SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-FRANÇOIS LE GALL
MARC YOR

Sur l'équation stochastique de Tsirelson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 81-88
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__81_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'EQUATION STOCHASTIQUE DE TSIRELSON

J.F. Le Gall (*) et M. Yor (*)

1 - Introduction et énoncé des principaux résultats.

Soit C l'espace des fonctions continues $w : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, nulles en 0, et $(\mathcal{C}_t ; t \in [0,1])$ la filtration canonique sur C. D'après le théorème de Girsanov, pour toute fonctionnelle $b : [0,1] \times C \longrightarrow \mathbb{R}$, bornée, $(\mathcal{C}_t)$-prévisible, il existe une unique probabilité P_b sur $(C, \mathcal{C}_1)$ telle que le processus des coordonnées, soit (X_t), soit solution de :

$$(1) \qquad dX_t = dB_t + b(t,X.)\, dt \ , \quad X_o = 0 \ ,$$

où (B_t) désigne un $((\mathcal{C}_t),P)$ mouvement Brownien réel.

Toutefois, Tsirelson [4] a construit une fonctionnelle $b \equiv \tau$ telle que l'équation (1) ne possède pas de solution forte (i.e : telle qu'aucune solution X de (1) ne soit adaptée à la filtration de B). L'équation de Tsirelson a été étudiée notamment par Krylov (voir Lipcer - Shyriaev [2]), Beneš [1], et Stroock - Yor [3]. Rappelons que la fonctionnelle τ est définie par :

$$\tau(t,w) = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k, t_{k+1}]}(t) \left[\frac{w(t_k) - w(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right] ,$$

où $[x]$ désigne la partie fractionnaire de $x \in \mathbb{R}$, et $(t_k)_{k \in -\mathbb{N}}$ est une suite de réels décroissant strictement de 1 à 0 (dans toute la suite, la seule fonctionnelle b considérée sera τ).

Dans cette Note, nous poursuivons l'étude de l'équation de Tsirelson, en précisant les relations de dépendance qui existent entre les solutions de (1) correspondant à des mouvements Browniens B corrélés, voire identiques.

Soit donc $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ espace de probabilité filtré, et $B = (B^1, \ldots, B^n)$ une $(\mathcal{F}_t, P)$ martingale continue gaussienne telle que, pour tout $(i,j) \in \{1,..,n\}^2$, $\langle B^i, B^j \rangle_t = \rho_{i,j}.t$, avec $\rho_{i,i} \equiv 1$ (i.e : pour tout i, B^i est un $((\mathcal{F}_t),P)$ mouvement Brownien réel).

(*) Laboratoire de Calcul des Probabilités - Tour 56 - 3ème étage
4, Place Jussieu - 75230 Paris -

Pour $\lambda = (\lambda_1,—,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $Q(\lambda) = \sum_{i,j} \rho_{i,j}\, \lambda_i\lambda_j$.

Soit enfin, pour $0 \le s \le t$, $\mathcal{B}_t^s = \sigma\{B_u^i;\ i \in \{1,—,n\},\ s \le u \le t\}$; on note simplement $\mathcal{B}_t$ pour $\mathcal{B}_t^o$.

Théorème 1 :

Notons, pour $i \in \{1,—,n\}$, X^i une solution de :

$$dX_t^i = dB_t^i + \tau(t,X_\cdot^i)\,dt\ ;\ X_o^i = 0.$$

Posons $\mathcal{X}_t = \sigma(X_u^i\ ;\ i \in \{1,\ldots n\},\ u \le t)$ et pour $i \in \{1,\ldots n\}$, et tout $t \ge 0$: $\eta_t^i = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k;t_{k+1}]}(t)\ \left(\frac{X_t^i - X_{t_k}^i}{t - t_k}\right)$

Alors :

a) La loi de $([\eta_t^1],\ldots,[\eta_t^n])$ ne dépend pas de $t \in]0,1]$ et est invariante par les translations $(x_1,..,x_n) \longrightarrow (x_1+u_1,..,x_n+u_n)$ pour $(u_1,..,u_n) \in (\mathrm{Ker}\ Q)^\perp$.

b) pour tout $t \in]0,1]$, $([\eta_t^1],\ldots,[\eta_t^n])$ est indépendante de $\mathcal{B}_1$ et pour tout $s \in]0,t]$, on a :

$$(2) \qquad \mathcal{X}_t = \mathcal{B}_t \vee \sigma([\eta_s^1],\ldots,[\eta_s^n]).$$

Remarques :

1) Si Q est non dégénérée (en particulier si $n=1$), la loi de $([\eta_t^1],\ldots,[\eta_t^n])$ est nécessairement la mesure de Lebesgue sur $[0,1[^n$.

2) Du théorème 1, on déduit que (1) ne possède pas de solution forte : en prenant $n=1$, la relation (2) montre que $\mathcal{X}_t$ est strictement plus grande que $\mathcal{B}_t$. □

Dans le cas particulier où $\rho_{i,j} \equiv 1 (i,j \in \{1,\ldots,n\})$, on a bien sûr : $B^1 = B^2 = \ldots = B^n \equiv B$. On peut alors énoncer une sorte de réciproque au théorème 1.

Théorème 2 :

Soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $([0,1[)^n$, $\mathcal{F}$-mesurable, indépendante de $\mathcal{B}_1$, et de loi invariante par les translations $(x_1,\ldots x_n) \longrightarrow (x_1+u,\ldots,x_n+u)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Alors, il existe une filtration $(\mathcal{G}_t)$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$ et des processus X^i $\mathcal{G}_t$ adaptés tels que :

- B reste un $\mathcal{G}_t$ mouvement brownien
- $X^1,\ldots,X^n$ sont solutions de

$$dX_t^i = dB_t + \tau(t,X_\cdot^i)\,dt\ ;\ X_o^i = 0$$

- $\forall\ j=1,..,n\ :\ \alpha_j = \left[\dfrac{X^j_{t_o} - X^j_{t_{-1}}}{t_o - t_{-1}}\right]$

(avec les notations précédentes : $\alpha_j = [\eta_1^j]$).

2 - Démonstrations des théorèmes 1 et 2.

2.1) Démonstration du théorème 1.

Posons, pour tout $i \in \{1,\ldots n\}$, et tout $t \in [0,1]$

$$\varepsilon_t^i = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k;t_{k+1}]}(t)\ \left(\frac{B_t^i - B_{t_k}}{t - t_k}\right)$$

On a, pour tout $k \in -\mathbb{N}$:

$$\forall\ t \in]t_k;t_{k+1}],\ \eta_t^i = \varepsilon_t^i + [\eta_{t_k}^i]\ .$$

D'où, pour tout $p = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$$\phi(t;p) \overset{\text{def}}{=} E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j [\eta_t^j])]$$

$$= E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j\, \eta_t^j)]$$

$$= E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j (\eta^j_{t_{k-\ell}} + \varepsilon^j_{t_{k-\ell+1}} +\ldots+ \varepsilon^j_{t_k} + \varepsilon^j_t))]$$

(pour tout $t \in]t_k;t_{k+1}]$, et $\ell \in \mathbb{N}$)

$$= E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j (\varepsilon^j_{t_{k-\ell+1}} +\ldots+ \varepsilon^j_{t_k} + \varepsilon^j_t))]\ \phi(t_{k-\ell};p)$$

$$= \exp(-2\Pi^2 Q(p)\ (\frac{1}{t-t_k} + \frac{1}{t_k - t_{k-1}} +\ldots+ \frac{1}{t_{k-\ell+1} - t_{k-\ell}})\ \phi(t_{k-\ell};p)$$

Or, on a : $|\phi(t,p)| \le 1$, et donc :

- si $Q(p) > 0$, $\phi(t;p) = 0$
- si $Q(p) = 0$, $\phi(t;p) = C(p)$,

où $C(p)$ est une constante qui ne dépend que de p.

Cela démontre l'assertion a). En ce qui concerne b), on remarque que :

$$Q(p) = 0 \text{ entraîne } \sum_{j=1}^n p_j\, \varepsilon_t^j = 0 \quad \text{p.s.}$$

Ensuite, on écrit, pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$, et $t \in]t_k, t_{k+1}]$

$$E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j [\eta_t^j]) \mid \mathcal{B}_1]$$

$$= \lim_{\ell \to -\infty} E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j [\eta_t^j]) \mid \mathcal{B}_1^{t_\ell}]$$

$$= \lim_{\ell \to -\infty} E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j (\eta^j_{t_\ell} + \varepsilon^j_{t_{\ell+1}} + \ldots + \varepsilon^j_{t_k} + \varepsilon^j_t)) \mid \mathcal{B}_1^{t_\ell}]$$

$$= \lim_{\ell \to -\infty} (\exp 2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j (\varepsilon^j_{t_{\ell+1}} + \ldots + \varepsilon^j_{t_k} + \varepsilon^j_t)\ \phi(t_\ell; p)$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad Q(p) > 0;\ C(p), \text{ si } Q(p) = 0.$$

Ce qui démontre que $([\eta_t^1], \ldots, [\eta_t^n])$ est indépendant de $\mathcal{B}_1$. La relation (2) est une conséquence facile des définitions. □

2.2) Démonstration du théorème 2.

Remarquons tout d'abord qu'on peut définir les variables η_t^j par récurrence de façon que l'on ait :

$$[\eta_1^j] = \alpha_j \text{ , et}$$

pour tout k, pour tout $t \in]t_k; t_{k+1}]$, pour tout $j \in \{1, \ldots n\}$,

$$\eta_t^j = \varepsilon_t + [\eta_{t_k}^j] \text{ ,}$$

avec $\varepsilon_t \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k; t_{k+1}]}(t)\ (\frac{B_t - B_{t_k}}{t - t_k})$.

Ensuite, on pose, pour $t \in]0,1]$:

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{B}_t \vee \sigma([\eta_t^1], .., [\eta_t^n]).$$

La famille de tribus $(\mathcal{G}_t)_{t \in]0,1]}$ forme une filtration.

Puis, on définit X^j (pour $j \in \{1, \ldots n\}$) par :

$X_o^j = 0$, et pour tout ℓ, et tout $t \in]t_\ell; t_{\ell+1}]$:

$$X_t^j = \sum_{k \le \ell} \eta^j_{t_k} (t_k - t_{k-1}) + \eta_t^j (t - t_\ell)$$

$$= B_t + \sum_{k \le \ell} [\eta^j_{t_{k-1}}](t_k - t_{k-1}) + [\eta^j_{t_\ell}](t - t_\ell)$$

Il est immédiat que le processus X^j est $(\mathcal{G}_t)$-adapté.
De plus, on a, par construction :

$$X_t^j = B_t + \int_0^t b(s, X^j)\ ds.$$

Il reste à vérifier que B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement brownien.

Or, on a, par définition des variables η^j :

pour tout k, pour tout $j = 1,..,n$: $[\eta^j_{t_k}] = [\varepsilon_{t_k}] + [\eta^j_{t_{k-1}}]$.

En raisonnant par récurrence, et en utilisant le fait que la loi de $(\alpha^1,...,\alpha^n)$ est invariante par les translations $(x_1,..,x_n) \longrightarrow (x_1+u,...,x_n+u)$ pour $u \in \mathbf{R}$, on voit que :

pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$([\eta^1_{t_k}],...,[\eta^n_{t_k}])$ est indépendante de $\mathcal{B}_1$

puis, pour tout $t \in]0,1]$,

$([\eta^1_t],...,[\eta^n_t])$ est indépendante de $\mathcal{B}_1$.

On en déduit facilement que B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement brownien. □

Remarque :

La tribu $\mathcal{G}_o \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{t>0} \mathcal{G}_t$ n'est en général pas triviale (sauf si $n = 1$), Les variables aléatoires $[\eta^i_t] - [\eta^j_t]$ (qui ne dépendent pas de $t \in]0;1]$) étant $\mathcal{G}_o$-mesurables.

3 - Compléments

3.1) Quoique pour toute solution X de (1), et tout $t > 0$, la variable $[\eta_t]$ soit indépendante de $\mathcal{B}_1$ (cf. théorème 1), on peut néanmoins représenter toute variable mesurable par rapport à X comme intégrale stochastique relativement à B. De façon précise, on a le

Théorème 3 :

Soient (B_t) un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien et $X^1,...X^n$ n solutions $\mathcal{F}_t$-adaptées de (1).

Notons $\mathcal{X}_t$ la filtration naturelle, rendue $(\mathcal{F},P)$ complète et continue à droite, de $(X^1,...X^n)$.

Alors, toute variable aléatoire $Z \in L^2(\Omega,\mathcal{X}_1,P)$ se représente sous la forme :

$$Z = Z_o + \int_0^1 \phi_s \, dB_s.$$

où : Z_o est $\mathcal{X}_o$ mesurable,

et ϕ_s est un processus $\mathcal{X}_s$-prévisible tel que $E[\int_0^1 \phi_s^2 \, ds] < +\infty$

Démonstration :

Notons $(\mathcal{B}_t)$ la filtration naturelle (complétée) de B, et pour $s \leq t$

$$\mathcal{B}_t^s = \sigma(B_u - B_s \ / \ s \leq u \leq t).$$

D'après la relation (2), on a :
pour tout $s \in]0;1]$, $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_s \vee \mathcal{B}_1^s$.

A l'aide du théorème de représentation des martingales browniennes, un argument de classe monotone montre que, pour tout $s \in]0;1]$, toute variable aléatoire Z de $L^2(\Omega,\mathcal{X}_1,P)$ se représente sous la forme

$$Z = Z_s + \int_s^1 \phi_u \, dB_u$$

avec $Z_s \in L^2(\mathcal{X}_s,P)$, et (ϕ_u) est un processus $(\mathcal{X}_u)$-prévisible tel que $E[\int_s^1 \phi_u^2 \, du] < \infty$. On termine la démonstration en faisant décroitre s vers 0. □

Remarque :

Compte tenu de la relation (2), on a, pour tout $t > 0$:

$$\mathcal{X}_t = \mathcal{B}_t \vee \sigma([\eta_t^1],\ldots,[\eta_t^n]),$$

et il est intéressant d'expliciter la représentation des variables aléatoires

$\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j[\eta_t^j])$ pour $p = (p_1,\ldots p_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Pour $t = 1$ par exemple, on a :

$$\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j[\eta_1^j]) = \exp(2i\Pi (\sum_{j=1}^n p_j)\varepsilon_1) \exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j \eta_{t_{-1}}^j)$$

$$= \exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j \eta_{t_{-1}}^j) \exp(-2\Pi^2 \frac{(\Sigma p_j)^2}{t_o - t_{-1}}) \ldots$$

$$\ldots \left[1 + \int_{t_{-1}}^{t_o} 2i\Pi \left(\frac{\sum_{j=1}^n p_j}{t_o - t_{-1}}\right) \exp(2i\Pi (\sum_{j=1}^n p_j) \frac{B_u - B_{t_{-1}}}{t_o - t_{-1}}) \, dB_u\right]$$

$$\cdot = \exp(-2\Pi^2 \frac{(\Sigma p_j)^2}{t_o - t_{-1}}) \left[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j \eta_{t_{-1}}^j) + \right.$$

$$\left. \int_{t_{-1}}^{t_o} 2i\Pi \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j}{t_o - t_{-1}}\right) \exp(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j \eta_{t_{-1}}^j) \exp(2i\Pi (\sum_{j=1}^{n} p_j) \frac{B_u - B_{t_{-1}}}{t_o - t_{-1}}) dB_u \right]$$

et on continue en décomposant à son tour $\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j \eta_{t_{-1}}^j)$

3.2) Pour terminer, nous étudions un exemple d'équation stochastique, sans terme de drift, qui possède des propriétés exactement analogues à celles de l'équation de Tsirel'son.

Considérons l'équation

(3) $\quad dX_t = a(t,X_\cdot)\, dB_t \; ; \; X_o = 0 \,,$

où la fonctionnelle $a : [0,1] \times C \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par :

$$a(t,w) = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k, t_{k+1}]}(t) \quad \mathrm{sgn}\,(w(t_k) - w(t_{k-1})),$$

(t_k) désignant la suite utilisée dans la définition de τ, et la fonction $\mathrm{sgn}(\cdot)$ valant 1, pour $x > 0$, et -1, pour $x \leq 0$.

On a alors l'analogue suivant du théorème 2, dont la démonstration est laissée au lecteur.

Théorème 4 :

Soit B un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien et $(\mathcal{B}_t)$ sa filtration canonique.

a) Supposons que, pour $i \in \{1,\ldots n\}$, X^i soit un processus $\mathcal{F}_t$ adapté solution de (3).

Notons pour tout $t \in]0,1]$:

$$\eta_t = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k; t_{k+1}]}(t) \quad \mathrm{sgn}\,(X_t^i - X_{t_k}^i)$$

Soit $\mathcal{X}_t$ la filtration canonique de $(X^1,\ldots X^n)$.

Alors : • La loi de $(\eta_t^1,\ldots\eta_t^n)$ ne dépend pas de $t \in]0,1]$ et est invariante par la symétrie $(x_1,\ldots x_n) \longrightarrow (-x_1,\ldots -x_n)$.

• pour tout $t \in]0,1]$, $(\eta_t^1,\ldots\eta_t^n)$ est indépendant de $\mathcal{B}_1$ et pour tout $s \in]0,t]$,

$$\mathcal{H}_t = \mathcal{B}_t \vee \sigma(\eta_s^1, \ldots \eta_s^n).$$

b) Inversement, soit $(\alpha^1, \ldots \alpha^n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1\}^n$, $\mathcal{F}$ mesurable, indépendante de $\mathcal{B}_1$, et de loi invariante par la symétrie $(x_1, .., x_n) \longrightarrow (-x_1, .., -x_n)$.

Alors, il existe une filtration $(\mathcal{G}_t)$ sur Ω, et des processus X^i $(\mathcal{G}_t)$ adaptés tels que

- B est un $(\mathcal{G}_t)$ mouvement brownien.
- $X^1, X^2, \ldots X^n$ sont solutions de (3).
- $\forall\, j \in \{1, \ldots n\}$ $\alpha^j = \text{sgn}\,(X^j_{t_o} - X^j_{t_{-1}})$

  (avec les notations de a) : $\alpha_j = \eta_1^j$).

REFERENCES

[1] V. Benes : Non existence of strong non-anticipating solutions to Stochastic DEs; Implications for Functional DEs, Filtering and control. In : Stochastic Processes and their applications - Vol 5, 1977, p.243-263.

[2] R. Lipcer, A.N. Shyriaev : Statistics of Random Processes, I. General Theory. Applications of Mathematics, Vol. 5, Springer-Verlag, 1977.

[3] D.W. Stroock, M. Yor : On extremal solutions of martingale problems. Ann.Sci. ENS. 4ème série, t. 13, 1980, p. 95-164.

[4] B. Tsirelson : An example of a stochastic differential equation having no strong solution.
Teo. Verojatnost. i. Prim. Vol 20, 1975, p. 427-430.