NICOLAS BOULEAU
DAMIEN LAMBERTON

Théorie de Littlewood-Paley-Stein et processus stables

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 162-185
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__162_0>

THEORIE DE LITTLEWOOD-PALEY-STEIN
ET PROCESSUS STABLES

N. BOULEAU
D. LAMBERTON

A la suite des travaux de Stein [15] sur la théorie de Littlewood-Paley pour les semi-groupes markoviens symétriques, P.A. Meyer ([10] et[12]) et N. Varopoulos [16] ont montré qu'on pouvait obtenir une partie des résultats de cette théorie par des méthodes purement probabilistes. L'architecture de cette approche suggère très naturellement de l'étendre au cas où le mouvement brownien auxiliaire est remplacé par un processus à accroissements indépendants à sauts positifs. C'est ce que nous faisons ici en nous limitant essentiellement, pour avoir des formules plus explicites, au cas des processus stables. L'ensemble de la méthode peut se développer de façon analogue, le rôle du semi-groupe de Cauchy (subordonné d'ordre $\frac{1}{2}$) étant joué par le semi-groupe subordonné d'ordre $\frac{1}{\alpha}$ ($\alpha \in]1,2[$).

Le bilan de cette extension est schématiquement le suivant :

- Obtention probabiliste d'un théorème de multiplicateur plus général que celui de [16], mais sans atteindre le théorème de Stein, généralisé par Cowling dans [6].
- Obtention de nouvelles inégalités par rapport à celles obtenues de façon probabiliste dont certaines (inégalités complètes) sont aussi nouvelles par rapport à l'approche de Stein. Ceci conduit à propos du problème des transformées de Riesz (cf [12], [13] et [1]), sous des hypothèses convenables, à l'équivalence de la norme L^p de la racine carrée de l'opérateur carré du champ $\sqrt{\Gamma(f,f)}$ avec d'autres expressions que celle de $\sqrt{-A}\, f$.

Cet article est une version détaillée de la note [2].

§ 1 - PROCESSUS STABLES A SAUTS POSITIFS

Nous avons regroupé dans ce paragraphe les quelques résultats sur les processus stables qui permettent la mise en oeuvre de la méthode. Considérons un réel $\alpha \in]1,2[$ et notons $Y^{(\alpha)} = (Y_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$ le processus à accroissements indépendants stationnaires de fonction caractéristique :

$$\mathbb{E}(e^{iuY_t^{(\alpha)}} \mid Y_0^{(\alpha)}) = \exp[iuY_0^{(\alpha)} - t\,\frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{iux} + iux}{x^{\alpha+1}}\,dx]$$

$$= \exp[iuY_0^{(\alpha)} + t|u|^{\alpha}(\cos\frac{\pi\alpha}{2} - i\,\mathrm{sgn}(u)\sin\frac{\pi\alpha}{2})]$$

L'existence de $Y^{(\alpha)}$ est assurée par la formule de Lévy-Khintchine (cf [7] chap. XVII ou [3]). $Y^{(\alpha)}$ est un processus stable d'ordre α : $(Y_{\lambda t}^{(\alpha)} - Y_0^{(\alpha)})_{t\geq 0}$ et $\lambda^{1/\alpha}(Y_t^{(\alpha)} - Y_0^{(\alpha)})_{t\geq 0}$ ont même loi. De plus, la mesure de Lévy du processus $Y^{(\alpha)}$ (équivalente à $1_{]0,+\infty[}(x)\,\frac{dx}{x^{\alpha+1}}$) ne charge pas $]-\infty,0[$, ce qui entraîne que les sauts de $(Y_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}$ sont presque sûrement positifs (cf [3] p.7). Soit $(\pi_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}$ le semi-groupe de transition de $Y^{(\alpha)}$, considéré comme processus de Markov sur $\mathbb{R}$.

D'après [5], pour toute fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, uniformément continue bornée, ainsi que ses deux premières dérivées, on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\pi_t^{(\alpha)} f(y) - f(y)}{t} = B^{(\alpha)} f(y)$$

avec $B^{(\alpha)} f(y) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{f(y+v) - f(y) - vf'(y)}{v^{1+\alpha}}\,dv$, et la convergence est uniforme en y. Notons qu'on peut définir $B^{(\alpha)} f$ sur $\mathbb{R}_+$ pour f de classe C^2 à dérivées bornées, définie sur $\mathbb{R}_+$.

Nous noterons $(\Omega^Y, (\mathcal{G}_t^y)_{y\in\mathbb{R}}, \mathbb{P}^y, Y_t^{(\alpha)})$ la réalisation canonique du processus $Y_t^{(\alpha)}$. Dans la suite, la loi initiale de $Y^{(\alpha)}$ sera toujours une mesure de Dirac ε_y, $y \in \mathbb{R}$. Posons, pour $a \in \mathbb{R}$: $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid Y_t^{(\alpha)} \leq a\}$.

En utilisant la stabilité du processus $Y_t^{(\alpha)}$ et le fait que ses trajectoires ne sont pas croissantes ($\alpha > 1$), on voit facilement que $\mathbb{P}^y(T_a < \infty) = 1$, pour tous réels a et y.

Remarquons que si $y > a$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} T_a = \inf\{t \geq 0 \mid Y_t^{(\alpha)} = a\} \\ \text{et} \\ Y_{T_a}^{(\alpha)} = a \end{array}\right\} \quad \mathbb{P}^y \text{ p.s.}$$

C'est une conséquence immédiate de la positivité des sauts.

On peut caractériser simplement la loi de T_0 sous la probabilité $\mathbb{P}^y$, pour $y \geq 0$:

PROPOSITION 1.1 :

Pour tous réels y et λ positifs ou nuls :

$$\mathbb{E}^y(e^{-\lambda T_0}) = e^{-y\lambda^{1/\alpha}} .$$

Cette proposition se déduit du lemme suivant :

LEMME 1.2 :

Pour tout $p \geq 0$: $\mathbb{E}^0(e^{-pY_t^{(\alpha)}}) = e^{tp^\alpha}$.

On peut en effet, à partir de ce lemme, raisonner comme dans le cas tout à fait classique du mouvement brownien : pour tout réel $p > 0$, le processus $M_t = \exp(-pY_t^{(\alpha)} - t p^\alpha)$ est une martingale sous la probabilité $\mathbb{P}^0$ (en raison du lemme et de l'indépendance des accroissements). Arrêtée à l'instant T_{-y}, $y > 0$, cette martingale est uniformément bornée par e^{py} ($Y_{T_{-y}}^{(\alpha)} = -y$ $\mathbb{P}^0$ p.s.). On peut donc écrire : $\mathbb{E}^0(M_{T_{-y}}) = \mathbb{E}^0(M_0) = 1$, ce qui donne : $\mathbb{E}^0(e^{-p^\alpha T_{-y}}) = e^{-py}$. En prenant $p = \lambda^{1/\alpha}$ et en tenant compte de l'invariance par translation de $Y^{(\alpha)}$, on obtient la proposition 1.1.

Démonstration du lemme 1.2 :

Il suffit de montrer :

$$(*) \qquad \forall\, p \geq 0 \quad \mathbb{E}^0(e^{-pY_t^{(\alpha)}}) < \infty .$$

Supposant, en effet, ce point acquis, on voit facilement que la fonction $z \mapsto \mathbb{E}^0(e^{-zY_t^{(\alpha)}})$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$ et analytique dans $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ et on déduit le lemme 1.2 de l'expression de la fonction caractéristique de $(Y_t^{(\alpha)})$ par prolongement analytique.

Pour montrer (*), introduisons la suite (Z^n) des processus à accroissements indépendants stationnaires, issus de 0, définis par :

$$\mathbb{E}(e^{iu Z^n_t}) = \exp\left[t \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{1/n}^{\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^{\alpha+1}} dx\right] .$$

Il est clair que la suite Z^n converge en loi vers $Y^{(\alpha)}$ (issu de 0). Chaque processus (Z^n_t) est, à une dérive près, un processus croissant et on a, sans difficulté :

$$\mathbb{E}(e^{-pZ^n_t}) = \exp\left[t \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{1/n}^{\infty} \frac{e^{-px} - 1 + px}{x^{\alpha+1}} dx\right]$$

$$\leq \exp\left[t \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-px} - 1 + px}{x^{\alpha+1}} dx\right] .$$

D'où, par convergence étroite :

$$\mathbb{E}^0(e^{-pY^{(\alpha)}_t} \wedge M) \leq \exp\left[t \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-px} - 1 + px}{x^{\alpha+1}} dx\right]$$

pour tout $M > 0$, ce qui entraîne (*).

Dans la suite nous utiliserons encore deux résultats classiques : le premier donne l'expression du noyau potentiel du processus $Y^{(\alpha)}_t$ tué en 0 (cf [14]) ; le second caractérise le noyau de Lévy du processus $(Y^{(\alpha)}_t)_{t\geq 0}$ (cf [9], p.151 à 162).

<u>PROPOSITION 1.3</u> [14] :

<u>Pour toute fonction positive, borélienne sur</u> $\mathbb{R}_+$ <u>et pour</u> $a \geq 0$ <u>on a</u> :

$$\mathbb{E}^a\left(\int_0^{T_0} f(Y^{(\alpha)}_t) ds\right) = \int_0^{\infty} g_\alpha(a,y)\, f(y)\, dy$$

<u>avec</u> :

$$g_\alpha(a,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [y^{\alpha-1} - |y-a|^{\alpha-1}\, \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(y)].$$

PROPOSITION 1.4 :

Pour tout réel y, pour tout processus prévisible positif $(H_t)_{t\geq 0}$ et pour toute fonction positive ρ , borélienne sur $\mathbb{R}^2$, nulle sur la diagonale :

$$\mathbb{E}^y\left(\sum_{0<s} H_s\, \rho(Y_{s-}^{(\alpha)},Y_s^{(\alpha)})\right) = \mathbb{E}^y\left(\int_0^\infty ds\, H_s \int_0^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\, du}{\Gamma(2-\alpha)u^{1+\alpha}}\, \rho(Y_s^{(\alpha)},Y_s^{(\alpha)}+u)\right)$$

§ 2 - LE THEOREME DE MULTIPLICATEUR

Soit $(E,\mathcal{E},m)$ un espace mesuré de mesure m σ-finie et soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe markovien, symétrique, fortement continu sur $L^2(E,\mathcal{E},m)$. Pour pouvoir utiliser les outils probabilistes, nous supposerons que E est une partie borélienne d'un espace métrique compact et que le semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est induit sur $L^2(E,\mathcal{E},m)$ par le semi-groupe de transition $(P_t)_{t\geq 0}$ d'un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans E , vérifiant les hypothèses droites (cf [17] ou [8]). Notons que P.A. Meyer a montré dans [12] comment, dans le cas général, on pouvait se ramener à ce type d'hypothèses.

A partir de la représentation spectrale du semi-groupe :

$$P_t = \int_{[0,\infty[} e^{-t\lambda}\, dE_\lambda$$

on définit, pour toute fonction M borélienne bornée sur $\mathbb{R}^+$, un opérateur T_M , borné sur L^2 , en posant :

$$T_M = \int_{[0,\infty[} M(\lambda)\, dE_\lambda\ .$$

Pour un réel $\alpha \in [1,2]$, notons $\mathcal{L}_\alpha$ la classe des fonctions M de la forme :

$$M(\lambda) = \mathbb{1}_{\{\lambda>0\}}\lambda \int_0^\infty r(y)\, y^{\alpha-1}\, e^{-y\lambda^{1/\alpha}}\, dy$$

où r(y) est une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$. Un calcul simple, utilisant les lois stables sur $\mathbb{R}_+$, permet de montrer que si $\alpha \leq \beta$, $\mathcal{L}_\alpha$ contient $\mathcal{L}_\beta$. L'objet de ce paragraphe est de donner une démonstration probabiliste du résultat suivant :

THEOREME 2.1 :

Si $\alpha \in]1,2[$ *et si* $M \in \mathcal{L}_\alpha$, *l'opérateur* :

$$T_M = \int_{]0,+\infty[} M(\lambda)\, dE_\lambda$$

définit un opérateur linéaire borné sur $L^p(E,\mathcal{E},m)$ *pour tout* $p \in]1,+\infty[$.

Cet énoncé généralise celui de N. Varopoulos [16], (qui a traité le cas $\alpha = 2$) mais sans atteindre le théorème de Stein [15], qui correspond à $\alpha = 1$. Notons aussi que, par une méthode analytique (méthode de "transfert"), M. G. Cowling a obtenu dans [6] un théorème de multiplicateur, avec des hypothèses plus faibles à la fois pour la fonction M et pour le semi-groupe.

Introduisons, avec les notations usuelles, la réalisation canonique $(\Omega,\mathcal{F}^\mu_t, \mathbb{P}^\mu, X_t)$ du processus droit X_t . Nous notons $\bar{E}$ le compactifié de Ray de E ; Ω est alors l'espace des applications de $\mathbb{R}_+$ dans E, continues à droite pour la topologie de E et pour celle de $\bar{E}$, pourvues de limites à gauche dans $\bar{E}$ (cf [17] ou [8], chap. X et XI). Pour introduire un processus stable $(Y_t^{(\alpha)})$ indépendant de (X_t) posons : $\hat{\Omega} = \Omega \times \Omega^Y$. Pour toute loi μ sur E et pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la mesure $\hat{\mathbb{P}}^{\mu}{}^{a} = \mathbb{P}^\mu \otimes \mathbb{P}^a$ définit sur $\hat{\Omega}$ (muni des tribus produits) une loi de probabilité pour laquelle $Z_t = (X_t, Y_t^{(\alpha)})$ est un processus de Markov de semi-groupe de transition $(P_t \otimes \pi_t^{(\alpha)})_{t\ 0}$, de loi initiale : $\mu_a = \mu \otimes \varepsilon_a$. $(\hat{\mathcal{F}}^{\mu}{}^{a}_t)_{t \geq 0}$ désignera la filtration usuelle dûment complétée pour $\hat{\mathbb{P}}^{\mu}{}^{a}$.

Suivant une démarche parallèle à celle de [10], [16] nous allons étudier le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ en l'arrêtant au temps :

$$T_0 = \inf \{t \geq 0 \,|\, Y_t^{(\alpha)} = 0\} .$$

Dans cette étude, apparaîtra le semi-groupe subordonné à (P_t) par le semi-groupe stable unilatéral d'ordre $1/\alpha$, défini par :

$$Q_y^{(\alpha)} = \int \sigma_y^{(\alpha)}(ds)\ P_s \qquad y \geq 0$$

où $\sigma_y^{(\alpha)}$ est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$, de transformée de Laplace :

$$\int e^{-ps}\sigma_y^{(\alpha)}(ds) = e^{-yp^{1/\alpha}}$$

D'après la proposition 1.1, $\sigma_y^{(\alpha)}$ est la loi de T_0 sous $\hat{\mathbb{P}}^{\mu}{}^{y}$, quelle que soit la mesure μ (indépendance des processus). On voit facilement que $\sigma_y^{(\alpha)}$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue,

pour $y > 0$:

$$\sigma_y^{(\alpha)}(ds) = \rho_y^{(\alpha)}(s)\, ds ,$$

avec

$$\rho_y^{(\alpha)}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isu}\, e^{-y|u|^{1/\alpha}(\cos\frac{\pi}{2\alpha} + i\,\mathrm{sgn}(u)\sin\frac{\pi}{2\alpha})}\, du .$$

Notons enfin qu'en représentation spectrale, on a :

$$Q_y^{(\alpha)} = \int_{[0,+\infty[} dE_\lambda\, e^{-y\lambda^{1/\alpha}} .$$

Le semi-groupe $(Q_y^{(\alpha)})$ va jouer le rôle tenu dans [10] par le "semi-groupe de Cauchy" associé à P_t .

Pour une fonction f mesurable bornée sur E, posons, pour $x \in E$ et $y \geq 0$: $F_{(x,y)}^{(\alpha)} = Q_y^{(\alpha)}f(x)$. On voit facilement que : $F_{(x,y)}^{(\alpha)} = \mathbb{E}^{(x,y)}(f(X_{T_0}))$.

<u>Notations</u> : <u>Dans la suite pour alléger les écritures nous n'indiquons plus systématiquement la dépendance en</u> α <u>et notons</u> Y_t <u>pour</u> $Y_t^{(\alpha)}$, Q_t <u>pour</u> $Q_t^{(\alpha)}$, <u>etc</u>...

En raisonnant exactement comme dans [10] (p.130-132) et en utilisant la proposition 1.3, on obtient sans peine la proposition suivante :

<u>PROPOSITION 2.2</u> :

i) <u>Le processus défini par</u> : $M_t^f = F(X_{t\wedge T_0}, Y_{t\wedge T_0})$ <u>est une martingale sous toute loi</u> $\hat{\mathbb{P}}^{\mu_a}$.

ii) <u>La loi de</u> X_{T_0} <u>sous la mesure</u> $\hat{\mathbb{P}}^{m_a}$ <u>est</u> m.

iii) <u>Pour toute fonction</u> j <u>borélienne positive sur</u> $E \times \mathbb{R}_+$, <u>on a</u> :

$$\mathbb{E}^{m_a}\left[\int_0^{T_0} j(X_s, Y_s)ds \,|\, X_{T_0}\right] = \int_0^{\infty} g_\alpha(a,y)\, Q_y(j(\cdot,y))(X_{T_0})dy .$$

Nous allons montrer que la martingale M^f est continue à droite et préciser ses sauts. Pour cela, nous aurons besoin de définir F sur $\overline{E} \times \mathbb{R}_+$. Soit $\overline{f}$ la fonction définie sur $\overline{E}$ en posant : $\overline{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\overline{f}(x) = 0$ si $x \in \overline{E} \setminus E$ et soit $(\overline{P}_t)$ le semi-groupe de transition associé à (P_t), défini sur $\overline{E}$ (cf [17] p. 154). La fonction $\overline{f}$ est universellement mesurable bornée et on peut poser, pour $(x,y) \in \overline{E} \times \mathbb{R}_+$: $\overline{F}_{(x,y)} = \overline{Q}_y \overline{f}(x) = \int \sigma_y(ds)\, \overline{P}_s \overline{f}(x)$.

Il est clair que la fonction ainsi définie prolonge F et nous la noterons encore F.

PROPOSITION 2.3 :

Pour toute loi $\hat{\mathbb{P}}^{\mu_a}$, *la martingale* (M_t^f) *est continue à droite et* $\Delta M_t^f = (F(X_t, Y_t) - F(X_{t-}, Y_{t-}))\, \mathbb{1}_{\{t \leq T_0\}}$ *à une indistingabilité près*.

Nous aurons besoin de deux lemmes, concernant la regularité des fonctions $y \mapsto F_{(x,y)}$ et $x \mapsto F_{(x,y)}$ respectivement, analogues au lemme 5 de [10](p.153).

LEMME 2.4 :

Pour tout $y_0 > 0$, *la fonction* $y \mapsto F_{(x,y)}$ *est continue sur* $[y_0, +\infty[$, *uniformément en* x.

Démonstration :

On peut démontrer plus (et c'est nécessaire pour le paragraphe 3). En partant de résultats classiques sur l'holomorphie des semi-groupes subordonnés (cf [18]) ou en raisonnant directement sur l'expression de ρ_y, on montre que l'application de $[0,+\infty[$ dans $L^1(\mathbb{R}_+, ds)$ qui à y associe ρ_y admet un prolongement analytique borné, défini dans un cône ouvert contenant l'axe des réels positifs. On en déduit sans peine que l'application $y \mapsto F(x,y)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout entier n, l'application : $(x,y) \mapsto \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(x,y)$ est uniformément bornée sur $E \times [y_0, +\infty[$, pour tout $y_0 > 0$.

LEMME 2.5 :

Pour tout $y > 0$ l'application $x \mapsto F(x,y)$ est régulière sur les trajectoires de (X_t) : pour toute loi μ et pour $\mathbb{P}^\mu$ presque tout ω, l'application $t \mapsto F(X_t(\omega),y)$ est continue à droite et pourvue de limites à gauche vérifiant :

$$F(X_t(\omega),y)_- = F(X_{t^-}(\omega),y).$$

Démonstration :

Notons $\overline{U}_p$ la résolvante du semi-groupe $\overline{P}_t$. Il suffit de montrer que la fonction $F_y : x \mapsto F(x,y)$ peut s'écrire : $F_y = \overline{U}_p\,\overline{g}$ pour un $p > 0$ et pour une fonction $\overline{g}$ universellement mesurable bornée ([8] p.34). On montre tout d'abord (comme dans [10] p.154) que la fonction $t \mapsto \overline{P}_t F_y(x)$ est dérivable à droite sur $[0,\infty[$. Notant $\overline{f}$ le prolongement de f, égal à 0 sur $\overline{E} \setminus E$, on a en effet, pour $t \geqq 0$ et $h > 0$:

$$\frac{\overline{P}_{t+h} F_y(x) - \overline{P}_t F_y(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \rho_y(s)\, \overline{P}_{s+t+h}\overline{f}(x)\, ds - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \rho_y(s)\, \overline{P}_{s+t}\overline{f}(x)\, ds$$

$$= \int_h^{+\infty} \left(\frac{\rho_y(s-h) - \rho_y(s)}{h}\right) \overline{P}_{s+t}\overline{f}(x)\, ds - \frac{1}{h}\int_0^h \rho_y(s)\, \overline{P}_{s+t}\overline{f}(x)\, ds$$

Le second terme tend vers 0 quand h tend vers 0 car ρ_y est continue, nulle en 0. Pour le premier terme, on peut utiliser la forme explicite de $\frac{d\rho_y}{ds}$, pour appliquer le théorème de convergence dominée. On a alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{P}_{t+h} F_y(x) - \overline{P}_t F_y(x)}{h} = -\int_0^\infty \frac{d\rho_y}{ds}(s)\, \overline{P}_s\overline{P}_t\, \overline{f}(x)\, ds$$

Il en résulte que la fonction $t \mapsto \overline{P}_t F_y(x)$ est dérivable à droite pour tout x et que sa dérivée à droite est égale à $\overline{P}_t\,\overline{g}_y(x)$, en notant $\overline{g}_y$ la fonction universellement mesurable bornée définie par :

$\overline{g}_y(x) = -\int_0^\infty \frac{d\rho_y}{ds}(s)\, \overline{P}_s\, \overline{f}_{(x)}\, ds$. Un raisonnement du même type montre que

cette dérivée à droite est continue, ce qui entraîne que la fonction $\overline{P}_\cdot F_y(x)$ est de classe C^1. On voit alors immédiatement que :

$\overline{U}_p(pF_y - \overline{g}_y) = F_y$, pour tout $p > 0$.

Démonstration de la proposition 2.3 :

Pour s positif ou nul et $t \geq s$, on a :

$$M_t^f - M_s^f = F(X_{t\wedge T_0}, Y_{t\wedge T_0}) - F(X_{s\wedge T_0}, Y_{s\wedge T_0})$$

$$= F(X_{t\wedge T_0}, Y_{t\wedge T_0}) - F(X_{t\wedge T_0}, Y_{s\wedge T_0}) + F(X_{t\wedge T_0}, Y_{s\wedge T_0}) - F(X_{s\wedge T_0}, Y_{s\wedge T_0})$$

Quand $t \to s$, les deux termes du second membre tendent vers 0 , $\hat{\mathbb{P}}^{\mu_a}$ p.s., par l'application des lemmes 2.4 et 2.5, ce qui donne la continuité à droite. On raisonne de façon semblable pour les limites à gauche.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de multiplicateur.

Démonstration du théorème 2.1 :

Considérons une fonction f, borélienne bornée sur E et prenons pour mesure initiale du processus (Z_t) , une mesure μ_a avec $a > 0$ et μ, probabilité sur E, absolument continue par rapport à m. Construisons maintenant la projection de la martingale (M_t^f) sur l'espace des martingales de carré intégrable, purement discontinues, nulles en 0, continues en dehors des temps de sauts de (Y_t) (cf [11] chapitre II). On peut trouver une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, totalement inaccessibles, à graphes disjoints, épuisant les temps de saut de $(Y_t)_{t\geq 0}$. Posons :

$$A_t^n = \Delta M_{T_n}^f \, \mathbb{1}_{\{t \geq T_n\}}$$

et notons (M_t^n) la martingale compensée du processus à variation intégrable A_t^n (cf [11] chapitre I) : $M_t^n = \overset{c}{A_t^n}$. Les martingales $M^1,..,M^n,...$ sont purement discontinues, deux à deux orthogonales (au sens fort). De plus :

$$\mathbb{E}^{\mu_a}(\sum_n M^n)^2 \leq \mathbb{E}^{\mu_a}(\sum_{s>0} \Delta M_s^2) \leq \mathbb{E}^{\mu_a}(M_\infty^2) \; .$$

La série $\sum_n M^n$ est donc convergente dans l'espace des martingales de carré intégrable. Sa somme, que nous noterons (U_t^f) , est une martingale purement discontinue, nulle en 0.

Notons que les temps de sauts de X_t sont indépendants des temps de sauts de Y_t. Les temps de sauts de Y_t sont totalement inaccessibles et ont par conséquent, des lois diffuses. On en déduit que leurs graphes ne rencontrent pas ceux des temps de sauts de (X_t) ($\mathbb{P}^{\mu_a}$ p.s.). Il en résulte que les processus ΔU_t^f et $\mathbb{1}_{\{t \leq T_0\}}(F(X_t, Y_t) - F(X_t, Y_{t-}))$ sont indistinguables.

On fait maintenant jouer à U_t^f le même rôle que la projection sur le mouvement brownien utilisée dans [16]. L'inégalité :

$$[U^f, U^f]_\infty = \sum_{s>0} (\Delta U_s^f)^2 \leq [M,M]_\infty ,$$

jointe à l'inégalité de Burkholder, entraîne :

$$\mathbb{E}^{\mu_a} |U_\infty^f|^p \leq C_p \ \mathbb{E}^{\mu_a} |M_\infty^f|^p \quad , \quad \text{pour} \quad 1 < p < \infty$$

avec C_p ne dépendant que de p. Pour une fonction r, borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$, introduisons la martingale :

$$V_t = \int_0^t r(Y_{s-})\, d U_s^f .$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Burkholder montre que :

$$\mathbb{E}^{\mu_a} |V_\infty|^p \leq C'_p \ \mathbb{E}^{\mu_a} |M_\infty^f|^p \quad , \quad 1 < p < \infty .$$

Si m est une mesure bornée, on peut remplacer μ_a par m_a. Si m est seulement σ-finie, on peut définir (V_t) en décomposant l'espace E, à l'aide d'une partition formée d'ensembles boréliens de m-mesure finie comme dans [16] et écrire également :

$$1 < p < \infty \qquad (\mathbb{E}^{m_a} |V_\infty|^p)^{1/p} \leq K_p (\mathbb{E}^{m_a} |M_\infty^f|^p)^{1/p}$$

ce qui entraîne que : $$\| \mathbb{E}^{m_a}(V_\infty | X_{T_0}) \|_p \leq K_p (\mathbb{E}^{m_a} |M_\infty^f|^p)^{1/p}$$
$$= K_p (\mathbb{E}^{m_a} |f(X_{T_0})|^p)^{1/p}$$
$$= K_p \| f \|_p$$

puisque la loi de X_{T_0} est m. Nous supposons à partir de maintenant que f est nulle en dehors d'un ensemble de m-mesure finie.

On a alors, pour toute fonction φ, borélienne bornée sur E, nulle en dehors d'un ensemble de m-mesure finie, telle que $\int |\varphi(x)|^{p'}\, dm(x) \leq 1$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

(1) $$| \mathbb{E}^{m_a}(V_\infty\, \varphi(X_{T_0})) | \leq K_p \| f \|_p .$$

Pour calculer le premier membre de cette inégalité, posons :

$$\Phi(x,y) = Q_y\varphi(x) \quad \text{et} \quad W_t = \Phi(X_{t\wedge T_0}, Y_{t\wedge T_0}) \ : \ (W_t)$$

est donc la martingale (M_t^φ) et on a :

$$\mathbb{E}^{m_a}(V_\infty\, \varphi(X_{T_0})) = \mathbb{E}^{m_a}(V_\infty W_\infty)$$

$$= \mathbb{E}^{m_a}(\sum_{s>0} \Delta W_s \Delta V_s)$$

puisque la martingale (V_t) est purement discontinue, nulle en 0. Nous avons, à une indistinguabilité près, les égalités suivantes :

$$\Delta V_s = r(Y_{s-})\, \Delta U_s^f = \mathbb{1}_{\{0<s\leq T_0\}}\, r(Y_{s-})\, (F(X_s,Y_s) - F(X_s,Y_{s-}))$$

$$\Delta V_s \Delta W_s = \mathbb{1}_{\{0<s\leq T_0\}}\, r(Y_{s-})(F(X_s,Y_s) - F(X_s,Y_{s-}))(\Phi(X_s,Y_s) - \Phi(X_{s-},Y_{s-}))$$

$$= \mathbb{1}_{\{0<s\leq T_0\}}\, r(Y_{s-})(F(X_s,Y_s) - F(X_s,Y_{s-}))(\Phi(X_s,Y_s) - \Phi(X_s,Y_{s-}))$$

car les temps de sauts de (Y_s) sont des temps de continuité pour (X_s). D'où :

$$\mathbb{E}^{m_a}(V_\infty\, \varphi(X_{T_0})) = \mathbb{E}^{m_a}(\sum_{0<s\leq T_0} r(Y_{s-})(F(X_s,Y_s) - F(X_s,Y_{s-}))(\Phi(X_s,Y_s) - \Phi(X_s,Y_{s-})))$$

$$= \mathbb{E}^{m_a}(\sum_{0<s\leq T_0} \Lambda(X_s,Y_{s-},Y_s))$$

en posant, pour $(x,y_1,y_2) \in E \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$\Lambda(x,y_1,y_2) = r(y_1)(F(x,y_2) - F(x,y_1))(\Phi(x,y_2) - \Phi(x,y_1)).$$

Terminons le calcul sans nous préoccuper, pour le moment, des justifications techniques. En prenant une espérance conditionnelle par rapport à Y et en utilisant l'invariance de m par le semi-groupe (P_t), puis le noyau de Lévy de (Y_t) (proposition 1.4), on obtient :

$$\mathbb{E}^{m_a}(V_\infty \varphi(X_{T_0})) = \int m(dx)\, \mathbb{E}^{(x,a)}\big(\mathbb{E}^{(x,a)}\big(\sum_{0<s\leqq T_0} \Lambda(X_s, Y_{s-}, Y_s) \,|\, Y\big)\big)$$

$$= \int m(dx)\, \mathbb{E}^{a}\big(\sum_{0<s\leqq T_0} \Lambda(x, Y_{s-}, Y_s)\big)$$

$$= \int m(dx)\, \mathbb{E}^{a}\Big(\int_0^{T_0} ds \int_0^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{du}{u^{1+\alpha}} \Lambda(x, Y_s, Y_s+u)\Big)$$

D'où, par la proposition 1.3 :

$$\mathbb{E}^{m_a}(V_\infty\, \varphi(X_{T_0})) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int m(dx) \int_0^{+\infty} dy\, g_\alpha(a,y) \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\alpha}} \Lambda(x,y,y+u)\ .$$

Notant $<,>$ le produit scalaire dans $L^2(E, \mathcal{E}, m)$, on peut écrire :

$$\mathbb{E}^{m_a}(V_\infty \varphi(X_{T_0})) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} dy\, g_\alpha(a,y) r(y) \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\alpha}} < Q_{y+u}\varphi - Q_y\varphi,\ Q_{y+u}f - Q_y f >$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} dy\, g_\alpha(a,y) r(y) \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\alpha}} < \varphi, Q_{2y+2u}f - 2Q_{2y+u}f + Q_{2y}f >,$$

compte-tenu de la symétrie du semi-groupe $(Q_y)_{y\geqq 0}$ par rapport à m.
En représentation spectrale, on peut écrire :

$$Q_{2y+2u}f - 2Q_{2y+u}f + Q_{2y}f = \int_{[0,+\infty[} e^{-2y\lambda^{1/\alpha}}(e^{-u\lambda^{1/\alpha}}-1)^2 d\, E_\lambda f.$$

D'où :

$$\mathbb{E}^{m_a}(V_\infty \varphi(X_{T_0})) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{\infty} dy\, g_\alpha(a,y) r(y) \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\alpha}} \int_{[0,+\infty[} e^{-2y\lambda^{1/\alpha}}(e^{-u\lambda^{1/\alpha}}-1)^2 d<E_\lambda f, \varphi>$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{\infty} dy\, g_\alpha(a,y) r(y) \int_{[0,+\infty[} d<E_\lambda f, \varphi> \lambda e^{-2y\lambda^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{1+\alpha}} (e^{-v}-1)^2$$

$$(2) \quad \mathbb{E}^{m_a}(V_\infty \varphi(X_{T_0})) = \frac{(2^{\alpha-1}-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} dy\, g_\alpha(a,y) r(y) \int_{[0,+\infty[} d<E_\lambda f, \varphi> \lambda e^{-2y\lambda^{1/\alpha}}$$

Notons que pour justifier tous ces calculs il suffit de montrer que :

$$\mathbb{E}^{m_a}\Big(\sum_{0<s\leqq T_0} |F(X_s, Y_s) - F(X_s, Y_{s-})|\, |\Phi(X_s, Y_s) - \Phi(X_s, Y_{s-})|\Big) < \infty$$

ce qui résulte immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du fait que les martingales M^f et M^φ sont dans L^2.

En reportant l'expression (2) dans l'inégalité (1) on obtient :

$$| < T_{a,M} f, \varphi > | \leqq K_p \frac{\Gamma(\alpha)}{2^{\alpha-1}-1} \| f \|_p$$

en notant $T_{a,M}$ le multiplicateur associé à la fonction :

$$M_a(\lambda) = \lambda \int_0^\infty dy\, r(y)\, g_\alpha(a,y)\, e^{-2y\lambda^{1/\alpha}}$$

et le théorème 2.1 s'obtient en faisant tendre a vers l'infini.

§ 3 - LES FONCTIONS DE LITTLEWOOD-PALEY

Dans [10] et [12] certaines inégalités de Littlewood-Paley sont obtenues à partir de l'inégalité de Burkholder et de la formule d'Ito. Nous allons indiquer quelles inégalités on obtient en appliquant cette méthode dans le cadre de notre étude. Les inégalités "radiales" sont déjà contenues dans le travail de Stein [15] mais les inégalités "complètes" semblent nouvelles.

1) Fonctions "radiales"

PROPOSITION 3.1 :

Le processus $< M^f, M^f >$ vérifie :

$$< M^f, M^f >_t \geqq \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{T_0 \wedge t} ds \int_0^\infty \frac{du}{u^{1+\alpha}} (F(X_s, Y_s+u) - F(X_s, Y_s))^2$$

Démonstration :

On a : $$[M^f, M^f]_t \geqq \sum_{T_0 \wedge t \geqq s > 0} (F(X_s, Y_s) - F(X_s, Y_{s-}))^2 .$$

En prenant les projections duales prévisibles des deux membres et en utilisant le noyau de Lévy, on obtient la proposition.

Définissons alors la fonction de Littlewood-Paley $G_\alpha^{\rightarrow}$:

$$G_\alpha^{\rightarrow}(f)(x) = \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^\infty dy\, y^{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{(F^{(\alpha)}(x,y+u) - F^{(\alpha)}(x,y))^2}{u^{1+\alpha}}\, du\right]^{1/2}$$

Nous dirons, selon la terminologie de [10], qu'une fonction $f \in L^p$ est "sans partie invariante" si $\frac{1}{t} \int_0^t P_s f \to 0$ dans L^p quand $t \to \infty$. La méthode de P.A. Meyer donne alors le résultat suivant :

THEOREME 3.2 :

Pour $p \in]1,+\infty[$, il existe des constantes c_p et c'_p telles que :

i) $\forall\, f \in L^p$ $\qquad \| G_\alpha^{\rightarrow}(f) \|_p \leq c_p \| f \|_p$.

ii) Pour toute fonction $f \in L^p$, sans partie invariante :

$$(\alpha-1) \| f \|_p \leq c'_p \| G_\alpha^{\rightarrow}(f) \|_p$$

Notons que les constantes c_p et c'_p ne dépendent pas de $\alpha \in]1,2[$.

Remarque 3.3 :

Ces inégalités sont plus faibles que l'inégalité générale de Stein ([12] p.111). Un calcul simple montre en effet que :

$$G_\alpha^{\rightarrow}(f) \leq 2\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}} \left(\int_0^{+\infty} y\left(\frac{\partial Q_y^{(\alpha)} f}{\partial y}\right)^2 dy\right)^{1/2}.$$

Cette majoration par la "fonction g de Littlewood-Paley-Stein" du semi-groupe $Q_y^{(\alpha)}$ permet en particulier, pour α voisin de 1, une estimation plus précise de $\| G_\alpha^{\rightarrow}(f) \|_p$ que le théorème 3.2 .

Démonstration du théorème 3.2 :

On procède comme dans [10]:

a) Le cas $p = 2$ se traîte à l'aide de la représentation spectrale. On obtient, pour f sans partie invariante :

$$\| G_\alpha^{\rightarrow}(f) \|_2 = \sqrt{\frac{(2^{\alpha-1}-1)\Gamma(\alpha)}{2^{\alpha-1}}}\, \| f \|_2$$

ce qui permet de déduire ii) de i).

b) Le cas $p > 2$ se traîte à partir de la proposition 3.1 en utilisant l'inégalité de Burkholder et la proposition 2.2 .

c) Donnons un peu plus de détails pour le cas $p < 2$:
On suppose f positive et on applique la formule d'Ito à la martingale M_t^f et à la fonction $u \mapsto (u+\varepsilon)^p$, pour $\varepsilon > 0$, comme dans [10] p.168.
Après intégration, on obtient, en ne gardant que les termes de sauts :

$$\mathbb{E}^{(x,a)}(M_t^f+\varepsilon)^p \geqq \mathbb{E}^{(x,a)}\Big(\sum_{0<s\leqq t} (M_s^f+\varepsilon)^p - (M_{s-}^f+\varepsilon)^p - p(M_{s-}^f+\varepsilon)^{p-1}(M_s^f-M_{s-}^f)\Big)$$

pour $(x\ a) \in E \times \mathbb{R}_+$.
D'où en faisant tendre ε vers 0 et t vers l'infini :

$$\mathbb{E}^{(x,a)}(f(X_{T_0}))^p \geqq \mathbb{E}^{(x,a)}\left(\sum_{0<s\leqq T_0} (M_s^f)^p - (M_{s-}^f)^p - p(M_{s-}^f)^{p-1}(M_s^f - M_{s-}^f)\right) .$$

Les termes de sauts étant positifs, on diminue le second membre en ne gardant que les temps de discontinuité de (Y_t), de sorte que :

(2)

$$\mathbb{E}^{(x,a)}(f(X_{T_0}))^p \geqq \mathbb{E}^{(x,a)}\Big(\sum_{0<s\leqq T_0} F^p(X_s,Y_s) - F^p(X_s,Y_{s-}) - pF^{p-1}(X_s,Y_{s-})(F(X_s,Y_s)-F(X_s,Y_{s-}))\Big)$$

Posons maintenant : $F^*(x) = \sup_{y\geqq 0} |Q_y f(x)|$.
En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction $u \mapsto u^p$ et en utilisant le fait que p est inférieur à 2, on voit que :

$$F^p(x,y_2) - F^p(x,y_1) - pF^{p-1}(x,y_1)(F(x,y_2) - F(x,y_1))$$

$$\geqq \frac{p(p-1)}{2} (F^*(x))^{p-2}(F(x,y_2) - F(x,y_1))^2$$

pour $(x,y_1,y_2) \in E \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
D'où, en intégrant l'inégalité (2) par rapport à m :

$$\| f\|_p^p \geqq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}^{m_a}\Big(\sum_{0<s\leqq T_0} F^{*p-2}(X_s)\,(F(X_s,Y_s) - F(X_s,Y_{s-}))^2\Big).$$

En utilisant l'invariance de m par P_t, le noyau de Lévy et la proposition 1.3, on obtient, après avoir fait tendre a vers l'infini :

$$\| f \|_p^p \geq \frac{p(p-1)}{2} \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \int m(dx)\, F^{*}(x)^{p-2} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} dy \int_0^{\infty} \frac{(F(x,y+u)-F(x,y))^2}{u^{1+\alpha}} du$$

On conclut exactement comme dans [10] en utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que :

$$\| F^* \|_p \leq c_p \| f \|_p \text{ , pour } 1 < p < \infty$$ (cf, par exemple, [15] p106-107)

2) Fonctions complètes

Notons $(A, \mathfrak{D}(A))$ le générateur infinitésimal étendu du semi-groupe (P_t) (défini comme dans [10] p.142). Nous supposons maintenant que (P_t) admet un opérateur carré du champ, c'est-à-dire que $\mathfrak{D}(A)$ est une algèbre. L'opérateur carré du champ est alors défini sur $\mathfrak{D}(A) \times \mathfrak{D}(A)$ par la relation : $\Gamma_{\dagger}(f,g) = A(f\, g) - fA(g) - gA(f)$.

On peut alors calculer le processus $< M^f, M^f >$, sous toute loi $\hat{\mathbb{P}}^m_a$, comme dans [10].

PROPOSITION 3.4 :

On a, à une $\hat{\mathbb{P}}^m_a$-indistinguabilité près :

$$< M^f, M^f >_t = \int_0^{t\wedge T_0} \Gamma(F^{(\alpha)}, F^{(\alpha)})(X_s, Y_s^{(\alpha)}) ds$$

avec :

$$\Gamma(F^{(\alpha)}, F^{(\alpha)})(x,y) = \Gamma_{\dagger}(F_y^{(\alpha)}, F_y^{(\alpha)})(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1+\alpha}} (F^{(\alpha)}(x,y+u) - F^{(\alpha)}(x,y))^2 .$$

Cette proposition se démontre exactement comme dans [10] (théorème 4 p.158). On utilise notamment les démonstrations des lemmes 2.4 et 2.5 pour montrer que :

$$A_x F^{(\alpha)}(.,y) + B_y^{(\alpha)} F^{(\alpha)}(x,.) = 0.$$

Introduisons maintenant deux fonctions de Littlewood-Paley "complètes", analogues aux fonctions $G(f)$ et $H(f)$ de [12] :

$$G_\alpha(f) = \left(\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\, \Gamma(F^{(\alpha)},F^{(\alpha)})(.,y)\, dy\right)^{1/2}$$

$$H_\alpha(f) = \left(\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\, Q_y^{(\alpha)}\left[\Gamma(F^{(\alpha)},F^{(\alpha)})(.,y)\right] dy\right)^{1/2}$$

On peut, comme dans [12] p.155, définir ces fonctions lorsque f prend ses valeurs dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ (en choisissant, par exemple, une base orthonormée).

THEOREME 3.5 :

i) Pour $p \geqq 2$, il existe une constante C_p telle que, pour toute fonction $f \in (L^2 \cap L^\infty) \otimes \mathcal{H}$:

$$\|H_\alpha(f)\|_p \leqq C_p \|f\|_{L^p(\mathcal{H})}.$$

ii) Si $(P_y)_{y \geqq 0}$ est un semi-groupe de diffusion (au sens de [12]) et si $p \in]1,2]$, il existe une constante C_p telle que, pour toute fonction $f \in (L^1 \cap L^\infty) \otimes \mathcal{H}$:

$$\|G_\alpha(f)\|_p \leqq C_p \|f\|_{L^p(\mathcal{H})}.$$

Démonstration :

La méthode est exactement celle de [12]. La première inégalité s'obtient à partir de la proposition 3.4 en utilisant l'inégalité de Burkholder et la proposition 2.2. Pour la seconde inégalité, on écrit une formule d'Ito (cf [12], p.157-158) qui fait apparaître les crochets $\langle M^{fc},M^{fc}\rangle$ de la martingale associée à f (ou à ses coordonnées). Compte-tenu du fait que (P_y) est une diffusion, on voit que $M^{fc} = M^f - U^f$ (avec les notations de la démonstration du théorème 2.1). Et on peut alors, à l'aide de la proposition 3.4, achever le raisonnement comme dans [12].

Dans [12] les inégalités "complètes" sont utilisées pour montrer, sous certaines hypothèses, l'équivalence des normes $\|\sqrt{\Gamma_t(f,f)}\|_p$ et $\|\sqrt{-A}\, f\|_p$ ("problème des transformées de Riesz"). Les résultats de Meyer sur les semi-groupes de convolution [12] et le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck [13] ont été généralisés par Bakry dans [1].

Nous nous plaçons maintenant sous des hypothèses permettant des démonstrations simples. Ce sont les hypothèses de Bakry [1] p.173 : on suppose que $\Gamma_\dagger(f,f)$ peut se mettre sous la forme $\sum_i (K_i f)^2$, les opérateurs (K_i) laissant stable l'algèbre $\mathscr{B}$ des bonnes fonctions de [1] et vérifiant : $[A,K_i] = hK_i$, où h est une fonction positive. Ces hypothèses sont vérifiées par les semi-groupes de convolution sur $\mathbb{R}^d$ (h=0) et par le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension finie ou infinie (h=1).

Elle permettent des démonstrations assez simples utilisant les inégalités de Littlewood-Paley pour les semi-groupes sous-markoviens symétriques, dues à Coifmann-Rochberg-Weiss [4] (cf [1] p.173-174). On peut alors énoncer le résultat suivant :

THEOREME 3.6 :

Si le semi-groupe de diffusion P_t vérifie les hypothèses précédentes et si $p \geqslant 2$, il existe une constante C_p telle que :

$$\frac{1}{C_p} \left\| \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^\infty \frac{du}{u^{1+\alpha}} (Q_u^{(\alpha)} f - f)^2\right]^{\frac12} \right\|_p \leq \|\sqrt{-A}f\|_p \leq \frac{C_p}{\alpha-1} \left\| \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^\infty \frac{du}{u^{1+\alpha}} (Q_u^{(\alpha)} f - f)^2\right]^{\frac12} \right\|$$

Dans cette équivalence, on peut remplacer $\|\sqrt{-A}\, f\|_p$ par $\|\sqrt{\Gamma_\dagger(f,f)}\|_p$ (cf [1]).

§ 4 - COMPLEMENTS

1) Il est à signaler que les seules propriétés utilisées de façon essentielle dans notre travail sont la positivité des sauts du processus $Y_t^{(\alpha)}$ et la finitude du temps T_0, et qu'une étude plus générale est possible. Considérons un P.A.I.S. réel (Y_t) sans diffusion et à sauts positifs :

$$\mathbb{E}^0(e^{iu Y_t}) = \exp(-t\,\phi(u))$$

avec

$$\phi(u) = -ibu + \int_1^\infty (1-e^{iux})d\nu(x) + \int_0^1 (1-e^{iux} + iux)d\nu(x)$$

où ν est une mesure positive intégrant $x^2 \wedge 1$, que nous supposerons non nulle, et b un réel quelconque. Pour $p \geq 0$, posons :

$$\tilde{\psi}(p) = b\,p + \int_1^{\infty} (1-e^{-px})d\nu(x) + \int_0^1 (1-e^{-px}-px)d\nu(x).$$

La fonction $\tilde{\psi}$ admet un prolongement analytique défini dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}z \geq 0\}$ et on peut écrire : $\psi(u) = \tilde{\psi}(-iu)$. En raisonnant exactement comme dans le paragraphe 1, on montre que pour tout réel $p \geq 0$:

$$\mathbb{E}^0(\exp(-pY_t)) = \exp(-t\,\tilde{\psi}(p))$$

et que le processus : $M_t = \exp[-pY_t + t\,\tilde{\psi}(p)]$ est une martingale sous la loi $\mathbb{P}^0$.

La fonction $\tilde{\psi}$ est strictement concave, nulle en 0 : ou bien elle est positive (et croissante), ou bien elle prend des valeurs négatives et il existe un réel $q_0 \geq 0$ tel que : $\tilde{\psi}(p) \geq 0$ si $p \in [0,q_0]$ et $\tilde{\psi}(p) < 0$ si $p \in]q_0,+\infty[$.

a) La fonction $\tilde{\psi}$ est positive : alors $\mathbb{E}^0(e^{-pY_t}) \leq 1$, $\forall p > 0$, ce qui entraîne : $\mathbb{P}^0(Y_t < 0) = 0$. Les trajectoires sont presque sûrement croissantes et donc, avec les notations du paragraphe 1 : $\mathbb{P}^y(T_0 = \infty) = 1$, pour tout $y > 0$. Il est clair que la méthode de Meyer-Varopoulos ne peut s'appliquer.

b) La fonction $\tilde{\psi}$ prend des valeurs négatives : alors, pour un réel p tel que $\tilde{\psi}(p) < 0$ (c'est-à-dire pour $p > q_0$), la martingale $\exp[-pY_t + t\,\tilde{\psi}(p)]$, arrêtée au temps T_{-y} $(y > 0)$, est uniformément bornée sous la loi $\mathbb{P}^0$ et on en déduit que :

$$\forall p > q_0, \forall y > 0, \quad \mathbb{E}^0(\exp[T_{-y}\,\tilde{\psi}(p)]\, \mathbb{1}_{\{T_{-y} < \infty\}}) = e^{-py}$$

$$\text{et} \qquad \mathbb{E}^y(\exp[\tilde{\psi}(p)\,T_0]\, \mathbb{1}_{\{T_0 < \infty\}}) = e^{-py}$$

ce qui entraîne en particulier : $\mathbb{P}^y(T_0 < \infty) = e^{-q_0 y}$.

Dans le cas $q_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque $\tilde{\psi}$ est négative (comme dans le cas des processus stables à sauts positifs) on a donc : $T_0 < \infty$, $\mathbb{P}^y$ p.s.

Notons maintenant φ la réciproque de la restriction de la fonction $-\tilde{\psi}$ à $[q_0,+\infty[$, φ est définie sur $[0,+\infty[$, $\varphi(0) = q_0$ et on a :

$$\mathbb{E}^y(\exp(-pT_0)\ \mathbb{1}_{\{T_0 < \infty\}}) = \exp(-y\ \varphi(p)) .$$

Cela entraîne en particulier que φ est une fonction de Bernstein. Dans le cas $q_0 > 0$, le semi-groupe associé est un semi-groupe de sous-probabilités.

Introduisons maintenant un semi-groupe markovien symétrique (P_t) avec les hypothèses et les notations du paragraphe 2 et montrons comment, dans le cas b), on peut reprendre la méthode de Meyer-Varopoulos en remplaçant le processus $(Y_t^{(\alpha)})$ par (Y_t) :

• le prolongement "Y-harmonique" de f est défini par :

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \mathbb{E}^{x,y}(f(X_{T_0})\ \mathbb{1}_{\{T_0<\infty\}}) \\ &= Q_y\ f(x) \qquad \text{pour } (x,y) \in E \times \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

où (Q_y) est le semi-groupe subordonné à (P_t) à l'aide de la fonction de Bernstein φ ; notons que (Q_y) est sous-markovien si $q_0 > 0$ et qu'en représentation spectrale on a : $Q_y = \int_{[0,\infty[} e^{-y\ \varphi(\lambda)}\ dE_\lambda$.

• On montre sans difficulté que le processus $M_t^f = F(X_{t\wedge T_0}, Y_{t\wedge T_0})$ est une martingale. L'étude de la régularité de M^f (cf lemmes 2.4 et 2.5) semble poser des problèmes dans le cas général. Pour y échapper, nous supposerons que P_t est un semi-groupe de Feller sur E, l.c.d. : il suffit alors de prendre f continue, nulle à l'infini.

• Il reste à calculer le potentiel de Green du processus (Y_t) tué en 0. Le noyau potentiel peut se caractériser par une transformée de Laplace :

<u>PROPOSITION 4.1</u> :

<u>Pour toute fonction borélienne positive</u> j <u>sur</u> $\mathbb{R}_+$, <u>et pour</u> $y > 0$ <u>on a</u> :

$$\mathbb{E}^y\left(\int_0^{T_0} j(Y_s)\ ds\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu_y(da)\,j(a)$$

où μ_y est la mesure positive définie par sa transformée de Laplace :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mu_y(ds)\, e^{-ps} = \frac{e^{-q_0 y} - e^{-py}}{-\tilde{\phi}(p)} .$$

Par la même méthode que dans le paragraphe 2, on obtient (au moins pour les semi-groupes de Feller) le théorème de multiplicateur suivant :

THEOREME 4.2 :

Soit r une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$, soit μ la mesure positive sur $\mathbb{R}_+$ de transformée de Laplace définie pour $p > q_0$ par : $\int \mu(ds)\, e^{-ps} = \frac{1}{\varphi^{-1}(p)}$.
L'opérateur $T_M = \int_{]0,\infty[} M(\lambda)\, dE_\lambda$, défini par :

$$M(\lambda) = [\varphi^{-1}(2\varphi(\lambda)) - 2\lambda] \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dy)\, r(y)\, e^{-2y\varphi(\lambda)}$$

est borné sur tous les espaces L^p $1 < p < \infty$.

2) On peut aussi remplacer le processus $(Y_t^{(\alpha)})$ par l'opposé $(-N_t)$ d'un processus de Poisson d'intensité λ, en imposant au processus $(X_t, -N_t)$ une mesure initiale de la forme $\mu \otimes \varepsilon_n$, avec n entier positif. Le prolongement naturel de f est alors défini sur $E \times \mathbb{N}$ par la relation : $F(x,n) = \mathbb{E}^{(x,n)}(f(X_{T_0})) = (\lambda U_\lambda)^n f(x)$, (U_λ) étant la résolvante de P_t. En utilisant les mêmes outils que précédemment, on obtient, par exemple, l'inégalité suivante, valable pour $p \geq 2$:

$$\left\| \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda U_\lambda)^n \Gamma\left((\lambda U_\lambda)^n f, (\lambda U_\lambda)^n f\right) \right)^{1/2} \right\|_p \leq c_p \| f \|_p .$$

CERMA - ENPC

Ecole Nationale des Ponts
et Chaussées

La Courtine - BP 105

93194 NOISY-LE-GRAND

BIBLIOGRAPHIE :

[1] D. BAKRY, Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques, Séminaire de probabilité XIX, LNM 1123, Springer-Verlag (1985).

[2] N. BOULEAU et D. LAMBERTON, "Théorie de Littlewood-Paley et processus stables", C.R.A.S., Paris, 299 (1984) 931-934.

[3] J.L. BRETAGNOLLE, "Processus à accroissements indépendants" Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour, L.N.M. 307, Springer-Verlag (1973) 1-27.

[4] R.R. COIFMAN, R. ROCHBERG, G. WEISS, Applications of tranference : the L^p version of Von Neumann's inequality and the Littlewood-Paley-Stein theory Linear spaces and approx. pp. 53-67, Birkaüser (1978).

[5] Ph. COURREGE, "Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}^n$ et formule de Lévy-Khintchine" Bull. Sc. Math. 2e série, 88 (1964), 3-30.

[6] M.G. COWLING, "Harmonic Analysis on semi-groups" Annals of Math. 117 (1983) 267-283.

[7] W. FELLER, "An introduction to probability theory and its applications" Volume II, 2e édition, John Wiley, New-York, 1971.

[8] R.K. GETOOR,"Markov processes : Ray and Right processes", L.N.M. 440, Springer-Verlag, 1975.

[9] P.A. MEYER, "Intégrales stochastiques IV", Séminaire de Probabilités I, Strasbourg, L.N.M. 309, (1967), Springer-Verlag, 142-162.

[10] P.A. MEYER, "Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley" Séminaire de Probabilités X, Strasbourg, L.N.M. 511, (1976), 125-183.

[11] P.A. MEYER, "Un cours sur les intégrales stochastiques" Séminaire de Probabilités X, Strasbourg, L.N.M. 511, (1976), 245-400.

[12] P.A. MEYER, "Retour sur la théorie de Littlewood-Paley", Séminaire de Probabilités XV, Strasbourg, L.N.M. 850, (1981), 151-166.

[13] P.A. MEYER, "Quelques résultats analytiques sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie"
Theory and application of random fields,
Lect. Notes in control and Inform. Sc. 49 (1983), Springer.
Voir aussi P.A. MEYER, "Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes"
L.N.M. 1059, Springer (1984).

[14] S.C. PORT, "Hitting times and potentials for recurrent stable processes"
Jnal Analyse Math. 20 (1968), 371-395.

[15] E.M. STEIN, "Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory"
Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1970.

[16] N. VAROPOULOS, "Aspects of probabilistic Littlewood-Paley theory"
J. of Fnal Analysis 38 (1980) 25-60.

[17] J.B. WALSH et P.A. MEYER, "Quelques applications des résolvantes de Ray"
Invent. Math. 14 (1971) 143-166.

[18] K. YOSIDA, "Functional analysis"
3e édition, Springer-Verlag (1971).