbb{R}_+$. Cet espace est inclus dans l'espace de Skorokhod $D(\mathbb{R}_+, \Pi(\mathbb{R}^d))$. Le processus μ a ses trajectoires dans ce dernier espace évidemment. Or, étant donné que la topologie de $D(\mathbb{R}_+, \Pi(\mathbb{R}^d))$ restreinte à $C(\mathbb{R}_+, \Pi(\mathbb{R}^d))$ coïncide avec celle de ce dernier espace et que celui-ci est fermé dans D, il ne peut y avoir de convergence en loi de μ^ε vers μ prenant comme base la topologie de Skorokhod.

Il faut donc affaiblir la topologie de $D(\mathbb{R}_+, \Pi(\mathbb{R}^d))$. Cela est possible grâce à la notion de pseudo-trajectoire d'un processus à valeurs mesures. On trouvera alors que le processus μ est la limite en pseudo-loi de la famille $(\mu^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

§2. PSEUDO-TRAJECTOIRES ET CONVERGENCE FAIBLE.

Fixons tout d'abord quelques notations. Nous considérons un espace localement compact à base dénombrable E muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$, et nous désignons par $\Pi(E)$ l'espace de toutes les mesures de probabilité, définies sur $(E,\mathcal{E})$, muni de la convergence étroite.

Notre but est d'analyser des processus à valeurs dans $\Pi(E)$, c'est

pourquoi nous introduisons l'espace $D(\mathbb{R}_+ , \Pi(E))$ des fonctions càdlàg de $\mathbb{R}_+$ dans $\Pi(E)$ mais-contrairement à l'habitude - nous ne le munissons pas de la topologie de Skorokhod mais d'une topologie plus faible. Voici comment on la construit (c.f. DELLACHERIE-MEYER (1975), MEYER-ZHENG(1984)). Soit $\lambda(dt) = e^{-t}dt$ la mesure exponentielle de paramètre 1 sur $\mathbb{R}_+$. Etant donné une fonction mesurable $x:\mathbb{R}_+ \to \Pi(E)$, nous lui associons la mesure de probabilité $\hat{x}$ sur $(\mathbb{R}_+ x\ \Pi(E), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\Pi(E)))$ qui est l'image de λ par l'application $t \to (t,x(t))$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+ x\ \Pi(E)$. De sorte que $\langle \hat{x} , f \otimes g \rangle = \int_0^\infty f(t)\ g(x(t))\ e^{-t}\ dt$, pour toutes $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g:\Pi(E) \to \mathbb{R}_+$ mesurable. $\hat{x}$ est la <u>pseudo-trajectoire</u> de x ; nous designons par Ψ l'espace des pseudo-trajectoires qui est contenu dans celui des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}_+ x\ \Pi(E)$ dont la projection sur $\mathbb{R}_+$ est la mesure λ, espace que nous notons par Λ . L'espace $\hat{D}(\mathbb{R}_+ , \Pi(E))$, qui est l'image de $D(\mathbb{R}_+ , \Pi(E))$ par $\hat{}$, satisfait aux inclusions

$$\hat{D} \subset \Psi \subset \Lambda \subset \Pi(\mathbb{R}_+ \times \Pi(E))$$

Par la suite nous identifierons D avec $\hat{D}$; comme MEYER et ZHENG le font remarquer , $\Pi(\mathbb{R}_+ x\ \Pi(E))$, Λ , Ψ sont des espaces polonais pour la convergence étroite , ce qui n'est pas le cas pour D, mais ce dernier est au moins un espace Lusinien.

Par ailleurs , la topologie de la convergence étroite est équivalente à celle de la convergence en mesure par rapport à λ, sur l'espace Ψ. Nous munissons D de la topologie induite respective. Il est clair que celle-ci est bien plus faible que celle de Skorokhod.

Nous allons maintenant caractériser l'espace $D(\mathbb{R}_+ , \Pi(E))$ en généralisant une proposition dûe à MEYER-ZHENG (1984).

1. DEFINITION

Soit $\mu \in \Pi(\mathbb{R}_+ \times \Pi(E))$; nous considérons deux ouverts $U,V \subset \Pi(E)$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $PF[0,t]$ l'ensemble des partitions finies de l'intervalle $[0,t]$; considérons $\tau \in PF[0,t]$ de la forme

$$\tau : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$$

Nous définissons un entier $N_\tau^{U,V}(\mu)$ dans $\overline{\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $N_\tau^{U,V}(\mu) \geq k$ si et seulement si existent des éléments t_i^U , t_j^V dans τ de la forme

$$0 \leq t_1^U < t_1^V < t_2^U < t_2^V < \ldots < t_k^U < t_k^V < t$$

telles que μ charge les ensembles

$$]t_\ell^U , t_{\ell+1}^U [\times U, \;]t_\ell^V , t_{\ell+1}^V [\times V, \; \ell = 1, \ldots, k.$$

$N_\tau^{U,V}$ est une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i) et il en est de même pour

$$(1.1) \qquad p_t^{U,V}(\mu) := \sup_{\tau \in PF[0,t]} N_\tau^{U,V}(\mu)$$

que nous conviendrons d'appeller " le nombre de passages de U dans V de la mesure μ durant $[0,t]$ ".

Cette définition étend celle du " nombre de passages en montant " à travers un intervalle $[u,v]$ de $\mathbb{R}$ (prendre $U =]-\infty,u[$, $V=]v,\infty[$) telle qu'elle est donnée dans MEYER-ZHENG (1984).

Finalement , nous écrivons $r_N \mu$ la mesure sur $(\Pi(E), \mathcal{B}(\Pi(E)))$ définie par $r_N\mu \; (B) := \mu([0,N] \times B)$, pour tout $B \in \mathcal{B}(\Pi(E))$; $N \in \mathbb{N}$.

2. THEOREME.

Une mesure $\mu \in \Pi(\mathbb{R}_+ \times \Pi(E))$ *appartient à* $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \Pi(E))$ *si et seulement si* $\mu \in \Lambda$ *et satisfait aux conditions :*

(2.1) *Pour tout* $N \in \mathbb{N}$, *la mesure* $r_N \mu$ *est à support compact ;*

(2.2) *Pour tout couple* (U,V) *d'ouverts disjoints de* $\Pi(E)$, *tout* $N \in \mathbb{N}$, *on a*

$$p_N^{U,V}(\mu) < \infty$$

DEMONSTRATION

Nous adaptons la démonstration faite par MEYER-ZHENG(1984) de la caractérisation de l'espace $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Les conditions sont clairement nécessaires. Nous allons prouver la suffisance.

Soit $\mu \in \Lambda$. On montre d'abord que μ appartient à Ψ. Pour cela on desintègre μ comme $\int_0^\infty \delta_s \otimes \rho_s \, \lambda(ds)$. Si le support de ρ_s n'est pas réduit à un point pour λ - presque tout $s \in \mathbb{R}_+$, alors il existe un ensemble $T \subset \mathbb{R}_+$, mesurable, $\lambda(T) > 0$, et existent U,V ouverts de $\Pi(E)$ tels que pour tout $s \in T$, ρ_s charge à la fois U et V. Il s'en suit qu'il y a au moins un $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_N^{U,V}(\mu) \geq k$ ce qui contredit (2.2). D'où le support de ρ_s est réduit à un point et par conséquent $\mu \in \Psi$. Il existe donc une fonction Borelienne $x: \mathbb{R}_+ \to \Pi(E)$ telle que $\mu = \hat{x}$.

L'hypothèse (2.1) entraîne que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble $T_N \subset [0,N]$ tel que $\{X(s): s \in T_N\}$ est compact dans $\Pi(E)$ et $\lambda([0,N] \setminus T_N) = 0$.

Introduisons maintenant la topologie essentielle droite sur $\mathbb{R}_+$: un voisinage essentiel droit (v.e.d) de $t \in \mathbb{R}_+$ est un ensemble conte-

nant $\{t\}$ et un ensemble $]t,t+\varepsilon[\setminus R$ où ε est > 0 et R est un borélien λ-négligeable.

De cette manière, x possède sur $t \in \mathbb{R}_+$ une limite essentielle à droite (au sens de la topologie étroite sur $\Pi(E)$) si et seulements si la limite existe pour la topologie essentielle droite de $\mathbb{R}_+$.

Or, si x ne possède pas de limite essentielle à droite sur $t \in \mathbb{R}_+$, il en est de même pour les fonctions réelles $s \to x(s,\phi)$, où ϕ parcourt l'espace des fonctions continues bornées de E dans $\mathbb{R}$ et $x(s,\phi)$ denote l'intégrale de ϕ par rapport à la mesure x(s).

Par conséquent, pour toute fonction $\phi: E \to \mathbb{R}$ continue et bornée, il existe un couple $(u(\phi), v(\phi))$ de nombres réels tels que

$$(2.3) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,inf}_{t<s<t+\varepsilon} x(s,\phi) < u(\phi) < v(\phi) < \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{t<s<t+\varepsilon} x(s,\phi)$$

Soit maintenant $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans l'espace $C_b(E)$ des fonctions continues bornées muni de la topologie uniforme. Pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$ considérons les ouverts

$$U(I) := \{\nu \in \Pi(E): \nu(\phi_i) < u(\phi_i);\ i \in I\}$$

$$V(I) := \{\nu \in \Pi(E): \nu(\phi_i) > v(\phi_i);\ i \in I\}$$

dans $\Pi(E)$.

Alors de (2.3) on déduit que pour tout $N \geq t$, et toute partie I finie de $\mathbb{N}$,

$$p_N^{U(I),V(I)}(\hat{x}) = \infty$$

ce qui contredit l'hypothèse (2.2).

Par conséquent, x possède des limites essentielles à droite. De manière analogue on prouve qu'elle possède également des limites essentielles à gauche.

Définissons maintenant

$$\overline{x}^{+}(t,\phi) := \limsup_{s\downarrow t, s>t} \operatorname{ess}\ x(s,\phi)$$

$$\underline{x}^{+}(t,\phi) := \liminf_{s\downarrow t, s>t} \operatorname{ess}$$

pour toute $\phi \in C_b(E)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Pour tout t fixé, $\overline{x}^{+}(t,\cdot)$ sont des formes linéaires positives sur $C_b(E)$. Par ailleurs, par l'argument développé précédemment, $\overline{x}^{+}(\cdot,\phi) = \underline{x}^{+}(\cdot,\phi)$ pour toute $\phi \in C_b(E)$.

En appliquant alors le théorème $\overline{\text{IV}}$.38 de DELLACHERIE-MEYER (1975), il existe une fonction $y \in D(\mathbb{R}_+, \Pi(E))$ telle que $y(t)=x(t)$ pour λ-presque tout point $t \in \mathbb{R}_+$.

Par conséquent $\mu = \hat{x} = \hat{y}$ et le Théorème est démontré.

□

Le Théorème 2 est la clé pour l'étude de la convergence en loi de processus à valeurs mesures, selon la topologie des pseudo - trajectoires sur $D(\mathbb{R}_+, \Pi(E))$. En premier lieu, il nous permet d'obtenir un critère suffisant de compacité sur ce dernier espace :

3. COROLLAIRE.

Soit un ensemble $M \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \Pi(E))$ *satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

(3.1) *Pour tout* $N \in \mathbb{N}$, *il existe un compact* K_N *de* $\Pi(E)$ *contenant les supports de toutes les mesures* $r_N \mu$, $(\mu \in M)$;

(3.2) *sup* $\{ p_N^{U,V}(\mu) ; \mu \in M \} < \infty$ *pour tout couple* (U,V) *d'ouverts disjoints de* $\Pi(E)$ *et tout* $N \in \mathbb{N}$.

Alors l'ensemble M *est relativement compact dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+ , \Pi(E))$ *pour la topologie des pseudo-trajectoires.*

DEMONSTRATION.

L' hypothèse (3.1) entraîne en particulier que M est tendue , donc relativement étroitement compacte dans $\Pi(\mathbb{R}_+ \times \Pi(E))$, par ailleurs si μ_∞ est un point d'adhérence de M , alors pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\mu_\infty([0,N] \times K_N) \geq \overline{\lim_\alpha} \ \mu_\alpha([0,N] \times K_N) = 1$$

où $(\mu_\alpha)_\alpha \subset M$ converge vers μ_∞ .

Donc μ_∞ vérifie (2.1) .

De même, $p_N^{U,V}(\mu_\infty) < \infty$ pour tout couple d'ouverts disjoints d'après (3.2) et la semi-continuite inférieure de $p_N^{U,V}$

Par conséquent $\mu_\infty \in D(\mathbb{R}_+ , \Pi(E))$ selon Théorème 2.

□

4. DEFINITION.

Etant donné une suite de probabilités $(P_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ sur $D = D(\mathbb{R}_+ , \Pi(E))$, muni de la tribu $\mathcal{D}$ qui est la trace de la tribu borélienne sur ψ , nous indiquerons $P_n \xrightarrow[n]{e} P_\infty$ la convergence étroite selon la topologie des pseudo - trajectoires sur D.

Aussi la suite $(P_n)_n$ est ^ - tendue si elle est tendue pour la topologie des pseudo - trajectoires. Cela entraîne (mais n'est pas équivalent!) que la suite est ^ - relativement étroitement compacte.

Finalement , désignons par $S[\mu]$ le support d'une mesure. Nous avons alors un critere de compacité $\hat{}$ - étroite.

5. PROPOSITION

Soit $\mathcal{P}$ une famille de probabilités sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \Pi(E))$. Pour qu'elle soit $\hat{}$ - tendue (et par conséquent relativement $\hat{}$ - étroitement compacte) il suffit qu'elle vérifie les deux hypothèses suivantes:

(5.1) *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$ il existe K_N^ε compact de $\Pi(E)$ tel que*

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} P(\{w \in D : S[r_N w] \cap K_N^{\varepsilon c} = \phi\}) < \varepsilon$$

(5.2) *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $N \in \mathbb{N}$, tout couple (U,V) d'ouverts disjoints de $\Pi(E)$, il existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} P(\{w \in \mathcal{D} : p_N^{U,V}(w) > k_\varepsilon\}) < \varepsilon .$$

La démonstration de cette Proposition est immédiate : c'est une conséquence facile du Corollaire 3.

§3. PROCESSUS DE SAUT A VALEURS MESURES

Nous gardons les notations du paragraphe précédent et nous intéressons maintenant à la convergence en loi selon la $\hat{}$ - topologie, ou convergence en pseudo - loi , d'une suite de processus (μ^n) à trajectoires dans $D(\mathbb{R}_+ , \Pi(E))$ vers un processus μ^∞.

Convenons de quelques nouvelles notations. Le processus canonique dans $D(\mathbb{R}_+ \Pi(E))$ sera noté $(\mu_t)_{t \geq 0}$; nous ne ferons aucune différence entre trajectoire et pseudo - trajectoire les écrivant de la même façon.

Soit $(\mu^n)n$ une suite de processus à valeurs mesures définis sur

des espaces probabilisés $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ éventuellement différents mais à trajectoires dans $D(\mathbb{R}_+, \Pi(E))$; nous noterons P_n la loi de $\mu^n (n \in \mathbb{N})$. Nous dirons que $(\mu^n)_n$ est $\hat{}$ - tendue si (P_n) l'est.

Dans l'étude de la convergence en loi usuelle, certaines familles de fonctions, telle que les projections fini-dimensionnelles, jouent un rôle très important pour l'identification de la limite une fois que l'on a prouvé la tension. Ce sont des <u>famille déterminantes ou séparantes</u> de fonctions continues au sens que deux probabilites assignant des valeurs égales à chaque élément de la famille coïncident partout.

Considérons un espace localement compact à base dénombrable F muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(F)$, et soit $Cyl(\Pi(F))$ la famille de toutes les fonctions continues bornées $g: \Pi(F) \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un entier m, une fonction $G \in C_b(\mathbb{R}^m)$, des fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_m$ dans $C_b(F)$ telles que $g(\nu) = G(\langle \nu, \phi_1 \rangle, \ldots, \langle \nu, \phi_m \rangle)$ pour toute $\nu \in \Pi(F)$.

La famille $Cyl(\Pi(F))$ est une "bonne" classe déterminante.

1. LEMME

Soient P, Q deux probabilités sur $(\Pi(F), \mathcal{B}(\Pi(F)))$ *telles que*

$$\int g \, dP = \int g \, dQ, \quad \textit{pour toute } g \in Cyl(\Pi(F)). \quad \textit{Alors } P = Q.$$

DEMONSTRATION

La preuve est classique. Considérons d' abord le cas F compact. Alors $\Pi(F)$ est également compact et puisque $Cyl(\Pi(F))$ est une algèbre qui sépare les points de $\Pi(F)$ et contient la fonction $\mathbb{1}$, elle est

dense dans $C_b(\Pi(F)) = C(\Pi(F))$, par le Théorème de Stone-Weierstrass , d'où le résultat.

Si F est seulement localement compact à base dénombrable , il en est de même pour $\Pi(F)$ et le résultat découle du cas précédent par "localisation": on obtient d'abord que P et Q coïncident sur tout sous-compact de $\Pi(F)$ puis on recolle en utilisant un recouvrement compact de $\Pi(F)$.

□

2. COROLLAIRE.

La suite de processus $(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge en pseudo - loi vers* μ^∞ *dès qu' elle vérifie les deux hypothèses suivantes :*

(2.1) *Les suites* $(<\mu^n, \delta_1 \otimes g_1>, \ldots, <\mu^n, \delta_m \otimes g_m>)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergent en loi vers* $(<\mu^\infty, \delta_1 \otimes g_1>, \ldots, <\mu^\infty, \delta_m \otimes g_m>)$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *, pour toutes les collections finies* $\delta_1, \ldots, \delta_m \in C_b(\mathbb{R}_+)$, $g_1, \ldots, g_m \in Cyl(\Pi(E))$.

(2.2) *Pour tout* $N \in \mathbb{N}$, *tout couple* (U,V) *d'ouverts disjoints de* $\Pi(E)$, *la suite de variables aléatoires à valeurs entières* $(p_N^{U,V}(\mu^n))_{n \in \mathbb{N}}$ *est tendue.*

DEMONSTRATION

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ soit K_N un compact de $\Pi(E)$ contenant P_∞-p.s. le support de $r_N \mu$, où μ est le processus canonique et P_∞ la loi de μ^∞. Pour toute $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue, à support contenu dans $]N,\infty[$, et toute $g \in Cyl(\Pi(E))$ à support dans K_N^C , la condition (2.1) entraîne en particulier que $<\mu^n , f \otimes g>$ converge en loi (et en probabilité) vers 0 . Par conséquent la suite $(P_n)_n$ des lois satisfait la première hypothèse du critère de ^ - compacité étroite. Mais en outre , (2.2) assure la deuxième hypothèse de ce critère. Par conséquent , $(P_n)_n$ est relativement ^ - étroitement compacte.

Si P est un point limite quelconque, étant donné la continuité des applications $\mu \to (<\mu, f_1 \otimes g_1>, \ldots, <\mu, f_m \otimes g_m>)$ de l'hypothèse (2.1) , la loi sous P pour ces vecteurs coincide avec la loi sous P_∞ . Le lemme 1 entraîne donc l'égalite de P et de P_∞

□

3. Nous allons maintenant étudier le cas particulier des processus limites de sauts ayant deux états possibles $\nu_0, \nu_1 \in \Pi(E)$.

Pour ce faire, introduisons l'ensemble $J(\nu_0, \nu_1)$ de toutes les lois P sur D pour lesquelles le processus canonique μ admet une modification qui s'écrit:

(3.1) $\mu_t = \nu_0 I_{\{t < T\}} + \nu_1 I_{\{t \geq T\}}$, P-p-s, $(t \in \mathbb{R}+)$, où T est une variable aleatoire définie sur D.

Remarquons que , sous $P \in J(\nu_0, \nu_1)$, et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$(3.2) \begin{cases} p_N^{U,V}(\mu) = 0 & \text{si } (\nu_0, \nu_1) \notin U \times V \text{ , P-p-s.} \\ p_N^{U,V}(\mu) \leq 1 & \text{si } (\nu_0, \nu_1) \in U \times V \text{ , P-p-s.} \end{cases}$$

pour tout couple (U,V) d'ouverts disjoints de $\Pi(E)$.

Réciproquement, si P est une probabilité sur D telle que les relations (3.2) soient satisfaites,alors $P \in J(\nu_0, \nu_1)$. En effet, si μ_tn'a pas la forme (3.1) sous P , alors étant donnés deux ouverts disjoints U,V tels que $(\nu_0, \nu_1) \notin U \times V$, le processus peut éventuellement les "visiter" , c' est - à dire, il existe un ensemble $I \subset \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda(I) > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$ pris de façon à ce que $I \cap [0,N] \neq \phi$ on a $P(p_N^{U,V}(\mu) > 0) > 0$ contredisant (3.2). D'autre part, le fait que le nombre de passages d'un voisinage de ν_0 à un voisinage de ν_1 soit

inférieur ou égal à 1 , nous dit qu'il y a une seule transition de l'état ν_0 à l'état ν_1, μ_t doit donc s'écrire sous la forme (3.1).

Le résultat suivant est donc bien naturel :

4. PROPOSITION

Supposons que la suite (μ^n) *vérifie les hypothèses suivantes:*

(4.1) $\limsup_n P_n \left(r_N \mu^n (\{\nu_0,\nu_1\}^c) \geq \varepsilon \right) = 0$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, *tout* $\varepsilon > 0$.

(4.2) *Pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *et tout couple* (U,V) *d'ouverts disjoints de* $\Pi(E)$:

(a) $\liminf_n P_n \left(p_N^{U,V}(\mu^n) > 0 \right) = 0$ *si* $(\nu_0,\nu_1) \notin U \times V$

(b) $\limsup_n P_n \left(p_N^{U,V}(\mu^n) \leq 1 \right) = 1$ *si* $(\nu_0,\nu_1) \in U \times V$

Alors la suite (μ^n) *est* $\hat{}$ *- tendue et toute loi limite, au sens de la topologie* $\hat{}$ *- étroite, appartient à* $J(\nu_0,\nu_1)$.

DEMONSTRATION

l'hypothèse (4.1) entraîne en particulier §2.(5.1) puisque $K = \{\nu_0,\nu_1\}$ est compact dans $\Pi(E)$. On a alors la $\hat{}$ - compacité étroite de (P_n) , il faut encore vérifier que les points limites se concentrent sur D et qu'ils appartiennent à $J(\nu_0,\nu_1)$.

Or, si P est un tel point limite, la semi-continuité inférieure de $P_N^{U,V}$ entraîne que

$$P(p_N^{U,V}(\mu) \leq 1) \geq \limsup P_n, (p_N^{U,V}(\mu) \leq 1) = 1$$

si $(\nu_0, \nu_1) \in U \times V$

$$P(p_V^{U,V}(\mu) > 0) \leq \liminf P_n, (p_N^{U,V}(\mu) > 0) = 0$$

si $(\nu_0, \nu_1) \notin U \times V$, où $N \in \mathbb{N}$ et $(P_{n'})$ est une sous-suite qui converge vers P.

Par conséquent, sous P, $p_N^{U,V}(\mu)$ est fini d'où P se concentre sur D, et en outre, les relations (3.2) sont satisfaites. Par conséquent $P \in J(\nu_0, \nu_1)$.

□

5. Plaçons-nous maintenant sur l'espace canonique D et étudions la situation suivante. On se donne deux suites de variables aléatoires positives (T_n) , (S_n) telles que :

(5.1) $T_n < S_n \quad (n \in \mathbb{N})$;

(5.2) $P_n(S_n - T_n > \varepsilon) \underset{n}{\to} 0$, pour tout $\varepsilon > 0$.

(5.3) $(L_{P_n}(T_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement sur $\mathbb{R}$ vers une probabilité q, où $L_{P_n}(T_n)$ est la loi de T_n sous $P_n (n \in \mathbb{N})$.

(D'après (5.2) on aura alors $L_{P_n}(S_n) \overset{e}{\to} q$)

(5.4) $P_n(\sup_{t<T_n} |\mu_t(\phi) - \nu_0(\phi)| > \varepsilon) \underset{n}{\to} 0$

$P_n(S_n < t \,|\, \mu_t(\phi) - \nu_1(\phi)| > \varepsilon) \underset{n}{\to} 0$

pour tout $\varepsilon > 0$, toute $\phi \in C_b(E)$.

6. COROLLAIRE

Sous les conditions (5.1) à (5.4), la suite $(P_n)_n$ converge étroitement vers une probabilité $P \in J(\nu_0, \nu_1)$ et le processus canonique μ

admet une décomposition de la forme (3.1), où la loi sous P de la variable T (donnant le temps de trasition) est égale à q.

DEMONSTRATION .

Si l'on désigne par $\rho(\mu,\nu)$ la distance de Prokhorov-Lévy pour l'espace $\Pi(E)$, il est aisé de voir que les hypothèses (5.4) entraînent

$$(6.1) \quad P_n(\sup_{t\in[0,N]} \rho(\mu_t, \{\nu_0,\nu_1\}) > \varepsilon) \underset{n}{\to} 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$, $N\in\mathbb{N}$, où $\rho(\mu_t,\{\nu_0,\nu_1\})=\inf\{\rho(\mu_t,\nu_1),\rho(\mu_t,\nu_0)\}$ est la distance de μ_t à l'ensemble $\{\nu_0,\nu_1\}$.

De (6.1) il en découle la ^ - tension des lois $(P_n)_n$ par la Proposition 4.

Soit P un point limite quelconque ; comme $P \in J(\nu_0,\nu_1)$, il existe T variable aléatoire positive sur D de façon à ce que

$$(6.2) \quad \mu_t = \nu_0 \, I_{\{t < T\}} + \nu_1 \, I_{\{t \geq T\}}$$

L'hypothèse (5.4) entraîne alors :

$$P_n(T_n > T + \delta) \leq P_n(\mu_{T_n-\delta} = \nu_1) \text{ tend vers } 0$$

$$P_n(S_n < T - \delta) \leq P_n(\mu_{S_n} + \delta = \nu_0) \text{ tend vers } 0$$

Pour tout $\delta > 0$. Les hypothèses (5.1),(5.2) et (5.3) nous permettent alors de conclure que (T_n) et (S_n) convergent en loi vers T. par conséquent la loi de T sous P est q. Cela montre également que P est l'unique point limite de la suite (P_n). En effet , puisque tout point limite P'appartient à $J(\nu_0,\nu_1)$ et qu'alors μ s'écrit selon (6.2) où ν_0 et ν_1 sont déterministes, P' est complètement déterminé par la

loi de T. Donc $P_n \overset{\hat{e}}{\underset{n}{\to}} P$.

□

Ce corollaire répond partiellement aux besoins de la méta-stabilité telle qu'elle est étudiée par CASSANDRO, GALVES, OLIVIERI,VARES. Pour mieux faire dans ce sens, ajoutons une hypothèse supplémentaire aux variables T_n, S_n du numéro 5:

7. COROLLAIRE

Si la suite de lois (P_n) *satisfait les conditions* (5.1) *à* (5.4) *et en outre l'hypothèse de mélange*

(7.1) *Il existe une suite* (R_n) *de variables aléatoires sur* $\mathcal{D}$ *telle que* $T_n < R_n < S_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *et* (a) $P_n(R_n > t+s) - P_n(R_n > t)\, P_n(R_n > s) \underset{n}{\to} 0$ *pour tous* $s,t \in \mathbb{R}_+$, *et*

(b) $P_n(R_n > 1) \underset{n}{\to} e^{-1}$

Alors la suite (P_n) *converge* ^ - *étroitement vers* $P \in J(\nu_0, \nu_1)$ *et le processus canonique* μ *devient un Processus Markovien de Sauts à états dans* $\{\nu_0, \nu_1\}$ *sous la loi* P .

Ce résultat est une conséquence facile du Corollaire précédent . La loi q que nous y avons introduit est, dans le cas présent, une exponentielle de paramètre 1 à cause de l'hypothèse (7.1).

REMARQUE FINALE

Nous avons adopté systématiquement l'identification de D avec $\hat{D}$ et avons obtenu des résultats concernant les pseudo-lois (ou lois des pseudo-trajectoires). De ce fait, lorque l'on veut retourner aux "lois temporelles" des processus, on doit appliquer IV. T45 de DELLACHERIE-MEYER (1975): pour deux processus ayant la même pseudo - loi il existe une partie borélienne T de $\mathbb{R}_+$, de complémentaire λ - négligeable, telle que les respectifs processus indexés par T aient la même loi temporelle.

REFERENCES

CASSANDRO, M.- GALVES,A.- OLIVIERI, E.- VARES, M.E (1984) Metastable behavior of stochastic dynamics : a pathwise approach. J. of Stat. Physics,35 ,603-634

DELLACHERIE, C. - MEYER, P.A. (1975) Probabilités et Potentiel. Hermann, Paris. Vol. I.

GALVES, A.- OLIVIERI, E .- VARES, M.E. (1984) Metastability for a class of dynamical systems subject to Small random perturbations. Preprint submitted to Ann. Probability.

MEYER, P.A .- ZHENG , W.A. (1984) Tightness criteria for laws of semimartingales. Ann. I.H.P. 20 , 353 - 372.