SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

WEI-AN ZHENG
PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur la construction de certaines diffusions

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 334-337
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__334_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA CONSTRUCTION DE CERTAINES DIFFUSIONS

par W.A. Zheng et P.A. Meyer

Les travaux récents de E. Carlen [1] et W.A. Zheng [2] ont abouti à la construction de certaines diffusions, obtenues en perturbant un mouvement brownien au moyen d'un champ de vecteurs singulier. Dans ces travaux figure une condition globale, dite << condition d'énergie finie >>. Nous nous proposons ici de donner une condition <u>locale</u>, permettant d'affirmer que la diffusion évite l'ensemble des << noeuds >> de sa densité. Nous ne cherchons pas, en revanche, à minimiser les hypothèses de différentiabilité.

1. NOTATIONS ET RAPPELS. On se place sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, et l'on se donne une fonction continue $\rho(x,t)$ sur cet espace, positive (nous poserons souvent $\rho(.,t)=\rho_t$). Nous désignons par U l'ouvert $\{\rho>0\}$, et nous supposons que ρ y est de classe $C^{2,1}$. Dans cet ouvert aussi, nous nous donnons un champ de vecteurs $b(x,t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de classe $C^{1,0}$, lié à ρ par une équation de Fokker-Planck

$$\dot{\rho} = \tfrac{1}{2}\Delta\rho - \operatorname{div}(\rho b) \quad . \tag{1}$$

Le champ $\hat{b}$ défini par $b-\hat{b} = \operatorname{grad}\rho/\rho$ satisfait alors à l'équation analogue, toujours dans U

$$\dot{\rho} = -\tfrac{1}{2}\Delta\rho - \operatorname{div}(\rho\hat{b}) \quad . \tag{$\hat{1}$}$$

Soit I un intervalle $[u,v]$ de $\mathbb{R}$, et soit Ω_I l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}^d$, avec ses tribus usuelles et ses applications coordonnées X_t (nous désignerons par Ω'_I l'espace analogue, où l'on permet une durée de vie finie ζ). Soit P^μ la mesure sur Ω_I sous laquelle (X_t) est un mouvement brownien de mesure initiale μ . Soit $\tau=\inf\{t : X_t \notin U\}$. Pour toute fonction positive f sur $\mathbb{R}^d$, posons

$$Q_{uv}(x,f) = E^x[f(X_v)I_{\{v<\tau\}}\exp(\int_u^v b(X_s,s)\cdot dX_s - \tfrac{1}{2}\int_u^v b^2(X_s,s)ds\ )]$$

Il est bien connu que l'on définit ainsi une fonction de transition sousmarkovienne, portée par U . Nous désignerons par Q^μ la mesure sur Ω'_I sous laquelle le processus (X_t) admet cette fonction de transition. Sous cette loi, le processus (défini pour $t<\zeta$)

$$W_t = X_t - X_u - \int_u^t b(Y_s)ds \qquad \text{où l'on pose } Y_s=(X_s,s)$$

peut être considéré comme la restriction à $[0,\zeta[$ d'un mouvement brownien (défini sur un espace élargi convenable) : on peut donc considérer (X_t) comme la solution d'une équation différentielle stochastique,

calculée jusqu'au temps de sortie τ de l'ouvert U .

La fonction $b(x,t)$ étant bornée sur les compacts de U, le processus (Y_t) sort de tout compact de U à l'instant de sa durée de vie ζ : ou bien la trajectoire ne reste pas bornée dans $\mathbb{R}^d\times I$, ou bien elle reste bornée mais est adhérente à U^c, l'ensemble des noeuds de ρ .

Si l'on remplace b par $-\hat{b}$, on définit de même une fonction de transition sousmarkovienne $\hat{Q}_{uv}$. On trouvera dans [2] un argument simple de retournement du temps sur le mouvement brownien, permettant de déduire de (1) et ($\hat{1}$) la propriété de dualité que voici :

LEMME 1. Soient f,g deux fonctions positives sur $\mathbb{R}^d$. Alors on a

$$(2)\quad \int \rho_u(x)f(x)dx\, Q_{uv}(x,dy)g(y) = \int \rho_v(y)g(y)dy\, \hat{Q}_{uv}(y,dx)f(x) .$$

En particulier, prenons $f=1$. La fonction de transition $\hat{Q}_{uv}$ étant sousmarkovienne, on a $\rho_u Q_{uv} \leqq \rho_v$ p.p., et on en déduit (th. de Fubini) :

LEMME 2. Pour toute fonction positive h sur $\mathbb{R}^d\times[u,v]$ on a, en désignant par μ_u la mesure $\rho_u(x)dx$

$$(3)\qquad E_Q^{\mu_u}\Big[\int_u^v h(Y_s)ds\Big] \leqq \int_{\mathbb{R}^d\times[u,v]} h(x,s)\rho(x,s)dxds .$$

2. Voici le résultat que nous voulons établir :

THEOREME. Soit F la fonction sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$

$$(4)\qquad F = \Delta\rho - \rho\,\mathrm{div}b - \tfrac{1}{2}\mathrm{grad}^2\rho/\rho \quad \text{sur } U\ ,\ F=0 \text{ sur } U^c .$$

Si la fonction F^- est localement intégrable, sous toute mesure Q^{μ_u} le processus (Y_t) sort de tout compact de $\mathbb{R}^d\times[u,v]$ à l'instant de sa durée de vie.

Autrement dit, le processus (Y_t) ne va jamais mourir à distance finie, dans l'ensemble $\{\rho=0\}$ des noeuds de la densité ρ.

Nous commençons par un calcul, qui résulte de la formule d'Ito appliquée dans U à $\log\rho$, et de (1). Nous le laissons au lecteur.

LEMME 3. On a pour $t<\zeta$

$$(5)\quad \log\rho(Y_v) - \log\rho(Y_u) = \int_u^v \frac{\mathrm{grad}\,\rho}{\rho}(Y_s).dW_s + \int_u^v \frac{1}{\rho}F(Y_s)ds$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d\times[u,v]$. Posons

$$T_n = \inf\{t\leqq v : Y_t\notin K \text{ ou } \rho(Y_t)\leqq 1/n\}\ ,\ T = \lim_n T_n .$$

Il s'agit de démontrer que pour tout K et tout v

$$Q^{\mu_u}\{\, u<T<v,\ \rho(Y_{T_n})\leqq 1/n \text{ pour tout } n\} = 0 .$$

Désignons par A cet événement. Sur $\{T_n>u\}$, nous avons pour $s\leqq T_n$ $Y_s\varepsilon K$, et $\rho(Y_s)\geqq 1/n$, donc l'intégrale stochastique au second membre de (5) a une espérance nulle à l'instant T_n . Nous avons donc

$$E[\log\rho(Y_{T_n})I_{\{T_n>u\}}] \geq E[\log\rho(Y_u)I_{\{T_n>u\}}] - E[\int_u^{T_n} \frac{1}{\rho}F^-(Y_s)ds]$$

Au premier membre, sur $\{T_n>u\}$ nous avons $Y_T \varepsilon K$, donc $\log\rho(Y_{T_n})$ est borné supérieurement, donc si la probabilité de A est non nulle, le côté gauche tend vers $-\infty$. Du côté droit, si $T_n>u$ on a $X_u \varepsilon K$, et l'espérance est bornée en valeur absolue par

$$\int_K |\log\rho(x)|\,\rho(x)dx$$

qui est finie, ρ étant localement bornée. Enfin, comme F^- est positive nous voyons que si A a une probabilité non nulle, on a

$$E[\int_u^v \frac{1}{\rho}F^-(Y_s)I_{\{X_s \varepsilon K\}}ds] = +\infty$$

Mais alors, en appliquant (3), nous avons a fortiori

$$\int_{\mathbb{R}^d\times[u,v]} I_K(x)F^-(x,s)dxds = +\infty$$

et F^- n'est pas localement intégrable. Le théorème est établi.

3. On peut aussi écrire F sous une forme plus symétrique

$$F = \frac{1}{2}\Delta\rho + \dot{\rho} + \frac{1}{2}(b+\hat{b})\cdot\operatorname{grad}\rho \ .$$

Dans le cas stationnaire, le second terme disparaît, et dans le cas stationnaire symétrique, les deux derniers termes disparaissent.

REFERENCES

[1]. E. CARLEN. Conservative diffusions. Comm. in Math. Phys. 94, 1984, p. 293-315.

[2]. W.A. ZHENG. Tightness results for laws of diffusion processes - application to stochastic mechanics. A paraître, Ann. I.H.P., 1985.

W.A. Zheng
East China Normal University
Shanghai, Chine

P.A. Meyer
IRMA, 7 rue G^{al} Zimmer
Strasbourg

COMMENTAIRE (M. Emery)

Voici un exemple en dimension 1, qui montre que la condition de Zheng est réellement précise. On se place sur un intervalle $]0,a[$ ($a\leq+\infty$), la fonction ρ étant indépendante de t, >0 dans $]0,a[$ et admettant un noeud en 0. On se place dans le cas stationnaire réversible ($b = -\hat{b} = \rho'/2\rho$). On peut montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la diffusion dans $]0,a[$ évite le noeud en 0 est $\int_{0+} dx/\rho(x) = +\infty$. Si $\rho(x)=x^\lambda$ ou $x(\log\frac{1}{x})^\lambda$, la condition suffisante de Zheng s'applique dans tout l'intervalle où le noeud est effectivement évité.

La condition nécessaire et suffisante ci-dessus s'établit ainsi. Soit f une primitive de $1/\rho$ dans $]0,a[$; alors $M_t=f\circ X_t$ est une martingale locale de crochet $\langle M,M\rangle_t=dt/\rho^2(X_t)$. Si $f(0)>-\infty$, M_t atteint $f(0)$ par valeurs supérieures en temps fini avec probabilité positive (car $d\langle M,M\rangle_t\geq dt$ au voisinage de $f(0)$), donc X peut atteindre 0. Si $f(0)=-\infty$, M ne peut atteindre $f(0)=-\infty$ sans osciller entre $-\infty$ et $+\infty$, ce qui entraîne que X oscille entre deux valeurs u,v telles que $0<u<v<a$. En appliquant la propriété de Markov forte aux temps de passage successifs, on voit que ces oscillations prennent un temps infini, donc 0 n'est pas atteint en temps fini.

NOTE SUR LES EPREUVES (Zheng Wei-an). Nous savons démontrer par la même méthode un critère de non explosion : nous supposons encore que $\rho\in C^{2,1}$, $b\in C^{1,0}$, et en outre

- $\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} F^-(x,s)dxds < \infty$
- il n'existe pas de courbe continue x(t) telle que $\sup_{t<a} |x(t)|=\infty$ et $\inf_{t<a} \rho(x(t),t)>0$ ($a\in\mathbb{R}_+$) .

Considérons alors l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + W_t + \int_0^t b(X_s,s)ds$$

où (W_t) est un mouvement brownien indépendant de X_0 , et la loi de X_0 admet la densité $\rho(.,0)$. Cette équation a une solution unique et non explosive, et la loi de celle-ci à l'instant t admet la densité $\rho(.,t)$.