SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JUAN RUIZ DE CHAVEZ

Sur la positivité de certains opérateurs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 338-340

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__338_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA POSITIVITE DE CERTAINS OPERATEURS

par J. Ruiz de Chavez

Cette note fait suite à notre exposé [1] sur les travaux de Surgailis, paru dans le volume précédent du séminaire.

Soit Φ l'espace de Fock construit sur l'espace de Hilbert $H=L^2(\mathbb{R}_+,dt)$. Soit A une contraction de H : on peut lui associer de manière naturelle une contraction $\Phi(A)$ de Φ, entièrement caractérisée par la propriété

$$\Phi(A)\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(Af) \quad \text{pour } f\in H \tag{1}$$

où $\mathcal{E}$ est l'exponentielle de Wick. Le problème traité par Surgailis consiste à chercher quelle est la condition que l'on doit imposer à A pour que $\Phi(A)$ soit une contraction positive, au sens que voici.

Soit (X_t) une martingale localement de carré intégrable, nulle en 0, de crochet $\langle X,X\rangle_t=t$. Si $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les v.a. X_t, les développements en intégrales stochastiques multiples permettent d'identifier l'espace de Fock à un sous-espace de $L^2(\mathcal{F})$. Nous nous intéressons au cas où $\Phi=L^2(\mathcal{F})$ tout entier, et la positivité de $\Phi(A)$ (notion qui dépend du choix de la martingale X) signifie que cet opérateur transforme les v.a. positives en v.a. positives.

Le cas où X est un mouvement brownien et celui où X est un processus de Poisson compensé sont traités dans [1]. Cette note a pour but de montrer comment on peut traiter le cas où

$$X_t = \int_0^t \frac{1}{\rho_s}(dN_s-\rho_s^2 ds) \tag{2}$$

où ρ est une fonction localement intégrable, partout $\neq 0$, et (N_t) est un processus de Poisson d'intensité $\rho_s^2 ds$. Ce cas se ramène très simplement à celui du processus de Poisson compensé usuel, traité par Surgailis. Nous profitons aussi de cette occasion pour montrer la nécessité des conditions de Surgailis (établie par celui-ci, mais non exposée dans [1]).

Rappelons d'abord le théorème de Surgailis :

THEOREME (Cas où $\rho=1$). Pour que $\Phi(A)$ soit un opérateur positif, il faut et il suffit que A soit un noyau sousmarkovien tel que $\lambda A\leq\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. La suffisance a été traitée dans [1]. Etablissons la nécessité. Nous avons pour toute fonction f de $L^2(\lambda)$, à support dans un intervalle borné $[0,t]$ (et donc intégrable)

(3) $$\mathcal{E}(f) = e^{-\lambda(f)} \prod_{s\in S} (1+f(s)) \qquad (S, \text{ ensemble des sauts})$$

Si f ne satisfait pas aux hypothèses ci-dessus, l'expression est celle de l'exponentielle de Doléans, plus compliquée :

(4) $$\mathcal{E}(f) = \exp(\int_0^\infty f_s dX_s) \prod_{s\in S} (1+f_s)e^{-f_s} .$$

Prenons d'abord dans (3) $f \geqq -1$. Alors $\mathcal{E}(f) \geqq 0$, donc la positivité de $\Phi(A)$ entraîne $\mathcal{E}(Af) \geqq 0$ p.s.. D'après l'expression (4)

$$f \geqq -1 \Rightarrow A(fI_{[0,t]}) \geqq -1 \text{ p.p..}$$

Prenant $f \geqq 0$, nous avons $nf \geqq -1$ pour tout n entier, donc $nA(fI_{[0,t]}) \geqq -1$ p.p., et $A(fI_{[0,t]}) \geqq 0$ p.p.. Comme A est une contraction de L^2 on peut faire tendre t vers $+\infty$, donc A est <u>positif</u> . Prenant ensuite $f=-I_{[0,t]} \geqq -1$ on voit que $A(I_{[0,t]}) \leqq 1$ p.p., donc A est un pseudonoyau sousmarkovien : on peut le régulariser en un vrai <u>noyau sousmarkovien</u>.

Soit f positive, à support dans [0,t]. On a alors d'après (3) $\mathcal{E}(f) \geqq e^{-\lambda(f)}$. Comme $\Phi(A)$ préserve les constantes (prendre f=0 dans (1)), la positivité de $\Phi(A)$ entraîne $\mathcal{E}(Af) \geqq e^{-\lambda(f)}$, donc en prenant une espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_u$ $\mathcal{E}((Af)I_{[0,u]}) \geqq e^{-\lambda(f)}$. Nous pouvons utiliser l'expression (1) pour évaluer cela, et remarquer que $S \cap [0,u] = \emptyset$ avec probabilité >0 : dans un tel cas , $\mathcal{E}((Af)I_{[0,u]})$ se réduit à $\exp(-\int_0^u (Af_s)ds)$. Par conséquent

$$\exp(-\int_0^u (Af_s)ds) \geqq \exp(-\int_0^\infty f_s ds)$$

Faisant tendre u vers $+\infty$, on voit que $\lambda(Af) \leqq \lambda(f)$. On lève ensuite la condition de support sur f , et le théorème est établi.

Le cas de l'espace de Fock construit au dessus de $L^2(\Theta)$, où Θ est une mesure localement bornée sur $\mathbb{R}_+$, se ramène au précédent par un changement de temps déterministe : l'espace de Fock s'identifie à l'espace $L^2(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par le processus de Poisson compensé

(5) $$Y_t = N_t - \Theta([0,t])$$

d'intensité Θ , et la condition de positivité de $\Phi(A)$ est $\Theta A \leqq \Theta$ au lieu de $\lambda A \leqq \lambda$.

Nous revenons alors à (2) : désignons par Θ la mesure $\rho^2(t)dt$: l'espace $L^2(\mathcal{F})$ est aussi bien engendré par X (2) que par Y (5), et nous avons un isomorphisme $f \xrightarrow{i} f/\rho$ de $L^2(\lambda)$ sur $L^2(\Theta)$, qui se prolonge en un isomorphisme des espaces de Fock correspondants, et qui lorsqu'on <u>identifie</u> ces espaces de Fock à $L^2(\mathcal{F})$ est simplement l'identité. En effet, dans le premier espace de Fock, si f est bornée à support dans [0,t], on lit $\mathcal{E}(f)$ comme la variable aléatoire

$$e^{-\int f_s \rho_s ds} \prod_{s\in S} \left(1 + \frac{f(s)}{\rho(s)}\right)$$

tandis que, dans le second espace de Fock, $\mathcal{E}(g) = e^{-\Theta(g)} \prod_{s\in S} (1+g_s)$ se lit pour $g=f/\rho$

$$e^{-\int f_s/\rho_s \, \Theta(ds)} \prod (1 + \frac{f}{\rho}(s))$$

qui a bien la même valeur. Pour obtenir la condition de positivité cherchée, il suffit donc d'écrire que iAi^{-1} satisfait à la condition de positivité de Surgailis. Autrement dit :

THEOREME. Pour qu'une contraction A de $L^2(\lambda)$ soit telle que $\Phi(A)$ préserve la positivité dans $L^2(\mathcal{F})$, il faut et il suffit qu'il existe un noyau sous-markovien B , tel que $\Theta B \leq B$ ($\Theta(dx)=\rho^2(x)dx$) et tel que l'on ait

(6) $$Af = \rho B(\frac{f}{\rho}) \quad \text{pour} \quad f \in L^2(\lambda) \ .$$

Ou encore, que l'opérateur $f \longmapsto \frac{1}{\rho}A(f\rho)$ soit régularisable en un noyau sousmarkovien B diminuant Θ .

Si l'on interprète l'espace de Fock comme espace L^2 associé au mouvement brownien, la condition de positivité de $\Phi(A)$ se réduit à la propriété de contraction. Le mouvement brownien est limite de tous les processus de Poisson compensés X_t construits ci-dessus lorsque l'intensité $\rho_s^2 ds$ tend vers l'infini, la hauteur des sauts (non nécessairement positive) $1/\rho_s$ tendant vers 0 . La très grande variété de contractions satisfaisant à (6) justifie intuitivement la disparition de toute condition à la limite, mais il semble difficile de transformer cela en une démonstration entièrement probabiliste pour le cas brownien.

REFERENCES.

[1]. J. Ruiz de Chavez. Espaces de Fock pour les processus de Wiener et de Poisson. Sém. Prob. XIX.

[2]. D. Surgailis. On Poisson multiple stochastic integrals and associated Markov semigroups. Prob. and Math. Stat., 3, 1984, p.217-239.