Christophe Stricker

Lois de semimartingales et critères de compacité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 209-217
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__209_0>

Loi de semimartingales et critères de compacité .

Christophe Stricker
Université de Franche-Comté, CNRS
Equipe de Mathématiques , U.A. 741
25030 Besançon Cedex

Cet article est un complément à celui de Meyer et Zheng qui doit paraître dans les Annales de l'I.H.P. . Ces auteurs ont introduit une nouvelle topologie faible sur l'espace $\mathbb{D}$ des applications continues à droite ayant des limites à gauche de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ (l'extension à $\mathbb{R}^d$ est laissée au lecteur) . Ils ont ainsi obtenu des critères de compacité plus agréables , notamment lorsqu'il s'agit de lois de quasimartingales sur $\mathbb{D}$. Après avoir rappelé les résultats essentiels de Meyer et Zheng , nous donnons un nouveau critère de compacité des lois de semimartingales . Nous dégagerons aussi un critère de compacité pour la classe $\mathcal{S}$ étudiée dans [6] .

PSEUDO-TRAJECTOIRES .

Pour les détails concernant la notion de pseudo-trajectoire nous renvoyons le lecteur intéressé au livre [1] , chapitre IV , n° 40-46 .
Soit $\lambda(dt)$ la mesure $e^{-t}\,dt$ sur $\mathbb{R}^+$. Soit $w(t)$ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Par définition , la pseudo-trajectoire de w est la loi de probabilité image sur $[0, +\infty] \times \overline{\mathbb{R}}$ par l'application$(t \to (t, w))$. On note ψ l'application qui à w associe sa pseudo-trajectoire . ψ est injective sur $\mathbb{D}$, si bien que $\mathbb{D}$ peut être plongé grâce à ψ dans l'espace compact $\overline{\mathbb{P}}$ de toutes les lois de probabilités sur le compact $[0, +\infty] \times \overline{\mathbb{R}}$. Désormais $\mathbb{D}$ sera muni de la topologie induite et on peut montrer que cette topologie n'est autre que la topologie de la convergence en mesure sur $\mathbb{D}$ (voir [2]) .

UNE CARACTERISATION DE $\mathbb{D}$.

Soit $\mu \in \overline{\mathbb{P}}$. On pose $\mu^* = \inf\{c,\ \mu \text{ est portée par } [0, +\infty] \times [-c, c]\}$. Si μ est une pseudo-trajectoire, c'est-à-dire si $\mu = \psi(w)$, $\mu^* = \text{ess} \sup_t |w(t)|$.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des couples de rationnels (u,v) avec $u < v$. Si τ est une subdivision finie de $[0, +\infty]$, on définit pour $\mu \in \overline{\mathcal{P}}$ un entier $N_\tau^{uv}(\mu)$ par la condition :

$N_\tau^{uv}(\mu) \geq k$ si et seulement s'il existe des éléments de τ notés $0 \leq t_{i_1} < t_{i_1'} < t_{i_2} < t_{i_2'} < \dots < t_{i_k} < t_{i_k'} < +\infty$ tels que μ charge chacun des ensembles ouverts (dans $[0,+\infty] \times \overline{\mathbf{R}}$) $]t_{i_1}, t_{i_1+1}[\times [-\infty, u[$, $]t_{i_1'}, t_{i_1'+1}[\times]v, +\infty]$, $]t_{i_2}, t_{i_2+1}[\times]-\infty, u[$ ... On pose $N^{uv} = \sup_\tau N_\tau^{uv}$. Lorsque μ est la pseudo-trajectoire de w, $N^{uv}(\mu)$ est égal au nombre de montées de w par dessus $[u,v]$.

Voici la caractérisation promise [2] :

THEOREME 1. La loi de probabilités $\mu \in \overline{\mathcal{P}}$ appartient à $\mathbf{D}$ si et seulement si $\mu^* < +\infty$, $\forall (u,v) \in \mathcal{R}$, $N^{uv}(\mu) < +\infty$ et la projection de μ sur $[0,+\infty]$ est $\lambda(dt)$.

COROLLAIRE. Tout sous-ensemble A de $\mathbf{D}$ tel que $\sup_{\mu \in A} \mu^* < \infty$, $\sup_{\mu \in A} N^{uv}(\mu) < +\infty$ pour $(u,v) \in \mathcal{R}$ est relativement compact dans $\mathbf{D}$.

LOIS DE SEMIMARTINGALES.

Soit (X^n) une suite de processus càdlàg, adaptés, définis sur des espaces probabilisés filtrés $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n), P^n)$. On dit que la suite (X^n) vérifie <u>la condition</u> $(\star)$ si $\lim_{c \to \infty} P^n [|(j^n \cdot X^n)_\infty| > c] = 0$, la convergence étant uniforme lorsque n décrit $\mathbb{N}$ et j_n l'ensemble des processus $(\mathcal{F}_t^n)$-prévisibles élémentaires bornés par 1. Dans l'énoncé et la démonstration du théorème suivant nous supposerons X^n à valeurs dans $\mathbf{R}$ mais tout se transpose aisément aux semimartingales à valeurs dans $\mathbf{R}^d$.

THEOREME 2. On note P_n la loi de X^n sur $\mathbf{D}$. Si la suite (X^n) vérifie la condition $(\star)$ ci-dessus, alors les lois P_n sont des lois de semimartingales tendues sur $\mathbf{D}$ et toutes les lois limites de la suite (P_n) sont des lois de semimartingales.

DEMONSTRATION . D'après le théorème 1 et son corollaire, il suffit, pour que P_n soit tendue sur $\mathbb{D}$, de montrer que $P_n[N^{uv} > c]$ et que $P_n[X^* > c]$ tendent <u>uniformément</u> vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$. Soit $T = \inf\{t, |X_t| \geq c\}$. On a $\{X^* \geq c\} = \{|(1_{[0,T]} \cdot X)_\infty| \geq c\}$. Soit (T_n) une suite de temps d'arrêt tendant en décroissant vers T et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. $1_{[0,T_n]}$ est un processus prévisible élémentaire borné par 1, si bien que

$\lim_{c \to \infty} P_n[|(1_{[0,T_k]} \cdot X)_\infty| \geq c] = 0$ <u>uniformément par rapport à n et k</u>. En vertu de la continuité à droite de X, $P_n[X^* > c]$ tend aussi uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$. Enfin si on pose $S_1 = \inf\{t, X_t \leq u\}$, $T_1 = \inf\{t > S_1, X_t \geq v\}$, $S_2 = \inf\{t > T_1, X_t \leq u\}$, etc ..., on a $\{N^{uv} > c\} \subset \{((\sum_i 1_{]S_i, T_i]}) \cdot X)_\infty > u^+ + (v-u)c\}$. On approche à nouveau

S_i et T_i par des temps d'arrêt ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, et compte-tenu de l'hypothèse du théorème ci-dessus, $P_n[N^{uv} > c]$ tend uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$. Ainsi la suite P_n est tendue sur $\mathbb{D}$.

Il reste à vérifier que si P est une loi limite de la suite (P_n), P est aussi une loi de semimartingales. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des processus prévisibles élémentaires bornés par 1 de la forme $j = \sum_{i=1}^{p} \varphi_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ où φ_{t_i} est une application

continue de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le critère de Dellacherie-Mokobodzki (voir [5] pour une démonstration simple), X est une semimartingale sous la loi P si et seulement si $\{(j \cdot X)_\infty, j \in \mathcal{J}\}$ est borné dans $L^0(P)$. La condition ($\star$) entraîne que $\{(j \cdot X)^*, j \in \mathcal{J}\}$ est uniformément borné dans $L^0(P_n)$. Or $\{(j \cdot X)^* > c\}$ un ouvert de $\mathbb{D}$, si bien que $P[(j \cdot X)^* > c] \leq \liminf_{n \to +\infty} P_n[(j \cdot X)^* > c]$. Donc

$\{(j \cdot X)^*, j \in \mathcal{J}\}$ est borné dans $L^0(P)$ et X est une semimartingale sous P.

COROLLAIRE 1 . Si (X^n) est une suite de processus càdlàg définis sur des espaces probabilisés $(\Omega^n, \mathfrak{F}^n, P^n)$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ vérifiant $P^n[\int_0^\infty |dX_s^n| > c] \leq \varepsilon$ pour tout n, alors les lois P_n de X^n sur $\mathbb{D}$ sont tendues sur $\mathbb{D}$ et X est un processus à variation finie pour toute loi limite P de la suite (P_n) sur $\mathbb{D}$.

DEMONSTRATION . C'est une conséquence immédiate du théorème 2 . En effet soit P une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f((X_t)_{t \in \mathbb{Q}^+})$ en - gendre la tribu $\mathcal{F}_\infty$ sur $\mathbb{D}$. On applique alors le théorème 2 à la suite de semi - martingales $((X_t^n), t f((X_t^n))_{t \in \mathbb{Q}^+})$ à valeurs dans $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

COROLLAIRE 2 . Sous les hypothèses du théorème 2 , les lois des semimartin - gales $(X^n, [X^n, X^n])$ sont tendues sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

DEMONSTRATION . Il suffit de remarquer que $P^n[(X^n)^* > c]$ tend uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$ et que $[X^n, X^n]_t = (X_t^n)^2 - 2\int_0^t X_{s^-}^n \, dX_s^n$. Il est facile de vérifier que $P^n[(X_-^n \cdot X^n)^* > c]$ tend aussi uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$, si bien que le couple $(X^n, [X^n, X^n])$ vérifie les hypothèses du théorème 2 et les lois de ces couples sont tendues sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

REMARQUE . Grâce à la formule d'intégration par parties et à la démonstration ci-dessus, on peut améliorer le théorème 2 : si une suite (X^n) vérifie la condition $(\star)$, pour tout $p \geq 1$ la suite $((X^n)^p)$ vérifie aussi $(\star)$.

THEOREME 3 . Soit (X^n) une suite de quasimartingales définies sur des espaces probabilisés filtrés $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n), P^n)$. S'il existe une constante α telle que $\operatorname{Var} X^n \leq \alpha$ pour tout n , alors (X^n) vérifie la condition $(\star)$ du théorème 2 .

DEMONSTRATION . En ce qui concerne les résultats généraux sur les quasi - martingales , le lecteur intéressé pourra se reporter à [1] , [3] et [4] .
Si X est une quasimartingale , il existe deux surmartingales positives X' et X'' telles que $\operatorname{Var} X = E[X'_0 + X''_0]$ et $X = X' - X''$. Soit $T_p = \inf\{t, |X_t| \geq p\}$. D'après la décomposition de Doob-Meyer d'une surmartingale positive , il existe une martingale locale M et un processus prévisible à variation intégrable A tels que $X = M + A$. Or $(M^{T_p})^* \leq p + |X_{T_p}| + \int_0^\infty |dA_s|$, si bien que

$$E[(M^{T_p})^*] \leq p + E|X_{T_p}| + E[\int_0^\infty |dA_s|] \leq p + \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} X .$$

Comme M^{T_p} est dans $\mathcal{H}^1$, il existe une constante K telle que pour tout processus prévisible j borné par 1 on ait :

$$E[\,|j.X)_{T_p}|\,] \le K(E[(M^{T_p})^*] + E[\int_0^\infty |dA_s|\,]) \le K(p + 3\,\mathrm{Var}\,X)\ .$$

Or $pP[X^* \ge p] \le \mathrm{Var}\,X$, si bien que

$$p[\,|(j.X)_\infty| \ge c\,] \le \frac{\mathrm{Var}\,X}{p} + \frac{K}{c}(p + 3\,\mathrm{Var}\,X)\ .$$

Cette inégalité montre que la suite (X^n) vérifie bien les hypothèses du théorème 2 . On retrouve ainsi le théorème 7 de [2] qui devient un corollaire immédiat des théorèmes 2 et 3 .

THEOREME 4 . On suppose que P_n est la loi sur $\mathbb{D}$ d une semimartingale X^n définie sur un espace probabilisé filtré $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n, (\mathcal{F}^n_t))$. Si pour tout $\varepsilon>0$, il existe une quasimartingale Y^n sur Ω^n telle que $P^n[(X^n - Y^n)^* > 0] \le \varepsilon$ et $\mathrm{Var}\,Y^n$ soit bornée uniformément en n , alors la suite P_n est tendue sur $\mathbb{D}$ et si P est une loi limite , X est une semimartingale sous P .

CRITERE DE COMPACITE DES LOIS D'UNE CERTAINE CLASSE DE SEMI - MARTINGALES .

Comme la mesure de Lebesgue λ n'est pas bornée sur $[0, +\infty]$, tous les processus considérés dans ce paragraphe sont indexés par $[0, 1]$.

Notons $\mathcal{S}$ la classe des semimartingales continues Y , nulles en 0 , dont la décomposition canonique $Y = M + A$ possède la propriété suivante :

$d\langle M,M\rangle_t = m_t\,dt$, $dA_t = a_t\,dt$ où (m_t) et (a_t) sont prévisibles , m_t étant de plus localement borné et $\int_0^1 a_s^2\,ds < +\infty$. Cette classe a été étudiée dans [6] et joue un rôle important dans les travaux de Zheng et Meyer . Dans ce paragraphe nous nous proposons de dégager un critère de compacité et de stabilité pour la classe $\mathcal{S}$ analogue à celui du théorème 2 . Or dans [6] nous avions montré qu'une semimartingale continue Y appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si l'ensemble $\{(H.Y)_1$, H prévisible , élémentaire , borné vérifiant $\int_0^1 H_s^2\,ds \le 1\}$ est borné dans L^0 .

Soit (X^n) une suite de semimartingales continues définies sur des espaces probabilisés filtrés $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}^n_t), P^n)$ et soit $\mathcal{J}^p$ l'ensemble des processus prévisibles élémentaires bornés j sur $\mathbb{D}$ muni de sa filtration canonique tels que $\int_0^1 |j_s|^p \, ds \le 1$. On dit que la suite (P_n) des lois de X^n sur $\mathbb{D}$ vérifie ($**$) si $\{(j.X)_1 \, , \, j \in \mathcal{J}^2\}$ est borné uniformément dans $L^o(P_n)$.

THEOREME 5 . Si la suite (P_n) vérifie ($**$), la suite (P_n) est tendue sur $\mathbb{D}$ et si P est une loi limite , X est une semimartingale appartenant à $\mathcal{S}$ sous P .

Avant de passer à la démonstration du théorème 5 , établissons quelques lemmes. Nous supposerons toujours $p \ge 1$.

LEMME 1 . Soit (P_n) une suite de lois sur $\mathbb{D}$ telles que X soit continu à variation finie et que $\{(j.X)_1 \, , \, j \in \mathcal{J}^p\}$ soit uniformément borné dans $L^o(P_n)$. Alors la suite (P_n) est tendue et si P est une loi limite, il existe un processus prévisible a tel que sous P , $X_t = \int_0^t a_s ds$ et $\int_0^1 |a_s|^q \, ds < +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $p > 1$ (resp. a est localement borné si $p = 1$) .

DEMONSTRATION . Le fait que (P_n) est tendue résulte immédiatement du théo - rème 2 et de la condition ($*$) de ce théorème . Passons à l'existence de a sous la loi limite P . Soit $\mathcal{H}^p$ l'ensemble des processus h $\mathcal{F}_\infty$-mesurables, élémentaires , bornés vérifiant $\int_0^1 |h_s|^p \, ds \le 1$. Montrons que $\{(h.X)_1^* \, , \, h \in \mathcal{H}^p\}$ est borné uniformément dans $L^o(P_n)$. Si $h \in \mathcal{H}^p$, nous noterons h' la projection prévisible de h sous P_n (h' dépend de n mais évitons d'alourdir les notations) . Comme $E_n[\,|h'|^p\,] \le E_n[\,|h|^p\,]$ et que $\int_0^1 |h_s|^p \, ds \le 1$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe c in- dépendant de n et de $h \in \mathcal{H}^p$ tel que $P_n[\int_0^1 |h'|^p \, ds > c\,] \le \varepsilon$. Il en résulte que $\{(h'.X)_1 \, , \, h \in \mathcal{H}^p\}$ est borné uniformément dans $L^o(P_n)$. Soit $T_r^n = \inf\{t, \; |(h'.X)_t| \ge r\}$. Comme $(h'.X)_{T_r^n} = ((h' 1_{[0,T_r^n]}).X)_1$, $P_n[(h'.X)_{T_r^n} \ge r\,]$ tend uniformément vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$.

Par ailleurs $E_n[\,|(h.X)_{T_r^n}|\,] = E_n[\,|(h'.X)_{T_r^n}|\,] \le r$ car X est à variation finie et prévisible sous P_n. Ainsi $P_n[(h.X)_{T_r^n} > c]$ tend aussi uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$ et que r est fixé. Or

$$P_n[(h.X)_1 > c] \le P_n[(h.X)_{T_r^n} > c] + P_n[T_r^n < 1]$$

$$\le P_n[(h.X)_{T_r^n} > c] + P_n[(h'.X)_{T_r^n} \ge r] .$$

Donc $P_n[(h.X)_1 > c]$ tend uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$. Reprenant l'argument développé au début de la démonstration du théorème 2, on voit aisément que $\{(h.X)_1^*,\ h \in \mathcal{H}^p\}$ est aussi uniformément borné dans $L^0(P_n)$. Or si $h = \sum_i \varphi_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ où φ_{t_i} est une fonction continue de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{R}$, $\{(h.X)_1^* > c\}$ est un ouvert de $\mathbf{D}$ et $P[(h.X)_1^* > c] \le \liminf_{n\to\infty} P_n[(h.X)_1^* > c]$. Ainsi $\{(h.X)_1^*,\ h \in \mathcal{H}^p$ et h_t continue pour tout t $\}$ est borné dans $L^0(P)$. Grâce au théorème des classes monotones, il en est de même pour $\{(h.X)_1^*,\ h \in \mathcal{H}^p\}$. D'après les lemmes 4 et 5 de [6] appliqués à X et à la filtration constante $(\mathcal{F}_\infty)$, il existe un processus $\mathcal{F}_\infty$ mesurable a tel que $X_t = \int_0^t a_s\,ds$ P p.s. et $\int_0^1 |a_s|^q\,ds < +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (resp. a est localement borné).

En particulier X est continu sous P, si bien que les lemmes 4 et 5 appliqués cette fois à X et à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ montrent l'existence du processus prévisible a vérifiant les conditions du lemme 1.

Pour démontrer le théorème 5 nous avons aussi besoin d'une version améliorée d'un lemme dû à Yor.

LEMME 2. Soient X une martingale locale et A un processus croissant continu adapté. Si pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le processus $Z_t^\lambda = \exp(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t)$ est une surmartingale, alors X est une martingale locale continue.

DEMONSTRATION . Soient φ un homéomorphisme croissant de $[0,1]$ sur $[0,+\infty]$ et $V_t = A_t + \varphi(t)$, qui est continu , strictement croissant et tend vers $+\infty$ avec t. Si $\tau_t = \inf\{s, V_s > t\}$, et si $t > s$ $A_{\tau_t} - A_{\tau_s} = (t-s) - \varphi(\tau_t) - \varphi(\tau_s) \leq t-s$.

Comme Z_t^λ est une surmartingale , $E[Z_t^\lambda / Z_s^\lambda] \leq 1$, si bien que $E[\exp(\lambda(X_{\tau_t} - X_{\tau_s}))] \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2}(t-s))$. Remplaçant t par $-t$, nous obtenons $E[\exp(\lambda\,|X_{\tau_t} - X_{\tau_s}|)] \leq 2\exp(\frac{\lambda^2}{2}(t-s))$. Le théorème de Kolmogorov implique que (X_{τ_t}) est continu ; donc X_t est aussi continu . Par arrêt nous pouvons supposer que X et A sont bornés . D'après la formule d'Ito ,
$Z_t^\lambda - 1 = \lambda \int_0^t Z_s^\lambda \, dX_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t Z_s^\lambda \, d(A_s - \langle X, X\rangle_s)$. Ceci est une surmartingale et le reste si on divise par $\lambda > 0$. Faisant tendre λ vers 0 , on en déduit que X est aussi une surmartingale . De même en prenant $\lambda < 0$, $-X$ est aussi une surmartingale , donc X est une martingale locale continue .

REMARQUE . Nous remercions P.A. Meyer d'avoir corrigé une version antérieure de ce lemme : en général le processus A n'est pas égal à $\langle X, X\rangle$. Pour s'en convaincre il suffit de prendre $X = 0$ ...

Grâce au lemme 2 nous retrouvons un résultat de Meyer et Zheng :

THEOREME 6 . Soit (X^n) une suite de martingales locales continues avec $\langle X^n, X^n\rangle = A^n$. Si (A_1^n) est une suite de variables aléatoires uniformément bornée dans $L^0(P_n)$ et si P_n est la loi de (X^n, A^n) sur $\mathbb{D}^2$, P_n est tendue sur $\mathbb{D}$. En outre si (X, A) désigne le processus canonique sur $\mathbb{D}^2$ et si P est une loi limite telle que A soit continu , alors X est une martingale locale continue sous P.

DEMONSTRATION . La suite P_n est tendue car (X^n, A^n) vérifie la condition (*) du théorème 2 . Soit P une loi limite telle que A soit continue . Les processus $\exp(\lambda X^n - \frac{\lambda^2}{2} A^n)$ sont des surmartingales positives dont l'espérance est majorée par 1 . On vérifie aisément qu'il en est de même pour $\exp(\lambda X - \frac{\lambda^2}{2} A)$ sous la loi P , si bien que X est une martingale locale continue sous P .

DEMONSTRATION DU THEOREME 5 . Toute la difficulté vient du fait que nous ignorons a priori si X est continue sous P . D'après le théorème 2 , la suite (P_n) est tendue et si P est une loi limite , X est une semimartingale sous P . En outre on vérifie aisément que $\{(j \cdot X)^*, j \in \mathcal{J}^2\}$ est uniformément borné dans $L^0(P_n)$ et même borné dans $L^0(P)$, si bien que X appartient à $\mathcal{S}$ sous P si X est continue sous P . Or $[X,X] = X^2 - 2X_- \cdot X$; donc $\{(j^2 \cdot [X,X])_1, j \in \mathcal{J}^2\}$ est aussi uniformément borné dans $L^0(P_n)$. Soit $X = M^n + A^n$ la décomposition canonique de la semimartingale continue X sous la loi P_n . Pour $j \in \mathcal{J}^2$, on pose $T_r^n = \inf\{t, (j^2 \cdot \langle M^n, M^n \rangle)_t \geq r\}$. Or

$$P_n[(j \cdot M^n)_1^* > c] \leq P_n[(j \cdot M^n)^*_{T_r^n} > c] + P_n[T_r^n < 1]$$

$$\leq \frac{r}{c^2} + P_n[T_r^n < 1]$$

en vertu de l'inégalité de Doob . Mais $P_n[T_r^n < 1]$ tend uniformément vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$ car $\{(j^2 \cdot [X,X])_1 = (j^2 \cdot \langle M^n, M^n \rangle)_1, j \in \mathcal{J}^2\}$ est uniformément borné dans $L^0(P_n)$. Donc $\{(j \cdot M^n)_1^*, j \in \mathcal{J}^2\}$ et par différence $\{(j \cdot A^n)_1^*, j \in \mathcal{J}^2\}$ sont aussi bornés uniformément dans $L^0(P_n)$. La continuité de X sous la loi P découle alors du lemme 1 et du théorème 6 , si bien que X appartient à $\mathcal{S}$, ce qu'il fallait démontrer .

REFERENCES

[1] DELLACHERIE C. , MEYER P.A. : Probabilités et Potentiel , volumes A et B , Hermann , Paris .

[2] MEYER P.A. , ZHENG W.A. : Tightness criteria for laws of semimar - tingales . A paraître dans Annales de l' I.H.P.

[3] STRICKER C. : Quasimartingales , martingales locales , semimartingales et filtration naturelle . Z. W. 39 (1977) 55-64 .

[4] STRICKER C. : Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales . Sém. Prob. IX , Lecture Notes in M. 465 , 408-419 , Springer , 1975 .

[5] STRICKER C. : Une caractérisation des semimartingales . Sém. Prob. XVIII , Lecture Notes in M. 1059 , 148-153, Springer, 1984 .

[6] STRICKER C. : Quelques remarques sur les semimartingales gaussiennes et le problème de l'innovation . Proceedings of the CNET ENST Colloquium , Lecture Notes in Control and Information Sciences 61 , 260-276 , Springer , 1984 .