SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SOPHIE WEINRYB

Étude d'une équation différentielle stochastique avec temps local

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 72-77

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__72_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ETUDE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

AVEC TEMPS LOCAL

par Sophie WEINRYB *

1 - Introduction

On étudie ici l'équation stochastique unidimensionnelle :

$$(1) \qquad X_t = x + B_t + \int_0^t \alpha(s)dL_s \ ,$$

où (B_t) désigne un mouvement Brownien réel issu de 0 , (L_t) est le temps local en 0 de la semi-martingale inconnue X , et $\alpha : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est une fonction déterministe.

Dans le cas où $\alpha(s) \equiv \alpha \leqslant 1/2$, l'équation (1) admet une unique solution trajectorielle, appelée "skew Brownian motion" (voir Harrison-Shepp [1], et, pour d'autres extensions, Stroock-Yor [2]). Des résultats partiels d'existence de solution ont été obtenus par Watanabe ([3], [4]). Bien que le cas où α est constante soit maintenant bien connu, il semble que l'étude de l'équation (1) présente une réelle difficulté, malgré les liens étroits qui existent entre celle-ci et le "skew Brownian motion". Indiquons également que l'équation (1) est apparue de façon naturelle au cours de l'étude d'un phénomène de diffusion à travers une paroi poreuse (voir [5]), question que nous ne détaillerons pas ici. Cette note est consacrée à la démonstration du théorème 1.

Théorème 1

Lorsque $\alpha(t) \leqslant 1/2$, *il y a unicité trajectorielle pour l'équation* (1) .

Pour la démonstration du théorème, nous utilisons une méthode due à Le Gall [6], inspiré lui-même de Perkins [7], qui consiste à prouver d'abord l'unicité en loi des solutions de (1), puis que, si X^1 et X^2 sont deux solutions de (1), $(X^1_t \vee X^2_t \ ; \ t \geqslant 0)$ en est également une, ce qui implique alors l'unicité trajectorielle.

2 - Démonstration du Théorème 1

2.1. Unicité en loi. Remarquons tout d'abord, en écrivant l'équation stochastique satisfaite par (X_t^2), que $|X|$ suit la loi du module d'un mouvement Brownien issu de x (cf. Yamada-Watanabe [8]).

a) On en déduit l'unicité de la loi du processus (L_t). En effet, si l'on note $L_t^- = \lim_{x\uparrow\uparrow 0} L_t^x$, où (L_t^x) désigne le temps local de (X_t) en x, on a, d'après Yor [9] :

$$L_t - L_t^- = 2\int_0^t \alpha(s)dL_s \; ; \; A_t = \frac{1}{2}(L_t + L_t^-) = \lim_{(\varepsilon\to 0)} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{(0\leqslant |X_s|\leqslant \varepsilon)}ds$$

et donc, la loi de $(L_t \equiv \int_0^t \frac{dAs}{1-\alpha(s)}, \; t\geqslant 0)$ est déterminée par celle de $|X|$.

b) Montrons maintenant l'unicité, pour tout $t\geqslant 0$, de la loi de la variable X_t.

Notons $g_t(\lambda) = E(e^{i\lambda X_t})$ $(\lambda\in\mathbb{R} \; ; \; t\geqslant 0)$. D'après la formule d'Ito, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $(g_t(\lambda), \; t\geqslant 0)$ est solution de l'équation différentielle du 1er ordre :

$$g_t(\lambda) = e^{i\lambda x} - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t g_s(\lambda)ds + i\lambda h(t),$$

où $h(t) = E[\int_0^t \alpha(s)dL_s]$ est, d'après a), une fonction uniquement déterminée.

Ainsi, pour tout $t\geqslant 0$, la loi de la variable X_t est uniquement déterminée.

c) L'argument précédent montre que, pour tout $s,t\geqslant 0$, la loi conditionnelle de la variable X_{t+s}, connaissant $\sigma\{X_u, \; u\leqslant s\}$, est uniquement déterminée (la nouvelle fonction déterministe considérée est $\tilde{\alpha}(u) \equiv \alpha(u+s)$). Ainsi, la loi des marginales de rang fini de toute solution X est uniquement déterminée.

2.2. Le supremum de deux solutions est encore une solution.

a) Si (X_t^1) et (X_t^2) sont deux solutions de (1), le processus $(X_t^1 - X_t^2)$ est à variation bornée, son temps local en 0 est donc nul, et l'on a :

$$X_t^1 \vee X_t^2 = (X_t^1 - X_t^2)^+ + X_t^2 = \int_0^t 1_{(X_s^1 > X_s^2)}d(X_s^1 - X_s^2) + X_t^2 .$$

$$= x + B_t + \int_0^t \alpha(s)\left\{1_{(X_s^2<0)}dL_s^1 + 1_{(X_s^1\leqslant 0)}dL_s^2\right\},$$

où (L_t^i) $(i=1,2)$ désigne le temps local en 0 de (X_t^i).

b) La démonstration sera alors terminée à l'aide du résultat général suivant.

Lemme :

Soient (X_t^i) $(i = 1,2)$ *deux semi-martingales continues telles que le temps local en* 0 *de* $X^1 - X^2$ *soit nul. Alors, si* (L_t^i) $(i = 1,2)$ *désigne le temps local de* (X_t^i) *, le temps local de* $(X_t^1 \vee X_t^2)$ *est donné par :*

$$\mathcal{L}_t^o = \int_o^t 1_{(X_s^2 < 0)} dL_s^1 + \int_o^t 1_{(X_s^1 \leqslant 0)} dL_s^2 \quad .$$

Démonstration du lemme :

On a, d'après la formule de Tanaka :

$$(2) \qquad (X_t^1 \vee X_t^2)^+ = \int_o^t 1_{(X_s^1 \vee X_s^2 > 0)} d(X_s^1 \vee X_s^2) + \frac{1}{2} \mathcal{L}_t^o \quad .$$

On a, d'autre part :

$$(3) \qquad (X_t^1 \vee X_t^2)^+ = X_t^{1+} \vee X_t^{2+} = (X_t^{1+} - X_t^{2+})^+ + X_t^{2+} \quad .$$

Ces deux formules permettent d'obtenir $(\mathcal{L}_t^o)$ par identification des processus à variation finie qui y figurent. On obtient aisément :

$$(4) \qquad \mathcal{L}_t^o = A_t + \int_o^t 1_{(X_s^1 \leqslant 0)} dL_s^2 \quad ,$$

où (A_t) désigne le temps local en 0 de $(X_t^{1+} - X_t^{2+})$. Il reste donc à montrer :

$$(5) \qquad A_t = \int_o^t 1_{(X_s^2 < 0)} dL_s^1 \quad .$$

Dans ce but, considérons la transformation lipschitzienne : $(X_t^i) \to (Z_t^i)$, où l'on pose : $Z_t^i = X_t^i - 2\bar{\alpha} X_t^{i+} = - X_t^{i-} + (1 - 2\bar{\alpha}) X_t^{i+}$, avec $\bar{\alpha} \in]0,1/2[$.

On vérifie que :

$$(6) \qquad \begin{array}{l} (Z_t^1 - Z_t^2) \text{ est du même signe que } (X_t^1 - X_t^2) \ . \\ \text{si } X_t^1 - X_t^2 \geqslant 0 \text{ , on a : } (1 - 2\bar{\alpha})(X_t^1 - X_t^2) \leqslant Z_t^1 - Z_t^2 \leqslant X_t^1 - X_t^2 \ . \end{array}$$

On déduit de (6) deux remarques :

(R1) si $S_t \overset{\text{déf}}{=} [(X_t^1 - X_t^2) - (Z_t^1 - Z_t^2)]^+ \equiv 2\bar{\alpha}(X_t^{1+} - X_t^{2+})^+$, on a :

$$(7) \qquad S_t = (X_t^1 - X_t^2)^+ - (Z_t^1 - Z_t^2)^+ \quad .$$

(R2) Le temps local en 0 de $Z^1 - Z^2$ est nul.

Pour prouver (R2), notons $N_{[0,a]}(t)$ le nombre de descentes, pendant l'intervalle de temps $[0,t]$, de $Z^1 - Z^2$, à travers la bande $[0,a]$ $(a>0)$, et $\tilde{N}_{[0,a]}(t)$ la quantité analogue relative à la semi-martingale $X^1 - X^2$. On déduit de (6) que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $aN_{[0,a]}(t) \leqslant a\tilde{N}_{[0,a]}(t)$. Ces deux expressions convergent en probabilité, lorsque $a \to 0$, respectivement vers le temps local en 0 de $Z^1 - Z^2$ et $X^1 - X^2$ (cf. [10]) ; la nullité du temps local en 0 de $X^1 - X^2$ entraîne alors celle du temps local en 0 de $Z^1 - Z^2$.

Réécrivons maintenant l'égalité (7). Il vient, à l'aide de la formule de Tanaka et de (R2) :

$$S_t = 2\bar{\alpha}\int_0^t 1_{(X_s^{1+} > X_s^{2+})} d(X_s^{1+} - X_s^{2+}) + \bar{\alpha}A_t \quad , \text{ d'une part.}$$

$$= \int_0^t 1_{(X_s^1 > X_s^2)}\{d(X_s^1 - X_s^2) - d(Z_s^1 - Z_s^2)\} \quad , \text{ d'autre part.}$$

$$= 2\bar{\alpha}\int_0^t 1_{(X_s^1 > X_s^2)}\, d(X_s^{1+} - X_s^{2+}) \ ,$$

d'où : $A_t = 2\int_0^t \{1_{(X_s^{1+} > X_s^{2+})} - 1_{(X_s^1 > X_s^2)}\}\, d(X_s^{2+} - X_s^{1+})$, d'où l'on déduit aisément l'identité (5).

3 - Remarques

1°) L'hypothèse : $\alpha(t) \leqslant 1/2$ n'a quasiment pas servi dans la démonstration; toutefois, on déduit aisément de l'argument utilisé en 2.1. - a), que l'équation (1) n'admet pas de solution dès que $1-2\alpha(t) < 0$ sur un ensemble de mesure de Lebesgue positive.

2°) Le théorème 1 s'étend au cas d'une équation plus générale.

Théorème 2

Sous les hypothèses du théorème 1, si l'on suppose en outre que σ *et* b *sont deux fonctions mesurables, bornées et que* σ *est lipschitzienne, minorée par une constante strictement positive, l'équation suivante jouit de l'unicité trajectorielle :*

(7) $$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \alpha(s)dL_s \ .$$

Démonstration du théorème 2

On se ramène d'abord au cas où $\sigma \equiv 1$. En effet, grâce aux hypothèses faites sur σ , la fonction $h(x)=\int_0^x \frac{dy}{\sigma(y)}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dont la dérivée seconde au sens des distributions est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ; nous la noterons $\varphi(a)da$. Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ une solution de (7), l'extension de la formule d'Ito permet d'écrire :

$$Y_t \equiv h(X_t) = h(x) + B_t + \int_0^t [\sigma^2(X_s)\frac{\varphi(X_s)}{2} + \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}]ds + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\sigma(0)}\, dL_s$$

En remarquant que $h(u^+) = [h(u)]^+$, on montre aisément, à l'aide de la formule de Tanaka, par exemple, que le temps local en 0 , soit $(\tilde{L}_t)_t$, de $Y_.$ est $\left(\frac{L_t}{\sigma(0)}\right)_{t\geqslant 0}$. Posant alors $\tilde{b}(y) = [\sigma^2\times\frac{\varphi}{2} + \frac{b}{\sigma}]\circ h^{-1}(y)$, l'unicité trajectorielle de (7) découlera de l'unicité trajectorielle de l'équation (8) vérifiée par $Y_.$:

$$(8) \qquad Y_t = h(x) + B_t + \int_0^t \tilde{b}(Y_s)ds + \int_0^t \alpha(s)d\tilde{L}_s \ .$$

Ce dernier résultat est une conséquence de la démonstration du théorème 1 dont on reprend pas à pas les étapes. On montre en effet que (8) admet une unique solution en loi en se ramenant à l'équation (1) par la transformation de Girsanov ; on prouve enfin que le supremum de deux solutions est encore une solution, comme en 2.2., en remarquant qu'alors l'argument essentiel est que le temps local en 0 de la différence de deux solutions est nul.

Je tiens à remercier ici Messieurs Yor et Métivier pour leurs précieuses indications concernant ce travail.

REFERENCES

[1] J.M. HARRISON, L.A. SHEPP, *On skew Brownian motion*, Annals of Probability, Vol. 9, n° 2, April 1981.

[2] D.W. STROOCK, M. YOR, *Some remarkable martingales*, Séminaire Prob. XV, Lectures Notes Math. 850, Springer Verlag, 1979/80.

[3] S. WATANABE, *Applications of Poisson point processes to Markov processes*, Intern. Conf. Prob. Math. Stat. Vilnius, Vol. 1, 1973.

[4] S. WATANABE, *Construction of diffusion processes by means Poisson point process of Brownian excursions*, Proc. Third Japan-USSR Symp. Prob. Theor., Lecture Notes Math. 550, Springer Verlag.

[5] S. WEINRYB, *Limite faible d'un processus de sauts avec frontières de transmission*, Rapport interne 78, Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, 1982.

[6] J.F. LE GALL, *Temps locaux et équations différentielles stochastiques*, Thèse 3e cycle, Université de Paris VI, Juin 1982.

[7] E. PERKINS, *Local time and pathwise uniqueness for stochastic differential equations*, Séminaire Prob. XVI, Lecture Notes Math. 920, Springer Verlag, 1982.

[8] T. YAMADA, S. WATANABE, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ., 11, 1971.

[9] M. YOR, *Continuité des temps locaux*, Astérisque, 52/53, 1978, Soc. Math. Fr.

[10] N. EL KAROUI, *Sur les montées des semi-martingales*, Astérisque, 52/53, Soc. Math. Fr.

(*) Centre de Mathématiques Appliquées
ECOLE POLYTECHNIQUE
91128 - PALAISEAU CEDEX - France.