SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL TALAGRAND

Processus canoniquement mesurables (ou : Doob avait raison)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 502-507

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__502_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

PROCESSUS CANONIQUEMENT MESURABLES (ou : DOOB AVAIT RAISON)

M. TALAGRAND

Soit K un espace métrique compact, et (X_t) un processus sur K. Ce processus définit de façon canonique une mesure de Radon μ sur $\overline{\mathbb{R}}^K$. Pour $t_1,\dots,t_n \in K$ et une fonction continue bornée f sur $\overline{\mathbb{R}}^n$, on a

$$\int f(x(t_1),\dots,x(t_n))\,d\mu(x) = Ef(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$$

où pour $x \in \overline{\mathbb{R}}^K$ on pose $x = (x(t))_{t\in K}$. Si $\mathcal{B}$ désigne la tribu des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}^T$, les fonctions $x \to x(t)$ sur $(\overline{\mathbb{R}}^K, \mathcal{B}, \mu)$ sont finies presque sûrement, et constituent une représentation très canonique du processus. Il est donc tout-à-fait naturel d'étudier les propriétés de l'évaluation $(t,x) \to x(t)$.

Supposons maintenant le processus continu en probabilité, et soit λ une probabilité de Radon fixée sur K.

Définition 1 : On dira que le processus est canoniquement borné si pour tout ε il existe un compact $L \subset K \times \overline{\mathbb{R}}^K$ tel que $\lambda \otimes \mu(L) \geq 1-\varepsilon$ et que l'application $(t,x) \to x(t)$ soit bornée sur L.

Définition 2 : On dira que le processus est canoniquement mesurable si l'application $(t,x) \to x(t)$ est $\lambda \otimes \mu$ mesurable.

Nous allons montrer que ces notions, qui paraissent bien générales, sont en fait très restrictives. Cela est dû, à n'en pas douter au caractère très pathologique de l'application $(t,x) \to x(t)$. Ainsi, pour avoir en général des représentations conjointement mesurables, il convient de recourir à la méthode des versions mesurables de Doob's.

Théorème 1 : Le processus est canoniquement borné si et seulement s'il existe des compacts K_n de K et des compacts M_n de $\overline{\mathbb{R}}^K$ tels que $\lambda \otimes \mu(\bigcup_n K_n \times M_n) = 1$ et que l'évaluation soit bornée sur chaque ensemble $K_n \times M_n$.

Ainsi, la condition d'être canoniquement borné, qui portait sur des compacts du produit $K \times \overline{\mathbb{R}}^K$ se trouve ramenée à une condition portant sur des produits de compacts !

Preuve : La suffisance de la condition est immédiate ; prouvons sa nécessité. Soit A un compact fixé de $K \times \overline{\mathbb{R}}^K$ avec $\lambda \otimes \mu(A) > 0$. Par hypothèse, il existe un compact $B \subset A$ avec $\lambda \otimes \mu(B) > 0$ et tel que l'évaluation soit bornée sur B, c'est à dire qu'il existe a tel que $(t,x) \in B \Longrightarrow |x(t)| \leq a$.

Désignons par $E_n = (E_{n,i})_{i \in I_n}$ un recouvrement fini de K_n par des ensembles de diamètre $\leq 2^{-n}$. Désignons par p la projection de $K \times \overline{\mathbb{R}}^K$ sur le deuxième facteur, et pour $i \in I_n$ soit

$$B_{n,i} = p(B \cap (E_{n,i} \times \overline{\mathbb{R}}^K))$$

et soit $C_{n,i}$ le support de la restriction de μ à $B_{n,i}$. Soit

$$L_{n,i} = \{t \in E_{n,i} \ ; \ \{x \in C_{n,i} \ |x(t)| > a+1\} = \emptyset\}$$

On a donc

$$L_{n,i} = \{t \in E_{n,i} \ ; \ \mu\{x \in C_{n,i} \ ; \ |x(t)| > a+1\} = 0\}$$

Le processus étant continu en probabilité, $L_{n,i}$ est fermé.

Montrons que $\bigcup_{n,i \in I_n} L_{n,i} = K$. En effet pour $t \in K$, on a $(t,x) \in B \Longrightarrow |x(t)| < a+1$. Par compacité de B, il existe un voisinage V de t tel que

$$p(B \cap (V \times \overline{\mathbb{R}}^K)) \cap \{x \ ; \ |x(t)| \geq a+1\} = \emptyset.$$

Ainsi, pour $E_{n,i} \subset B$, on a $t \in L_{n,i}$. Soit

$$C = \{t \in K \ ; \ \mu\{x \in \overline{\mathbb{R}}^K \ ; \ (t,x) \in B\} > 0\}.$$

On a $\lambda(C) > 0$, puisque $\lambda \otimes \mu(B) > 0$. Il existe n et $i \in I_n$ tels que si on pose $N = C \cap L_{n,i}$, on ait $\lambda(N) > 0$. Pour $x \in C_{n,i}$ et $t \in L_{n,i}$ on a $|x(t)| \leq a+1$ par construction. Mais d'autre part, on a

$$C_{n,i} \supset \{x \in \overline{\mathbb{R}}^K \ ; \ (t,x) \in B\}.$$

Il est donc clair que

$$\lambda \otimes \mu((N \times C_{n,i}) \cap B) > 0.$$

En particulier on a $\lambda \otimes \mu((N \times C_{n,i}) \cap A) > 0$ et l'évaluation est bornée sur $N \times C_{n,i}$. Le résultat en découle par exhaustion.

Théorème 2 : Le processus est canoniquement mesurable si et seulement si pour chaque $m \in \mathbb{N}$ il existe des compacts $K_{n,m}$ de K et des compacts $M_{n,m}$ de $\overline{\mathbb{R}}^K$ tels que $\lambda \otimes \mu(\bigcup_n K_{n,m} \times M_{n,m}) = 1$ et que pour chaque n on ait

$$\operatorname{Sup}\{x(t) \ ; \ (t,x) \in K_{n,m} \times M_{n,m}\} - \operatorname{Inf}\{x(t) \ ; \ (t,x) \in K_{n,m} \times M_{n,m}\} \leq 2^{-m}.$$

Là encore la condition se réduit à une condition portant sur des produits de compacts.

Preuve : Prouvons la suffisance. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque m existe une réunion finie disjointe L_m de compacts de $K \times \overline{\mathbb{R}}^K$ sur lesquels l'oscillation de l'évaluation est au plus 2^{-m}, et telle que $\lambda \otimes \mu(L_m) \geq 1 - 2^{-m}\varepsilon$. On en conclut que l'évaluation est continue sur $\bigcap L_m$, qui a une mesure $\geq 1-\varepsilon$.

Prouvons la nécessité. Soit A un compact fixé de $K \times \overline{\mathbb{R}}^K$ de mesure positive, et $m \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, il existe un compact $B \subset A$ de mesure positive sur lesquel l'oscillation de l'évaluation soit $\leq 2^{-m-1}$. Mais la méthode du théorème précédent montre qu'il existe $K_1 \subset K$, $L \subset \overline{\mathbb{R}}^K$ tels que $\lambda \otimes \mu((K_1 \times L) \cap B) > 0$ et que l'oscillation de l'évaluation soit $\leq 2^{-m}$ sur $K_1 \times L$. On conclut la preuve par exhaustion.

Le cas des processus gaussiens.

Rappelons tout d'abord un résultat de structure des processus gaussiens bornés.

Théorème 3 : Soit (X_t) un processus gaussien borné à covariance continue sur l'espace polonais Y, et μ la mesure associée sur $\overline{\mathbb{R}}^Y$. Il existe alors une topologie polonaise τ sur Y, plus fine que la topologie de Y et telle que :

a) Tout ouvert de (Y,τ) est un F_σ de Y.

b) Il existe des sous-ensembles fermés Z_n de $\overline{\mathbb{R}}^Y$ tels que $\mu(Z_n) \geq 1 - 2^{-n}$, et que Z_n soit équicontinu sur (Y,τ).

La démonstration de ce résultat ne nécessite que des modifications faciles de celle de la proposition 1 de [2]. Nous n'utiliserons que le fait plus faible que μ est portée par l'ensemble des fonctions continues sur (Y,τ).

<u>Théorème 4</u> : <u>Pour un processus gaussien</u> (X_t) <u>sur</u> K, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>Le processus est canoniquement borné.</u>

b) <u>Le processus est canoniquement continu.</u>

c) <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>il existe un compact</u> $L \subset K$ <u>avec</u> $\lambda(L) \geq 1-\varepsilon$, <u>tel que la restriction de</u> (X_t) <u>à</u> L <u>ait une version continue.</u>

<u>Preuve</u> : a $\Longrightarrow$ c. D'après le théorème 1, pour tout $n > 0$, il existe une famille finie $K_1,\ldots,K_m$ de compacts de K tels que $\mu(Y) \geq 1 - 2^{-n}$, où $Y = \bigcup_{p \geq m} K_p$, tels que pour chaque $p \leq m$ il existe un compact M_p de $\overline{\mathbb{R}}^K$ tel que l'évaluation soit bornée $K_p \times L_p$ et que $\mu(M_p) > 0$. Autrement dit, si

$$N_p(a) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^K \; ; \; \forall t \in K, \; |x(t)| \leq a\}$$

il existe a avec $\mu(N_p(a)) > 0$. La loi 0-1 montre alors que $\lim_{n\to\infty} \mu(N_p(na)) = 1$, donc $\lim_{n\to\infty} (\bigcap_{p \leq m} N_p(na)) = 1$, ce qui montre que la restriction du processus à Y est bornée. Soit τ la topologie sur Y fournie par le théorème 3. L'application $Y \to (Y,\tau)$ étant mesurable, est lusin mesurable, donc τ coïncide avec la topologie de Y sur un compact L de Y tel que $\lambda(L) \geq 1 - 2^{-n+1}$, ce qui prouve le résultat.

c $\Longrightarrow$ b. Il suffit de prouver qu'un processus ayant une version continue est canoniquement continu. Soit Z_t une version continue de X_t.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe alors une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$P\{\omega \; ; \; s,t \in K, \forall p, d(s,t) \leq \phi(p) \Longrightarrow |X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leq 2^{-p}\} \geq 1 - 2^{-n}.$$

Si

$$L_n = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^K \; ; \; \forall s,t \in K, \forall p, d(s,t) \leq \phi(p) \Longrightarrow |x(s) - x(t)| \leq 2^{-p}\}$$

Il est clair que $\mu(L_n) \geq 1 - 2^{-n}$, et $(t,x) \to x(t)$ est continue sur $K \times L_n$, ce qui prouve le résultat.

Le reste est évident

Exemple 5 : Un processus gaussien non canoniquement mesurable. Soit toujours (X_t) un processus gaussien. Pour $s,t \in K$, soit $\delta(s,t) = \|X_t - X_s\|_2$. Soit a_n le nombre minimal de δ-boules de rayon 2^{-n} nécessaires pour recouvrir K. Il est connu que si le processus est borné, on a $a_n \leq c_n = 3^{3^{3n}}$ pour n grand. Il est donc très facile de construire un processus gaussien non canoniquement borné. Posons $b_n = nc_n$. Soit, pour $1 \leq p \leq b_n$, $I_{n,p} = [(p-1)/b_n , p/b_n]$. Soit $f_{n,p}$ une fonction positive égale à 1 sur $I_{n,2p}$, et nulle en dehors de $I_{n,2p-1} \cup I_{n,2p} \cup I_{n,2p+1}$, de sorte que $\Sigma f_{n,p} = 1$. Soit $(Z_{n,p})_{n \in \mathbb{N}, p \leq b_n/2}$ une famille indépendante de variables normales

Posons $X_t = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 2p \leq b_n}} 2^{-n} f_{n,p}(t) Z_{n,p}$.

Il est clair que l'on définit ainsi un processus à covariance continue sur $[0,1]$. Montrons qu'il n'est pas canoniquement mesurable. Soit $K \subset [0,1]$ avec $\lambda(K) > 0$ (où λ est bien sûr la mesure de Lebesgue). Il existe alors un intervalle $I \subset [0,1]$ avec $\lambda(K \cap I) \geq 0{,}9\lambda(I)$. Pour tout n, $K \cap I$ rencontre au moins $b_n \lambda(I)/2-1$ intervalles $I_{n,2p}$ distincts ; il faut donc au moins autant de δ-boules de rayon 2^{-n} pour le recouvrir, ce qui montre que la restriction de (X_t) à K n'est pas bornée.

Autres représentations des processus. Soit $\mathcal{C}$ la tribu sur $\mathbb{R}^K$ engendrée par les fonctions coordonnées ; le processus définit une mesure ν sur $(\mathbb{R}^T, \mathcal{C})$. Toutefois $\mathcal{C}$ contient très peu d'ensembles mesurables (les ensembles mesurables ne dépendent que d'un nombre dénombrable de coordonnées) et on voit sans peine que l'évaluation n'est bornée sur un ensemble A de $K \times \mathbb{R}^T$ que si la projection de A sur K est au plus dénombrable. Il n'est pas en général possible d'étendre ν à la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^T$. C'est toutefois le cas si $\mu^*(\mathbb{R}^T) = 1$, au sens que tout compact de $\overline{\mathbb{R}}^T \setminus \mathbb{R}^T$ est négligeable. On pose alors simplement $\nu(A \cap \mathbb{R}^T) = \mu(A)$ pour tout borélien A de $\overline{\mathbb{R}}^T$.

Cette situation est toujours réalisée dans le cas des processus gaussiens [2]. Il est dans ce cas beaucoup plus naturel de considérer la mesure ν que la mesure μ. On peut donc dans ce cas définir les notions analogues à celles des définitions 1 et 2, et l'on obtient des notions plus générales. Nous n'avons pas pu caractériser les notions correspondantes par un théorème du genre du théorème 4. Toutefois, nous avons pu construire des un processus gaussien à covariance continue tel que l'évaluation ne soit bornée sur aucun sous ensemble fermé de $[0,1] \times \mathbb{R}^{[0,1]}$ de mesure positive.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] X. FERNIQUE : Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'été de probabilités IV, Lectures Notes in Math. 480, Springer Verlag.

[2] M. TALAGRAND : La τ-régularité des mesures gaussiennes, Z. Wahr. 57, 1981, p. 213-221.

Remerciements : Ce travail fait suite à des questions de E. Thomas.