SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GÉRALD MAZZIOTTO

Régularité à droite des surmartingales à deux indices et théorème d'arrêt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 418-424

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__418_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REGULARITE A DROITE DES SURMARTINGALES A DEUX INDICES ET THEOREME D'ARRET

G. MAZZIOTTO

Parmi les surmartingales à deux indices, celles qui, de plus, engendrent une mesure de Doleans positive, sont assez bien connues ([4]) ([3]); on les appelle ici des V-surmartingales. Par la méthode des Laplaciens approchés ([6]), on montre que toute surmartingale est limite de différences de V-surmartingales, dans un sens à préciser. Cela entraine notamment que toute surmartingale dont l'espérance est continue à droite, admet une modification suffisamment régulière pour vérifier un théorème d'arrêt par points d'arrêt.

1- Généralités:

1.1. Les processus que l'on considère ici, sont, d'une manière générale à valeurs réelles, indexés sur l'ensemble $\mathbb{T} = [0,\infty]^2$ et définis sur un espace de probabilités complet $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mathbb{P})$. Une relation d'ordre partiel est définie sur $\mathbb{T}$ par:

$\forall\ s=(s_1,s_2),\ t=(t_1,t_2) \in \mathbb{T} : s < t$ ssi $s_1 \leqq t_1$ et $s_2 \leqq t_2$.

Etant donné un point $h=(h_1,h_2)$ de $\mathbb{T}$, on convient de noter $h'=(h_1,0)$ $h"=(0,h_2)$ et $|h|=h_1h_2$. On note aussi $\mathbb{T}^* =]0,\infty[^2$.

Sur $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mathbb{P})$, on considère une filtration $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}_t;\ t \in \mathbb{T})$ vérifiant les axiomes classiques ([7]), F1, F2, F3, F4 de la théorie des processus à deux indices réels. Pour toutes les notions, règles de calcul, propriétés relatives à cette théorie, on se référe ici aux exposés de ([7]).

Les projections optionnelle, 1-optionnelle, 2-optionnelle d'un processus mesurable borné, X, sont définies selon ([1]); on les note ${}^{o}X$, ${}^{o1}X$, ${}^{o2}X$ respectivement. Etant donnés deux processus, X et Y, on dit que X est une modification de Y ssi: $\forall\ t \in \mathbb{T}$, $X_t = Y_t$ p.s.

Un point d'arrêt (p.a.) est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{T}$ telle que

$\forall\ t \in \mathbb{T} : \{T < t\} \in \underline{\underline{F}}_t$.

1.2. Une surmartingale est un processus, $X = (X_t\ ;\ t \in \mathbb{T})$, mesurable, adapté à la filtration $\underline{\underline{F}}$ et intégrable, tel que :

$\forall\ t,\ h \in \mathbb{T} : E(X_{t+h} / \underline{\underline{F}}_t) \leqq X_t$ p.s. .

Un potentiel est une surmartingale positive ($X \geqq 0$) telle que, pour toute suite croissante de points de $\mathbb{T}$, $(t(n);\ n \in \mathbb{N})$, où soit la suite des premières coordonnées, soit la suite des secondes, converge vers ∞, on a

$\lim X_{t(n)} = 0$ et $\forall\ t : X_{t_1\infty} = X_{\infty t_2} = X_{\infty\infty} = 0$ p.s. .

Un processus réel quelconque, X, est dit à décroissance rapide (à l'infini) si il existe $c > 0$ et $\alpha \in \mathbb{T}^*$ tels que

$$\mathbb{P}(\{\forall\, t : |X_t| \leqq c\, e^{-\alpha.t}\}) = 1 ,$$

où $\alpha.t$ désigne le produit scalaire $\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2$.
On remarque que si X est une surmartingale positive, alors $\forall\, c > 0$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{T}^*$, le processus $X^{c\alpha}$, défini par

$$\forall\, t \in \mathbb{T} : X_t^{c\alpha} = (X_t \wedge c)\, e^{-\alpha.t} ,$$

est un potentiel à décroissance rapide.
La variation d'un processus X, entre deux points t et t+h de $\mathbb{T}$, est la v.a. définie par

$$X_{]t,t+h]} = X_t + X_{t+h} - X_{t+h'} - X_{t+h"} .$$

On appelle V-surmartingale (resp. V-potentiel) une surmartingale (resp. un potentiel),X, cad dans $\mathbb{L}^1$, et qui engendre une mesure de Doleans positive ([2]),([3]),([7]), sur la tribu prévisible de $\Omega x\mathbb{T}$.
Un processus adapté, A, est dit croissant si, les processus à un indice $(A_{t'}\ ;\ t \in \mathbb{T})$ et $(A_{t"}\ ;\ t \in \mathbb{T})$ sont croissants et si

$$\forall\, t, h : A_{]t,t+h]} \geqq 0 \text{ p.s.} .$$

1.3. Un processus est dit cad si presque toutes ses trajectoires sont des fonctions continues à droite sur $\mathbb{T}$ ([7]).
Suivant ([10]) une surmartingale, X, est dite de la classe (R) si il existe une suite croissante $(X^n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ de surmartingales cad telle que

$$\mathbb{P}(\{\forall\, t : X_t = \lim_n X_t^n\}) = 1 .$$

De même on définit, par récurrence, les surmartingales de la classe (R^n) comme limites croissantes de surmartingales de la classe (R^{n-1}), $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Une surmartingale est dite de la classe (RR) si il existe n telle qu' elle soit de la classe (R^n).
Remarque 1.3: i) Dans la théorie classique, les surmartingales de la classe (R) se réduisent aux surmartingales cad (18-VI de ([5])). Ici, il existe des martingales de la classe (R) qui ne sont nulle part cad([10]) mais je ne sais pas si la classe (R^n) est strictement plus grande que la classe (R^{n-1}) pour $n > 1$.
ii) Une surmartingale de la classe (RR) est, par définition, limite d' d'une suite (pas nécessairement croissante) de surmartingales cad, dont elle est aussi l'enveloppe supérieure. Elle est donc à trajectoires semi-continues inférieurement (sci) pour la topologie droite (à droite); l'inverse est il vrai ?
1.4. Dans ([10]) J.B. Walsh établit un théorème d'arrêt par p.a. pour les surmartingales de la classe (R), en se ramenant grâce à la notion de chemin croissant optionnel au cas classique. Il est facile d'étendre ce résultat aux surmartingales de classe (RR).

PROPOSITION 1.3 : Si X est une surmartingale de la classe (RR) et si S et T sont deux p.a. bornés tels que $S < T$ p.s. , on a

$$E (X_T / \underline{\underline{F}}_S) \leqq X_S \quad \text{p.s.} .$$

Démonstration: D'après ([10]) c'est vrai pour la classe (R), on suppose qu'il en est de même pour n fixé. Soit X de la classe (R^{n+1}), par hypothèse, elle est limite d'une suite croissante $(X^k ; k \in \mathbb{N})$ de surmartingales de la classe (R^n). Pour tous p.a. S, T bornés, tels que $S < T$, on a $E (X^k_T / \underline{\underline{F}}_S) \leqq X^k_S$

Par le Lemme de Fatou, X satisfait la même relation, car

$$X_S = \lim_k \uparrow X^k_S \quad \text{et} \quad X_T = \lim_k \uparrow X^k_T$$

D'où le résultat annoncé, par récurrence.

2- Régularité des V-surmartingales:

2.1. Les V-surmartingales font partie d'une famille de processus à deux indices étudiée depuis déjà longtemps, notamment par R. Cairoli ([4]) qui a établi que ceux ci admettaient une décomposition du type Doob-Meyer.

PROPOSITION 2.1 : ([4]) Si X est une V-surmartingale positive, il existe un processus, A, croissant, prévisible, cad (et même pourvu de limites dans les trois autres quadrants), intégrable et une martingale faible, m, tels que

$$X = m + A \quad \text{et} \quad E (A_{\infty\infty}) = E (X_0) .$$

Si X est un V-potentiel, il est facile d'exprimer la martingale faible m à partir de A; on en déduit alors la formule classique

$$\forall\, t \in \mathbb{T} : X_t = E \left(\int_t^\infty dA_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t \right) \quad \text{p.s.}$$

où la notation $\int_t^\infty$ désigne une intégration sur l'intervalle $]t,\infty]$.

2.2. A priori, il ne suffit pas que X soit borné pour que A le soit, par contre il existe des relations, ([2]), ([3]) dans des espaces du type $\mathbb{L}^p$ (avec $1 \leqq p < \infty$) entre des normes adéquates de X et A. On en n'aura pas besoin dans la suite car les V-potentiels que l'on considérera seront associés à des processus croissants bornés par construction. Dans ce cas particulier, on a le résultat de régularité suivant.

PROPOSITION 2.2 : Si X est un V-potentiel de processus croissant prévisible associé, A, borné, alors X admet une modification, $\tilde{X}$, cad.

Démonstration: Il suffit de choisir

$$\tilde{X} = A + {}^{o}(A_{\infty\infty}) - {}^{o1}(A_{\infty .}) - {}^{o2}(A_{. \infty}) .$$

Comme A est borné et cad, chacun des termes est encore cad d'après les travaux , ([1]) et ([8]) , sur les diverses projections optionnelles.

Ce résultat s'étend en fait aux V-surmartingales.

COROLLAIRE 2.2 : Si X est une V-surmartingale positive de processus croissant prévisible associé, A, borné, alors il existe des processus bornés et cad : Y, Y^o, Y^1, Y^2, qui sont, respectivement, un V-potentiel, une martingale, une martingale selon une coordonnée et un potentiel selon l'autre, tels que

$$\forall\, t : X_t = Y_t + Y^o_t + Y^1_t + Y^2_t \quad \text{p.s.} \quad .$$

Démonstration: On choisit des modifications cad-lag des surmartingales à un indice $(X_{u\infty}\ ;\ u \in \mathbb{R}_+)$ et $(X_{\infty u}\ ;\ u \in \mathbb{R}_+)$ et on pose

$$Y_t = {}^o(X_{]t,\infty]})_t \quad , \quad Y^1_t = {}^{o2}(X_{\cdot\infty} - {}^{o1}(X_{\infty\infty}))_t \quad , \quad Y^o_t = {}^o(X_{\infty\infty})_t$$

et une formule analogue pour l'autre.
Tous ces processus sont cad: d'après la Proposition 2.2 pour Y et d'après les résultats ([8]),([1]) sur les projections optionnelles de processus cad, pour les autres.

3- Formule des Laplaciens approchés:

3.1. Classiquement, cette formule ([5]) est utilisée pour évaluer le processus croissant prévisible associé à une surmartingale à un indice cad-lag. Initialement, en théorie du Potentiel ([6]), elle permet d'exprimer certaines fonctions excessives comme limite de potentiels. C'est ainsi qu'on l'utilise ici, dans le cadre des processus à deux indices.
3.2. Etant donné un processus, X, borné et mesurable sur $(\Omega\times\mathbb{T},\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{T}})$, on peut, grâce aux résultats sur le calcul stochastique dépendant d'un paramètre ([2]),([9]), lui associer au moins un processus (à quatre indices) $p(X) = (p_s(X)_t\ ;\ s,t \in \mathbb{T})$ borné et mesurable sur $(\Omega\times\mathbb{T}\times\mathbb{T},\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}})$ tel que

$$\forall\, s,t \in \mathbb{T} : p_s(X)_t = E\ (\ X_{s+t}\ /\ \underline{\underline{F}}_t\ ) \quad \text{p.s.}$$

Pour $h \in \mathbb{T}^*$ fixé, on définit alors le processus borné et mesurable sur $(\Omega\times\mathbb{T},\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{T}})$, X^h, suivant

$$\forall\, t \in \mathbb{T} : X^h_t = |h|^{-1} \int_0^h p_s(X)_t\, ds$$

On remarque que si on remplace, dans cette formule, le processus p(X) par une modification (pourvu qu'elle soit encore mesurable) on ne change le processus X^h que sur un ensemble evanescent. Ceci autorise la notation plus parlante suivante

$$\forall\, t \in \mathbb{T} : X^h_t = |h|^{-1} \int_0^h E(X_{s+t}\ /\ \underline{\underline{F}}_t)\, ds$$

en convenant que l'intégrale de Lebesgue est toujours évaluée sur la version mesurable de l'espérance conditionnelle. De même on remarque que si $\forall\, t : Y_t \geq 0$ p.s. , alors $\forall\, t : \int_0^t Y_s\, ds \geq 0$ p.s. .
3.3. De façon analogue, on définit les processus suivants

$$\forall\, t : A^{h+}_t = |h|^{-1} \int_0^t (E(X_{]s,s+h]}\ /\ \underline{\underline{F}}_s) \vee 0)\, ds \quad ,$$

$$A^{h-}_t = -|h|^{-1} \int_0^t (E(X_{]s,s+h]}\ /\ \underline{\underline{F}}_s) \wedge 0)\, ds \quad , \quad A^h_t = A^{h+}_t - A^{h-}_t \quad .$$

Par construction, les processus A^{h+} et A^{h-} sont croissants, à trajectoires cad (et même cad-lag), nuls sur les axes, A^h est à variation bornée sur tout domaine borné et ils sont adaptés. Si X est un processus à décroissance rapide à l'infini, alors les v.a. $A^{h+}_{\infty\infty}$, $A^{h-}_{\infty\infty}$ et $A^{h}_{\infty\infty}$ sont bien définies et bornées. De plus

LEMME 3.3 : Etant donné un processus mesurable à décroissance rapide, X, pour tout h fixé dans $\mathbb{T}^*$, on a

$$\forall\, t : X^h_t = E\left(\int_t^\infty dA^h_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t \right) \quad p.s. \quad .$$

Démonstration: On développe et on change de variables dans cette formule

$$\begin{aligned} E\left(\int_t^\infty dA^h_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t\right) &= |h|^{-1}\, E\left(\int_t^\infty (X_s + p_h(X)_s - p_{h'}(X)_s - p_{h''}(X)_s)\, ds \,/\, \underline{\underline{F}}_t\right) \\ &= |h|^{-1} \int_0^\infty (p_s(X)_t + p_{s+h}(X)_t - p_{s+h'}(X)_t - p_{s+h''}(X)_t)\, ds \\ &= |h|^{-1} \int_0^h p_s(X)_t\, ds = X^h_t \quad p.s. \quad . \end{aligned}$$

3.4. Sous les hypothèses du Lemme 3.3, on a donc

$$\forall\, t : X^h_t = E\left(\int_t^\infty dA^{h+}_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t\right) - E\left(\int_t^\infty dA^{h-}_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t\right) \quad p.s. \quad .$$

Cela signifie que X^h est la différence de deux potentiels de mesures bornées. D'après la Proposition 2.2 , il existe donc une modification de X^h qui est cad.

3.5. On étudie maintenant la famille des processus $(X^h;\ h \in \mathbb{T}^*)$.

LEMME 3.5 : Etant donnée une surmartingale positive, X, à décroissance rapide, on a :

i) $\forall\, h \in \mathbb{T}^*$: X^h est une surmartingale à décroissance rapide

ii) $\forall\, h, k \in \mathbb{T}^*$: $h > k \Rightarrow \forall\, t : X^k_t \geq X^h_t$ p.s.

iii) $\forall\, h \in \mathbb{T}^*, \forall\, t \in \mathbb{T}$: $X_t \geq X^h_t$ p.s. .

Démonstration: i) Pour h fixé, soit $k > 0$; on a pour tout t :

$$E(X^h_t - X^h_{t+k} \,/\, \underline{\underline{F}}_t) = |h|^{-1} \int_0^h E(X_{t+s} - X_{t+s+k} \,/\, \underline{\underline{F}}_t)\, ds \geq 0 \quad p.s.$$

ii) Soient $h=(h_1,h_2)$ et $k=(\alpha_1 h_1, \alpha_2 h_2)$ avec $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$. Alors, par définition,

$$\begin{aligned} X^k_t - X^h_t &= |\alpha||h|^{-1} \int_0^{\alpha_1 h_1} \int_0^{\alpha_2 h_2} E(X_{s+t} \,/\, \underline{\underline{F}}_t)\, ds_1 ds_2 \\ &\quad - |h|^{-1} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} E(X_{s+t} \,/\, \underline{\underline{F}}_t)\, ds_1 ds_2 \\ &= |h|^{-1} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} E(X_{t+(\alpha_1 s_1, \alpha_2 s_2)} - X_{t+s} \,/\, \underline{\underline{F}}_t)\, ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

Comme X est une surmartingale, la quantité intégrée est toujours positive

iii) Le raisonnement est analogue.

3.6. On considère une suite $(h(n); n \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\mathbb{T}^*$ qui décrôît vers 0 et on choisit les modifications cad des processus $X^{h(n)}$ précédents que l'on note X^n, $\forall n$. D'après le Lemme 3.5 $(X^n; n \in \mathbb{N})$ est une suite

croissante majorée de surmartingales cad; on désigne par $\hat{X}$ la limite, qui est encore une surmartingale bornée. Donc, par construction, $\hat{X}$ est de la classe (R).

PROPOSITION 3.6 : Si X est une surmartingale positive à décroissance rapide telle que la fonction $t \to E(X_t)$ est cad sur $\mathbb{T}$, alors elle admet une modification de la classe (R) : $\hat{X}$ précédemment défini.

Démonstration: Par construction, $\forall$ t, on a $\hat{X}_t \leq X_t$ p.s. . D'autre part

$$E(\hat{X}_t) = E\left(\lim |h(n)|^{-1} \int_0^{h(n)} E(X_{t+s} / \underline{\underline{F}}_t)\, ds\right)$$

$$= \lim \int_0^1 E(X_{t+s|h(n)|})\, ds = E(X_t)$$

D'où, finalement, $X_t = \hat{X}_t$ p.s. .

3.7. Ce résultat se généralise de la manière suivante.

PROPOSITION 3.7 : Toute surmartingale bornée (resp. positive)X, telle que la fonction $t \to E(X_t)$ soit cad, admet une modification de la classe (R^2) (resp. de la classe (R^3)).

Démonstration: Dans le premier cas, on peut se ramener à considérer une surmartingale positive bornée par une constante K. Pour $\alpha \in \mathbb{T}^*$, on pose

$$\forall\ t : X_t^\alpha = e^{-\alpha.t} X_t \quad ;$$

X^α est encore une surmartingale positive, à décroissance rapide cette fois: elle admet une modification de la classe (R) d'après la Proposition 3.6 . En prenant une suite $(\alpha(n); n \in \mathbb{N})$ qui décroît vers 0, on a

$$\forall\ t : X_t = \lim_n \uparrow X_t^{\alpha(n)}$$

d'où le résultat. Dans le deuxième cas, on considère une suite $(X^n; n \in \mathbb{N})$ du type

$$\forall\ t : X_t^n = X_t \wedge n$$

et on est ramené au cas précédent.

REFERENCES :

([1]) D. BAKRY : "Théorèmes de section et de projection pour les processus à deux indices" , Z. f. Wahr. 55, (1981), pp 55-71

([2]) D. BAKRY : "Semimartingales à deux indices" , Sém. de Proba. XVI, Lect. Notes in Maths , Springer Verlag (1982)

([3]) M.D. BRENNAN : "Planar Semimartingales" , J. Mult. Anal. 2 (1979), pp 465-486

([4]) R. CAIROLI : "Décomposition de processus à indices doubles" , Sém. de Proba V, Lect. Notes in Maths 191, Springer Verlag (1971)

([5]) C. DELLACHERIE - P.A. MEYER : "Probabilités et Potentiel" , Hermann (1975 & 1980)

([6]) P.A. MEYER : "Probabilités et Potentiel" , Hermann (1966)

([7]) P.A. MEYER : "Théorie élémentaire des processus à deux indices" , Colloque ENST-CNET, Lect. Notes in Maths 863, Springer Verlag (1981)

([8]) A. MILLET - L. SUCHESTON : "On Regularity of multiparameter Amarts and Martingales" , Z. f. Wahr. 56, (1981), pp 21-45

([9]) C. STRICKER - M. YOR : "Calcul stochastique dépendant d'un paramètre" , Z. f. Wahr. 45, (1978), pp 109-133

([10]) J.B. WALSH : "Optional Increasing Paths" , Colloque ENST-CNET Lect. Notes in Maths 863, Springer Verlag (1981)

G. MAZZIOTTO
PAA / ATR / MTI
C. N. E. T.
38-40 rue du G. Leclerc
92131 - ISSY LES MOULINEAUX