SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

Précisions sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 532-542

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__532_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PRECISIONS SUR L'EXISTENCE ET LA CONTINUITE DES TEMPS LOCAUX D'INTERSECTION DU MOUVEMENT BROWNIEN DANS $\mathbb{R}^2$

Marc YOR

Introduction

Soit $(B_t\ ;\ t \geq 0)$ mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d (d = 2 \text{ ou } 3)$.

L'étude de la mesure aléatoire, définie pour $t \in \mathbb{R}_+$, par :

$$\mu_{t,\omega} : A \in (\mathbb{R}^d) \to \mu_{t,\omega}(A) = \int_0^t ds \int_s^t du\, f\left((B_u - B_s)(\omega)\right)$$

a été menée récemment par plusieurs auteurs (Rosen [5], [6], [7] ; Dynkin [1] ; Le Gall [3] ; Yor [9], [10]).

En particulier, à la suite des études générales de Geman-Horowitz-Rosen [2], J. Rosen [5] montre, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'existence d'une densité $(\alpha(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^d)$ de μ_t par rapport à la mesure de Lebesgue, ainsi que l'existence d'une version bicontinue de $(\alpha(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ t \geq 0)$.

On a donc, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, borélienne, et tout $t \geq 0$:

$$(0.a) \qquad \int_0^t ds \int_s^t du\, f(B_u - B_s) = \int dy\, f(y)\, \alpha(y\ ;\ t)$$

L'outil principal de Rosen est la transformation de Fourier (cf : [5], [7]), bien que quelquefois, il utilise la méthode maintenant classique qui a servi pour la construction des temps locaux du mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ (cf : Meyer [4]). Cependant, même dans ce cas, les estimations faites par Rosen s'appuient encore fortement sur la transformation de Fourier.

Le but de cette Note est de présenter l'existence et la continuité de α dans le cas $d = 2$ de façon aussi simple que possible en suivant strictement la méthode unidimensionnelle, et, en particulier, d'améliorer les résultats de continuité sur α déjà obtenus par J. Rosen ([5], [7]).

Le résultat de continuité obtenu ici est le suivant :

THEOREME : Le processus $\left(\tilde{\alpha}(y\ ;\ s) = \pi\alpha(y\ ;\ s) - s \log \frac{1}{|y|}\ ;\ y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ s \geq 0\right)$

admet un prolongement continu à tout $(y,s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$.

Ce prolongement, que l'on note encore $\tilde{\alpha}$, *vérifie : pour tout* $t > 0$,

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{1}{\delta (\log \frac{1}{\delta})^{7/2}} \sup_{\substack{s \leq t \\ |x-y| \leq \delta}} |\tilde{\alpha}(x\ ;\ s) - \tilde{\alpha}(y\ ;\ s)| < \infty \quad p.s.$$

1. Existence de α

(1.1) Nous reprenons, en la simplifiant au maximum, l'approche déjà développée en [9].

Soit $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et $\varepsilon > 0$. On a, d'après Itô :

$$\log(\varepsilon + |B_t - B_s - y|) - \log(\varepsilon + |y|)$$

$$= \int_s^t \frac{d_u(|B_u - B_s - y|)}{\varepsilon + |B_u - B_s - y|} - \frac{1}{2}\int_s^t \frac{du}{(\varepsilon + |B_u - B_s - y|)^2}$$

$$= \int_s^t \left(dB_u \,;\, \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|}\right) \frac{1}{\varepsilon + |B_u - B_s - y|} + \frac{1}{2}\int_s^t du \, \frac{\varepsilon}{|B_u - B_s - y|\,(\varepsilon + |B_u - B_s - y|)^2},$$

soit, en intégrant les deux membres de l'égalité ci-dessus par rapport à (ds) sur [0,t] :

$$\int_0^t ds\{\log(\varepsilon + |B_t - B_s - y|) - \log(\varepsilon + |y|)\}$$

(1.a)

$$= \int_0^t \left(dB_u \,;\, \int_0^u ds \, \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|} \, \frac{1}{(\varepsilon + |B_u - B_s - y|)}\right) + A_t^{(\varepsilon)},$$

où $$A_t^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_s^t du \, \frac{\varepsilon}{|B_u - B_s - y|\,(\varepsilon + |B_u - B_s - y|)^2}$$

Pour parvenir à *(1.a)*, on a interverti l'intégrale stochastique en (dB_u), et l'intégrale en (ds) ; ceci ne présente aucune difficulté, l'intégrand étant borné.

Faisons maintenant tendre ε vers 0 en *(1.a)* :

- l'intégrale en (ds) converge p.s. et dans L^p vers :

$$\int_0^t ds \, \{\log |B_t - B_s - y| - \log|y|\}$$

- l'intégrale en (dB_u) converge dans tous les L^p vers :

$$\int_0^t \left(dB_u \,;\, \int_0^u ds \, \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2}\right),$$

ceci étant d'ailleurs valable pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ (y compris $y = 0$).
Pour démontrer précisément cette dernière convergence, on utilise principalement le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et le fait que, pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, et tout $u > 0$, la variable $\int_0^u \frac{ds}{|B_s - y|}$ appartient à tous les L^p (voir [9] pour plus

de détails).

En conséquence, le processus croissant $A_t^{(\varepsilon)}$ converge dans L^p, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers un processus croissant que l'on note $\Pi\alpha(y\ ;\ t)$.

On a donc obtenu la formule :

$$(1.b) \qquad \int_0^t ds\ \{\log |B_t - B_s - y| - \log |y|\} = \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds\ \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2}\right) + \Pi\alpha(y;t).$$

Remarquons ensuite que l'on déduit aisément de cette formule l'existence d'une version de α mesurable en (y, ω, t).

(1.2) Nous identifions maintenant α comme densité d'occupation, c'est-à-dire que α satisfait la formule $(0.a)$, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour cela, on associe à toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ son potentiel logarithmique :

$$L_f(x) = \int (\log |x-y|)\ f(y)\ dy$$

La fonction L_f est encore de classe C^∞, et on a, en particulier : $\Delta(L_f) = 2\Pi f$.

En conséquence, on obtient, par application de la formule d'Itô :

$$(1.c) \qquad \int_0^t ds\{L_f(B_t - B_s) - L_f(0)\} = \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds(\nabla L_f)(B_u - B_s)\right) + \Pi \int_0^t ds \int_s^t du\ f(B_u - B_s).$$

D'autre part, on a, par intégration à partir de la formule $(1.b)$:

$$(1.d) \qquad \int_0^t ds\{L_f(B_t - B_s) - L_f(0)\} = \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds(\nabla L_f)(B_u - B_s)\right) + \Pi \int dy\ f(y)\ \alpha(y\ ;\ t).$$

La formule $(0.a)$: $\int_0^t ds \int_s^t du\ f(B_u - B_s) = \int dy\ f(y)\ \alpha(y\ ;\ t)$

découle alors immédiatement de la comparaison des formules $(1.c)$ et $(1.d)$.

2. Etude de la continuité de α.

Ainsi que cela est annoncé dans l'Introduction ci-dessus, l'objet de ce second paragraphe est de déduire de la formule $(1.b)$ l'existence d'une version bicontinue de $(\alpha(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ t \geq 0)$, et d'améliorer le résultat de continuité sur $(\alpha(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ obtenu par Rosen [5].

Dans tout ce paragraphe, on notera, pour $R > 0$, $D_R = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| < R\}$.

Remarquons qu'il suffit, à l'aide de la continuité des trajectoires du mouvement Brownien, de démontrer le théorème pour le processus $\tilde{\alpha}$ restreint à $D_R \times \mathbb{R}_+$, pour tout $R > 0$.

(2.1) Nous montrons tout d'abord l'existence d'une version bicontinue de la famille de martingales : $X_t(y) = \int_0^t \left(dB_u \; ; \; S_0^u(y) \right)$,

où $\quad S_0^u(y) \equiv \int_0^u ds \; \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2}$.

Nous utilisons pour cela un ensemble d'arguments plus ou moins classiques, présentés dans les sous paragraphes (2.2), (2.3) et (2.4) ci-dessous. L'application proprement dite de ces arguments sera faite en (2.5).

(2.2) *Lemme de Garsia : Soient* p *et* Ψ *deux fonctions strictement croissantes sur* $[0,\infty[$, *telles que* $p(0)=\Psi(0)=0$, et $\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = \infty$. *Soit* $R > 0$, *et* $f : D_{2R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que :*

$$\int_{D_R \times D_R} dx \; dy \; \Psi\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{p(|x-y|)} \right) \leq \Gamma < \infty$$

Alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq 8 \int_0^{2|x-y|} \Psi^{-1}\left(c \frac{\Gamma}{u^4}\right) p(du) \qquad (x,y \in D_R)$$

où c *est une constante universelle.*

(Voir, par exemple, Stroock-Varadhan [8], p. 60, pour cet énoncé).

(2.3) Une conséquence de l'inégalité exponentielle.

Rappelons tout d'abord que, si $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale locale continue, nulle en 0, et que l'on note $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$ et $(\langle M \rangle_t)$ le processus croissant de M, l'inégalité exponentielle suivante (dite aussi : inégalité de Bernstein) est satisfaite :

pour tout $t \geq 0$, $P(M_t^* \geq x \; ; \; \langle M \rangle_t^{1/2} \leq y) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2}\right)$

La proposition suivante est alors une conséquence des inégalités obtenues en [11]

Proposition 1 : Soient p *et* q *tels que :* $p,q \in]1,\infty[$, *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $(M_i)_{i \in I}$ *une famille de martingales telle qu'il existe* $\mu > 0$ *pour lequel :*

$$\sup_{i \in I} E[\exp(\mu \langle M_i \rangle_\infty^{q-1})] < \infty$$

Alors, il existe $\gamma > 0$, *ne dépendant que de* μ *et* p, *tel que :*

$$\sup_{i \in I} E[\exp(\gamma (M_i^*)_\infty^{2/p})] < \infty$$

Nous appliquerons cette proposition uniquement dans le cas : $q = 3/2$, $p = 3$, ce qui donne : $q - 1 = 1/2$; $2/p = 2/3$.

(2.4) Une estimation de la mesure d'occupation pour le mouvement brownien plan

On suppose données, dans ce sous-paragraphe, un couple de fonctions de Young conjuguées φ et ψ (la fonction ψ introduite ici n'a, a priori, rien à voir avec la fonction Ψ du lemme (2.2)).

On note $g_t(y) = 1 + \log^+ \frac{t}{|y|^2}$ $(y \neq 0)$;

pour toute fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, et tout $R > 0$, on pose : $h^R(x) = h(x)1_{(|x| < R)}$.
On peut maintenant énoncer la :

Proposition 2 : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et toute fonction* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, *à support dans* D_R ,

on a : $$E[\left(\int_0^t ds\ f(B_s)\right)^n] \leq C^n\, n!\, \|f\|_\varphi^n \|g_t^{2R}\|_\psi^n ,$$

où C *désigne une constante universelle.*

Démonstration : Nous ne la ferons que pour $n = 2$, le cas général étant obtenu de la même manière, par application répétée de la propriété de Markov. On a :

$$E[\left(\int_0^t ds\ f(B_s)\right)^2] = 2E[\int_0^t ds\ f(B_s) \int_s^t du\ f(B_u)]$$

$$= 2\ E[\int_0^t ds\ f(B_s) \int_{|y| \leq 2R} dy\ f(B_s + y)\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{t/|y|^2} \frac{du}{u} \exp(-\frac{1}{2u})]$$

L'intégrale en (du) est majorée par $C\ g_t(y)$, et on a donc, par application de l'inégalité de Hölder généralisée :

$$E[\left(\int_0^t ds\ f(B_s)\right)^2] \leq 2\ E[\int_0^t ds\ f(B_s)]C\ \|f\|_\varphi \|g_t^{2R}\|_\psi$$

$$\leq 2\ C^2\ \|f\|_\varphi^2\ \|g_t^{2R}\|_\psi^2 \quad \square$$

Remarquons maintenant que, si $\psi_k(x) = \int_0^t \exp(u^k)du$ $(x \geq 0)$,

on a : $\|g_t^{2R}\|_{\psi_k} < \infty$ si, et seulement si : $k \leq 1$.

Dans la suite, on prendra donc $k = 1$; la fonction φ_1, conjuguée de ψ_1, est :

$$\varphi_1(u) = \int_0^u dx\ \log(1 + x) .$$

Nous aurons besoin dans la suite d'estimer $\|f\|_{\varphi_1}$, pour $f = f^R_{x,y}$, avec :

$$f^R_{x,y}(\xi) = \frac{1}{|\xi-x|\ |\xi-y|}\ 1_{(|\xi| \leq R)}\ , \text{ et } |x|, |y| \leq \frac{R}{2}\ .$$

Remarquons pour cela que l'on a, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, borélienne, et toute fonction de Young φ, l'estimation grossière :

$$\|f\|_\varphi \leq \sup\{1\ ;\ \int dx\ \varphi\Big(f(x)\Big)\} \leq 1 + \int dx\ \varphi\Big(f(x)\Big)\ .$$

Il s'agit donc d'évaluer :

$$\int_{|\xi| \leq R} d\xi\ \frac{1}{|\xi-x|\ |\xi-y|}\ \log\ (1 + \frac{1}{|\xi-x|\ |\xi-y|})\ .$$

Cette intégrale est majorée, lorsque $|x|, |y| \leq \frac{R}{2}$, par :

$$\int_{|\xi| \leq \frac{3R}{2}} d\xi\ \frac{1}{|\xi|\ |\xi-\theta|}\ \log\ (1 + \frac{1}{|\xi|\ |\xi-\theta|}),\ \text{où}\ \ \theta = (x-y)\ .$$

$$= \int_{|\eta| \leq \frac{3R}{2|\theta|}} d\eta\ \frac{1}{|\eta|\ |\eta-1|}\ \log(1 + \frac{1}{|\theta|^2\ |\eta|\ |\eta-1|})$$

$$\leq \int_{|\eta| \leq \frac{3R}{2|\theta|}} d\eta\ \frac{1}{|\eta|\ |\eta-1|}\ \{\log(1 + \frac{1}{|\theta|^2}) + \log(1 + \frac{1}{|\eta|\ |\eta-1|})\}$$

(à l'aide de l'inégalité : $1 + ab \leq (1 + a)(1 + b)$)

$$\leq C + \log(1 + \frac{1}{|\theta|^2})\ .\ \int_{|\eta| \leq \frac{3R}{2|\theta|}} d\eta\ \frac{1}{|\eta|\ |\eta-1|}\ = O\Big((\log \frac{1}{|\theta|})^2\Big)\ (\theta \to 0)\ .$$

Résumons ces remarques par l'énoncé suivant :

Proposition 3 : Soient x, y *et* R *tels que :* $|x|, |y| \leq \frac{R}{2}$

Posons : $f^R_{x,y}(\xi) = \frac{1}{|\xi-x|\ |\xi-y|}\ 1_{(|\xi| \leq R)}$. *On a alors :*

$$\|f^R_{x,y}\|_{\varphi_1} \leq \frac{1}{h(|x-y|)}\ , \textit{ avec } h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \textit{ fonction croissante continue,}$$

$$\textit{et}\quad \frac{1}{h(r)} = O\left((\log \frac{1}{r})^2\right)\ \ (r \to 0)\bullet$$

(2.5) Nous supposons ici : $|x|, |y| \leq R$ et on veut appliquer la *proposition 1* à

$$M_{x,y}(t) = \frac{1}{|x-y|}\Big(X_t(x) - X_t(y)\Big)$$

Pour simplifier les notations, on écrira seulement M pour $M_{x,y}$.

Remarquons que l'on a (avec les notations de (2.1)) :

$$\langle M\rangle_t = \frac{1}{|x-y|^2}\int_0^t du\ |S_0^u(y) - S_0^u(x)|^2 .$$

Or, on peut écrire : $\quad S_0^u(y) = \int_0^u ds\ \frac{1}{\overline{B_u - B_s - y}}$

(si $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $a,b \in \mathbb{R}$, on note : $\overline{\xi} = a - ib$),

et donc :

$$|S_0^u(y) - S_0^u(x)| \leq |x-y| \int_0^u \frac{ds}{|B_u-B_s-y|\ |B_u-B_s-x|} ,$$

ce qui entraîne, après avoir décomposé (ds) en : $ds\ 1_{(|B_u-B_s|\leq 2R)} + ds\ 1_{(|B_u-B_s|>2R)}$:

$$|S_0^u(y) - S_0^u(x)| \leq |x-y| \int_0^u ds\ \{f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s) + \frac{1}{R^2}\} ,$$

avec $\quad f^{2R}_{x,y}(\xi) = \frac{1}{|\xi-y|\ |\xi-x|}\ 1_{(|\xi|\leq 2R)}$.

On a donc : $\langle M\rangle_t \leq \frac{t}{R^4} + \int_0^t du \left(\int_0^u ds\ f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s)\right)^2$,

d'où l'on déduit :

$$E[\exp(\mu\ \langle M\rangle_t^{1/2})] \leq \exp(\mu\ \frac{\sqrt{t}}{R^2})\ E[\exp\ \mu \left(\int_0^t du (\int_0^u ds\ f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s))^2\right)^{1/2}] .$$

On obtient ensuite, en développant la fonction exponentielle en série :

(2.a) $$E[\exp(\mu\langle M\rangle_t^{1/2})] \leq \exp(\frac{\mu\sqrt{t}}{R^2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} E[\left(\int_0^t du (\int_0^u ds\ f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s))^2\right)^{n/2}] .$$

• Pour tout $n \geq 2$, on majore l'expression $E[\left(\int_0^t du (\int_0^u ds\ f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s))^2\right)^{n/2}]$

par :

$$t^{n/2}\ E[\left(\frac{1}{t}\int_0^t du (\int_0^u ds\ f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s))^2\right)^{n/2}]$$

$$\leq t^{n/2}\ E[\frac{1}{t}\int_0^t du \left(\int_0^u ds\ f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s)\right)^n]$$

$$= t^{\frac{n}{2}-1} \int_0^t du\, E\left[\left(\int_0^u ds\, f^{2R}_{x,y}(B_u - B_s)\right)^n\right] \leq t^{n/2}\, E\left[\left(\int_0^t ds\, f^{2R}_{x,y}(B_s)\right)^n\right] \leq t^{n/2} \|f^{2R}_{x,y}\|^n_{\varphi_1} \|g^{2R}\|^n_{\psi_1} C^n n!$$

avec les notations de la *proposition 2* ci-dessus.

. Pour $n = 1$, on majore l'expression : $E\left[\left(\int_0^t du \left(\int_0^u ds\, f^{2R}_{x,y}(B_u - B_s)\right)^2\right)^{1/2}\right]$

à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, par :

$$E\left[\int_0^t du \left(\int_0^u ds\, f^{2R}_{x,y}(B_u - B_s)\right)^2\right]^{1/2} \leq \sqrt{t}\, E\left[\left(\int_0^t ds\, f^{2R}_{x,y}(B_s)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{t}\, C \|f^{2R}_{x,y}\|_{\varphi_1} \|g^{2R}\|_{\psi_1} ,$$

toujours d'après la *proposition 2*.

Finalement, on obtient, en reportant ces inégalités en *(2.a)* :

$$E[\exp \mu \langle M \rangle_t^{1/2}] \leq \exp\left(\mu \frac{\sqrt{t}}{R^2}\right) \cdot \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n t^{n/2} (\|f^{2R}_{x,y}\|_{\varphi_1} \|g^{2R}\|_{\psi_1} C)^n .$$

$$\leq \frac{2 \exp\left(\mu \frac{\sqrt{t}}{R^2}\right)}{1 - \mu \sqrt{t}\, \|f^{2R}_{x,y}\|_{\varphi_1} \|g^{2R}\|_{\psi_1} C} ,$$

et donc, en utilisant les notations de la *proposition 3*, et en changeant μ en $\mu\, h(|x-y|)$:

$$\sup_{|x|,|y| \leq R} E[\exp(\mu\, h(|x-y|)\, \langle M \rangle_t^{1/2})] < \infty ,$$

pour μ suffisamment petit (dépendant de R et t seulement).
On déduit alors de la *proposition 1* que :

$$\sup_{|x|,|y| \leq R} E\left[\exp \nu \left(h(|x-y|)\, M^*_t\right)^{2/3}\right] < \infty$$

pour ν suffisamment petit.

On remarque maintenant, à l'aide du lemme de Kolmogorov classique, des majorations $\frac{x^n}{n!} < \exp(x)$, pour tout n , et de l'inégalité ci-dessus, qu'il existe une version continue de $(X_t(x)\ ;\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^2)$.

On peut maintenant appliquer le *lemme de Garsia* (2.2), avec $\Psi(r) = \exp(\lambda r^{2/3})-1$ pour λ suffisamment petit, et $p(r) = r(\log \frac{1}{r})^2$, ce qui va nous permettre de préciser le module de continuité de $X_t(\cdot)$.

En effet, pour une constante $\lambda > 0$, ne dépendant que de R et t, la variable

$$\Gamma \equiv \int_{D_R \times D_R} dx\, dy \left[\exp \lambda\left(\frac{\sup_{s\le t} |X_s(x) - X_s(y)|}{p(|x-y|)}\right)^{2/3} - 1\right]$$

est intégrable, et donc finie p.s.
On en déduit, d'après le *lemme de Garsia* :

$$\sup_{\substack{s\le t \\ x,y \in D_{R/2}}} |X_s(x) - X_s(y)| \le C_{R,t} \int_0^{2|x-y|} \left(\log(1 + \frac{c\Gamma}{u^4})\right)^{3/2} p(du)$$

où $C_{R,t}$ est une constante ne dépendant que de R et t.

Cette dernière inégalité entraîne, pour le processus $(X_s(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}^2,\ s \ge 0)$, le résultat énoncé dans le théorème, lorsque l'on remplace $\tilde{\alpha}$ par X.

(2.6) Pour terminer l'étude de la continuité de $(\tilde{\alpha}(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^2,\ t \ge 0)$ il nous reste, en vertu de la formule *(1.b)*, à préciser le module de continuité de l'expression : $L_t(z) = \int_0^t ds \log |B_s - z| \quad (z \in \mathbb{C})$.

Soient $y, z \in \mathbb{C}$. Posons $m(u) = |uy + (1-u)\, z - B_s| \quad (u \in [0,1])$
On a :

$$\log|y-B_s| - \log|z-B_s| = \int_0^1 du\ \frac{1}{m(u)}\ \frac{m'(u)\cdot m(u)}{m(u)}\ ,$$

d'où l'on déduit :

$$\sup_{s\le t} |L_s(y) - L_s(z)| \le \int_0^t ds \int_0^1 du\ \frac{|y - z|}{|uy + (1-u)z - B_s|}$$

Posons maintenant $\Psi(x) = \exp(x^2) - 1 \quad (x \ge 0)$.

Rappelons que, si $\xi \in \mathbb{C}$, il existe un mouvement brownien réel $(\beta_t(\xi)\ ;\ t \ge 0)$ tel que :

$$|\beta_t - \xi| = |\xi| + \beta_t(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s - \xi|}$$

On déduit de cette identité que l'on a, pour tout $t > 0$, fixé :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{C}} \left\| \int_0^t \frac{ds}{|B_s - \xi|} \right\|_\Psi < \infty$$

En conséquence, on a :

$$\sup_{\substack{y,z \in \mathbb{C} \\ y \neq z}} \left\| \sup_{s \leq t} \frac{|L_s(y) - L_s(z)|}{|y - z|} \right\|_\psi \leq \sup_{y,z \in \mathbb{C}} \int_0^1 du \left\| \int_0^t \frac{ds}{|uy + (1-u)z - B_s|} \right\|_\psi$$

$$\leq \sup_{\xi \in \mathbb{C}} \left\| \int_0^t \frac{ds}{|B_s - \xi|} \right\| < \infty$$

Finalement, on déduit du lemme de Garsia que pour tous R et t fixés, il existe $\delta > 0$ et une variable $C(\omega) > 0$ tels que :

pour $y,z \in D_R$, et $|y-z| < \delta$, $\sup_{s \leq t} |L_s(y) - L_s(z)| \leq C_\omega |y-z| \left(\log \frac{1}{|y-z|}\right)^{1/2}$

(2.7) En rassemblant les résultats obtenus en (2.5) et (2.6), on a complètement démontré le théorème.

Nota Bene : Dans l'article de Garsia intitulé :

Continuity properties of Gaussian processes with multidimensional time parameter (Sixth Berkeley Symposium ; vol II (1970)) une version du lemme (2.2) est démontrée sous l'hypothèse supplémentaire : Ψ est convexe. Cette hypothèse n'est pas nécessaire ; voir Stroock - Varadhan [8], ou même:Garsia - Rodemich - Rumsey (Indiana Math. Journal, 20, 565-578 (1970)). Elle permet cependant à Garsia des simplications importantes de la démonstration d'origine.
En tout cas, l'application du lemme (2.2) à $\Psi(r) = \exp(\lambda r^{2/3}) - 1$ est bien licite.

REFERENCES

[1] E.B. Dynkin : Self-intersection local times, occupation fields and stochastic integrals. Preprint (1985).

[2] D. Geman, J. Horowitz, J. Rosen : A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Annals of Proba 12, 86-107, 1984.

[3] J.F. Le Gall : Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. Sém. Probas XIX, Lect. Notes in Maths 1123. Springer (1985).

[4] P.A. Meyer : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Probas X. Lect. Notes in Maths 511. Springer (1976).

[5] J. Rosen : A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. Comm. in Math. Physics. 88, 327-338 (1983).

[6] J. Rosen : Tanaka's formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion. Ann. of Prob. To appear.

[7] J. Rosen : A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. This volume.

[8] D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan : Multidimensional diffusion processes. Springer-Verlag (1979).

[9] M. Yor : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. Sém. Probas XIX, Lect. Notes in Maths. 1123. Springer (1985).

[10] M. Yor : Sur la représentation comme intégrales stochastiques des temps d'occupation du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. Dans ce volume.

[11] M. Yor : Burkholder-Gundy type inequalities for Brownian motion, and non-moderate increasing functions. To appear.

Je remercie vivement J.F. Le Gall dont la stimulation est pour beaucoup dans l'existence de ce travail.