SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

HALIM DOSS
PIERRE PRIOURET

Petites perturbations de systèmes dynamiques avec réflexion

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 353-370
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__353_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PETITES PERTURBATIONS DE SYSTEMES DYNAMIQUES AVEC REFLEXION

PAR HALIM DOSS ET PIERRE PRIOURET.

Laboratoire de Probabilités, 4, Place Jussieu, Tour 56, 75005 PARIS

Soient D un ouvert connexe régulier de R^p et $\nu(x)$ un champ de vecteurs non tangents sur ∂D ; on considère la solution $(x^\varepsilon, a^\varepsilon)$ de :

$$x_t^\varepsilon = x + \varepsilon \int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon) dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon) ds + \int_0^t \nu(x_s^\varepsilon) da_s^\varepsilon$$

avec $x_t^\varepsilon \in \bar{D}$ et a_t^ε processus croissant continu ne croissant que sur $\{s ; x_s^\varepsilon \in \partial D\}$. On suppose de plus que b_ε tend vers b lorsque ε tend vers 0. Il s'agit d'obtenir pour $A \subset C_x([0,T], \bar{D})$, une évaluation asymptotique de $P(x_\cdot^\varepsilon \in A)$. Pour cela, on construit une fonction $\theta^\star(x,v)$ sur $\bar{D} \times R^p$ (voir le *th. 4.2*), telle que si :

$$\varphi \in A,\ \lambda(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T \theta^\star(\varphi_t, \dot{\varphi}_t - b(\varphi_t)) dt \quad \text{et} \quad \Lambda(A) = \inf(\lambda(\varphi),\ \varphi \in A),$$

on ait :

$$(0.1) \quad -\Lambda(\overset{o}{A}) \leqslant \varliminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P(x^\varepsilon \in A) \leqslant \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P(x^\varepsilon \in A) \leqslant -\Lambda(\bar{A}).$$

Ce résultat donne immédiatement une évaluation asymptotique, lorsque $t \to 0$, de $P_x(\xi_t \in \Gamma)$ où (ξ_t, P_x) est une diffusion réfléchie sur $\bar{D}$ dont le générateur coïncide, sur les fonctions h de classe C^2 telles que $\frac{\partial h}{\partial \nu} = 0$ sur ∂D, avec un opérateur semi-elliptique L.

On suppose que σ et b_ε sont lipschitziens bornés mais on ne suppose pas σ non dégénérée. Lorsque σ est inversible, ce problème a été étudié par Anderson et Orey. [1].

La méthode de ces auteurs consiste à étendre les estimations de Ventcel-Freidlin [5] à des E.D.S. dépendant du passé puis à en déduire le résultat. Notre approche, qui permet de traiter le cas où σ est dégénérée, est différente. Elle est directement inspirée d'Azencott [2].

Elle consiste à montrer que si le mouvement brownien B est près d'une fonction régulière f, le processus x^ε est près de g, solution d'une équation différentielle déterministe avec réflexion, ceci avec une grande probabilité ; et, à partir de là, à transporter le résultat classique de grandes déviations pour le mouvement brownien. En particulier si $D = R^d$ et donc $\partial D = \emptyset$, on retrouve le cas des E.D.S. ordinaires.

1. *Cas du demi-espace.*

On note R_p^+ l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_p)$, $x_1 \geqslant 0$; $e_1 = (1,0,\ldots,0)$.

On se donne sur R_p^+ un champ de matrices $p \times d$ $\sigma(x)$ et des champs de vecteurs $b_\varepsilon(x)$, $b(x)$ vérifiant :

$$(1.1)\qquad |\sigma(x)| \leqslant M, |b_\varepsilon(x)| \leqslant M, |\sigma(x)-\sigma(y)| \leqslant K|x-y|, |b_\varepsilon(x)-b_\varepsilon(y)| \leqslant K|x-y|$$

$b_\varepsilon(x)$ tend uniformément vers $b(x)$ lorsque ε tend vers 0.

Enfin $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, \underline{\underline{F}}, B_t, P)$ désigne un mouvement brownien issu de 0 à valeurs R^d.

On considère l'équation :

$$(1.2)\qquad x_t^\varepsilon = x+\varepsilon \int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon)dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon)ds + e_1.a_t^\varepsilon \; ; \quad (x_t^\varepsilon)_1 \geqslant 0$$

et a_t^ε processus continu, croissant, $a_0^\varepsilon = 0$ et $a_t^\varepsilon = \int_0^t 1_{\{x_1=0\}}(x_s^\varepsilon)da_s^\varepsilon$.

Il est bien connu que, sous les hypothèses (1.1), il y a existence et unicité des solutions de (1.2). Rappelons la construction donnée par Anderson et Orey [1] : pour $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_p) \in C(R_+,R^n)$, on note $\xi\omega = \tilde{\omega}_1$ et $\Gamma\omega=(\omega_1+\tilde{\omega}_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$ où $\tilde{\omega}_1(t) = -\inf_{s\leqslant t}(\omega_1(s) \wedge 0)$. Alors Γ vérifie $\sup_{s\leqslant t}|\Gamma_s\omega - \Gamma_s\omega'| \leqslant 2 \sup_{s\leqslant t}|\omega(s) - \omega'(s)|$ et si y_t^ε est solution de :

$$(1.3)\qquad y_t^\varepsilon = x + \varepsilon \int_0^t \sigma(\Gamma_s\, y^\varepsilon)dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(\Gamma_s\, y^\varepsilon)ds,$$

on a $x_t^\varepsilon = \Gamma_t\, y^\varepsilon$ et $a_t^\varepsilon = \xi_t\, y^\varepsilon$.

Maintenant, soit $f \in C(R_+,R^d)$, absolument continue avec $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 dx < +\infty$ pour tout $T > 0$, et soient h_t et a_t les uniques solutions de :

$$(1.4)\qquad h_t = z + \int_0^t \{\sigma(h_s).\dot{f}_s + b(h_s)\}ds + e_1.a_t \; ; \; (h_t)_1 \geqslant 0$$

et a_s processus croissant, continu, $a_0 = 0$ et $\int_0^t 1_{\{x_1=0\}}(h_s)da_s = a_t$.

On a encore $h(t) = \Gamma_t k$ et $a(t) = \xi_t k$ où k est solution de :

$$(1.5)\qquad k(t) = z + \int_0^t \{\sigma(\Gamma_s k)\dot{f}_s + b(\Gamma_s k)\}ds.$$

Le but de ce paragraphe est de montrer (on note $||f||_v^u = \sup_{u\leqslant s\leqslant v}|f(s)|$, $||f||_T = ||f||_T^0$), $T > 0$ étant fixé :

Théorème 1.1 : Pour tout $A,R,\rho > 0$, il existe $\varepsilon_0,\alpha, r > 0$ tels que si

$\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leq A$, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, si $|z-x| < r$, on a :

$$\varepsilon^2 \log P(||x^\varepsilon - h||_T + ||a^\varepsilon - a||_T > \rho, \ ||\varepsilon B - f||_T < \alpha) \leq -R.$$

dém : Compte tenu du caractère lipschitzien des applications Γ et ξ, il suffit d'évaluer $P(||y^\varepsilon - k||_T > \rho, \ ||\varepsilon B - f||_T < \alpha)$. Posons,

$$(1.6) \qquad c_\varepsilon(s,x) = \sigma(x)\dot{f}_s + b_\varepsilon(x) \ ; \ c(s,x) = \sigma(x)\dot{f}_s + b(x)$$

et supposons que $\bar{y}^\varepsilon$ et $\bar{k}$ vérifient :

$$(1.7) \qquad \bar{y}^\varepsilon_t = x + \varepsilon \int_0^t \sigma(\Gamma_s \bar{y}^\varepsilon) dB^\varepsilon_s + \int_0^t c_\varepsilon(s, \Gamma_s \bar{y}^\varepsilon) ds, \quad B^\varepsilon \text{ de même loi que } B \ ;$$

$$(1.8) \qquad \bar{k}_t = z + \int_0^t c(s, \Gamma_s \bar{k}) ds$$

alors,

Lemme 1.2 : Pour tout $A,R, \rho > 0$, il existe $\varepsilon_0, \alpha, r > 0$ tels que si $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leq A$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $|z-x| < r$, on a :

$$\varepsilon^2 \log P(||\bar{y}^\varepsilon - \bar{k}||_T > \rho, \ ||\varepsilon B^\varepsilon||_T < \alpha) \leq -R.$$

dém : On omettra le ε dans B^ε les calculs étant des calculs de lois, ε fixé, et aussi les barres sur $\bar{y}$ et $\bar{k}$ ainsi que T dans $||.||_T$.

Lemme 1.3 : Pour tout $A,R, \rho > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leq A$ et $\varepsilon \leq 1$, on a $\varepsilon^2 \log P(||\int_0^\cdot \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon) dB_s \ || > \rho, \ ||\varepsilon B|| < \alpha) \leq -R$.

dém : On introduit le partage de $[0,T]$, de pas $\frac{T}{n}$: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{T}{n}, \ldots, t_n = T$, et on définit $y^{\varepsilon,n}_t$ par $y^\varepsilon_{t_k}$ si $t_k \leq t < t_{k+1}$. Notons que l'application Γ s'étend au fonctions c.a.d. l.a.g. donc, en particulier, au processus $y^{\varepsilon,n}$ avec la même propriété : $||\Gamma_\cdot \omega - \Gamma_\cdot \omega'|| \leq 2||\omega - \omega'||$.

Alors, pour tout n et $\gamma > 0$, $\{||\int_0^\cdot \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon) dB_s|| > \rho, \ ||\varepsilon B|| < \alpha\} \subset E_1 \cup E_2 \cup E_3$

avec $E_1 = \{||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}|| > \gamma\}$, $E_2 = \{||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}|| \leq \gamma, \ ||\int_0^\cdot \varepsilon(\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon) - \sigma(\Gamma_s y^{\varepsilon,n})) dB_s|| > \frac{\rho}{2}\}$, $E_3 = \{||\int_0^\cdot \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^{\varepsilon,n}) dB_s \ || > \frac{\rho}{2}, ||\varepsilon B|| < \alpha\}$

Majoration de $P(E_2)$: Comme sur $||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}|| \leq \gamma$, $||\varepsilon(\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)-\sigma(\Gamma_s y^{\varepsilon,n}))||^2 \leq 4\varepsilon^2K^2\gamma^2$, l'inégalité exponentielle entraîne que, pour tout $\varepsilon \leq 1$,

$$P(E_2) \leq 2p \exp\left(-\frac{\rho^2}{16T\varepsilon^2\gamma^2K^2p^2}\right) \leq \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{si } \gamma \text{ est bien choisi.}$$

Majoration de $P(E_1)$: $P(||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}|| > \gamma) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} ||y^\varepsilon - y^{\varepsilon,n}||_{t_{k+1}}^{t_k} > \gamma\right)$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} P(||\int_{t_k}^{\cdot} c_\varepsilon(s,\Gamma_s y^\varepsilon)ds\ ||_{t_{k+1}}^{t_k} > \frac{\gamma}{2}) + \sum_{k=0}^{n-1} P(||\int_{t_k}^{\cdot} \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)dB_s\ ||_{t_{k+1}}^{t_k} > \frac{\gamma}{2})$$

Mais $|\int_{t_k}^{t} c_\varepsilon(s,\Gamma_s y^\varepsilon)ds| = |\int_{t_k}^{t} \sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)\dot{f}_s ds + \int_{t_k}^{t} b_\varepsilon(\Gamma_s y^\varepsilon)ds| \leq M\left(\frac{AT}{n}\right)^{1/2} + M\frac{T}{n}$

donc le premier terme est nul si $n \geq n_1(\gamma)$. Par ailleurs, toujours par l'inégalité exponentielle,

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(||\int_{t_k}^{\cdot} \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)dB_s\ ||_{t_{k+1}}^{t_k} > \frac{\gamma}{2}) \leq 2pn \exp\left(-\frac{n\gamma^2}{8p^2M^2\varepsilon^2T}\right) \leq \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right)$$

si $n \geq n_2(\gamma)$ et pour tout $\varepsilon \leq 1$.

On fixe γ puis n comme ci-dessus, alors,

Majoration de $P(E_3)$: on remarque que $\Gamma_s y^{\varepsilon,n}$ est constant (en s) sur $[\,t_K, t_{K+1}\,[$, égal par exemple à $u_k^{\varepsilon,n} = \Gamma_{t_k} y^{\varepsilon,n}$. D'où, sur $||\varepsilon B|| < \alpha$

$$|\int_0^t \varepsilon\sigma(\Gamma_s y^{\varepsilon,n})dB_s| = |\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(u_k^{\varepsilon,n})\, B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k\wedge t}\ | \leq 2Mn\alpha \quad \text{et} \quad P(E_3) = 0$$

si $\alpha < \rho/4Mn$.

Revenons au *Lemme 1.2*. On a,

$$y_t^\varepsilon - k_t = x-z + \int_0^t (b_\varepsilon(\Gamma_s y^\varepsilon)-b_\varepsilon(\Gamma_s k)ds + \int_0^t (b_\varepsilon(\Gamma_s k)-b(\Gamma_s k))ds + \int_0^t \sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)-\sigma(\Gamma_s k))\dot{f}_s ds + U_t^\varepsilon$$

avec $U_t^\varepsilon = \int_0^t \varepsilon\sigma(\Gamma_s y)dB_s$. D'où,

$$|y_t^\varepsilon - k_t| \leq |x-z| + T||b_\varepsilon - b|| + ||U^\varepsilon|| + K\int_0^t (1+|\dot{f}_s|) \sup_{u\leq s} |y_u^\varepsilon - k_u| ds.$$

Par Gronwall, en posant $B=K\int_0^T (1+|\dot{f}_s|)ds \leq K(T+(AT)^{1/2})$, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $|x-z|\leq r$, $||y^\varepsilon - k|| \leq \frac{\rho}{2} + ||U^\varepsilon|| e^B$, donc,

$P(||y^\varepsilon - k|| > \rho, ||\varepsilon B|| < \alpha) \leq P(||U^\varepsilon|| > \frac{\rho}{2} e^{-B}, ||\varepsilon B|| < \alpha)$ et on conclut facilement par le *Lemme 1.3.*

Montrons maintenant le théorème.

On définit $\overline{P}^\varepsilon$ sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_T)$ par :

$$(1.9) \quad \frac{d\overline{P}^\varepsilon}{dP} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\dot{f}_s, dB_s) - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds\right)$$

alors $\overline{B}_t^\varepsilon = B_t - \frac{1}{\varepsilon} f_t$ est un $(\Omega, \overline{P}^\varepsilon)$ mouvement brownien et,

$$(1.10) \quad y_t^\varepsilon = x + \varepsilon \int_0^t \sigma(\Gamma_s y^\varepsilon) d\overline{B}^\varepsilon + \int_0^t \{\sigma(\Gamma_s y^\varepsilon)\dot{f}_s + b_\varepsilon(\Gamma_s y^\varepsilon)\} ds, \ \overline{P}^\varepsilon \text{ p.s.}$$

Soit $E=\{||y^\varepsilon - k||_T > \rho, ||\varepsilon B - f||_T < \alpha\}$, $V^\varepsilon = \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\dot{f}_s, dB_s))$, alors

$$P(E) \leq P(V^\varepsilon > \exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2}) + P(E \cap (V^\varepsilon \leq \exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2}) \leq 2\exp(-\frac{\lambda^2}{2A\varepsilon^2})$$

$$+ \overline{E}^\varepsilon(\frac{dP}{d\overline{P}^\varepsilon} ; E \cap (V^\varepsilon \leq \exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2})) \leq 2\exp(-\frac{\lambda^2}{2A\varepsilon^2}) + \exp(\frac{A}{2\varepsilon^2})\exp(\frac{\lambda}{\varepsilon^2}) \times$$

$$\overline{P}^\varepsilon(||y^\varepsilon - k||_T > \rho, ||\varepsilon \overline{B}^\varepsilon||_T < \alpha)$$

On choisit alors λ pour que $2\exp(-\frac{\lambda^2}{2A\varepsilon^2}) \leq \frac{1}{2}\exp(-\frac{R}{\varepsilon^2})$ puis ε_0, r, α grâce au *Lemme 1.2* pour que le 2ème terme soit $\leq \frac{1}{2}\exp(-\frac{R}{\varepsilon^2})$.

Remarque : le *théorème 1.1* et sa démonstration sont aussi vrais (avec des modifications d'écriture évidentes) lorsque x^ε est une diffusion sur R^p (cas sans bord). On retrouve alors le *théorème 2.4* d'Azencott [2]. La démonstration ci-dessus est une adaptation de celle du théorème d'Azencott qu'on trouve dans Priouret [3].

Notons $\mathcal{Y}(A)$ l'ensemble des f de $C_0([0,T], R^d)$ telles que $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leq A$; alors, pour tout (z,f) de $R_+^p \times \bigcup_A \mathcal{Y}(A)$ les solutions h_t et a_t de (1.4)

existent. De plus,

Proposition 1.4 : L'application $(z,f) \longmapsto (h,a) \in C([0,T], R^p \times R_+)$ est continue sur $R_+^p \times \tilde{\Phi}(A)$, $\tilde{\Phi}(A)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur $[0,T]$.

dém : Soient $z_n \to z$ et $f_n, f \in \tilde{\Phi}(A)$ telles que $||f_n - f||_T \to 0$. Notons k_t^n la solution de (1.5) relative à z_n et f_n.

$$|k_t - k_t^n| \leq |z - z_n| + \int_0^t |b(\Gamma_s k) - b(\Gamma_s k^n)| ds + \left|\int_0^t \sigma(\Gamma_s k)(\dot{f}_s - \dot{f}_s^n) ds\right|$$

$$+ \left|\int_0^t (\sigma(\Gamma_s k) - \sigma(\Gamma_s k^n))\dot{f}_s^n \, ds\right| \leq |z - z_n| + K \int_0^t \sup_{u \leq s} |k_s - k_s^n| (1 + |\dot{f}_s^n|) ds$$

$$+ \left|\int_0^t \sigma(\Gamma_s k)(\dot{f}_s - \dot{f}_s^n) ds\right| \text{ ; par Gronwall,}$$

$$||k - k^n||_T \leq \{|z - z_n| + \rho^n(T)\} \exp K(T + (TA)^{1/2}) \text{ où } \rho^n(T) = \sup_{t \leq T} \left|\int_0^t \sigma(\Gamma_s k)(\dot{f}_s - \dot{f}_s^n) ds\right|.$$

Remarquons que k_t est a.c. de dérivée p.p. $\dot{k}_t = \sigma(\Gamma_s k)\dot{f}_s + b(\Gamma_s k)$, donc, pour $0 \leq u < v \leq T$, $|\sigma(\Gamma_v k) - \sigma(\Gamma_u k)| \leq K|\Gamma_v k - \Gamma_u k| \leq 2K \sup_{u \leq s \leq v} |k_s - k_u| \leq 2K \int_u^v |\dot{k}_s| ds$

et donc la variation totale de $s \longmapsto \sigma(\Gamma_s k)$ sur $[0,T]$ est majorée par $2K \int_0^T |\dot{k}_s| ds$ donc par une constante $C = C(K,T,A)$.

Alors $\left|\int_0^t \sigma(\Gamma_s k)(\dot{f}_s - \dot{f}_s^n) ds\right| \leq |\sigma(\Gamma_t k)(f_t - f_t^n)| + \left|\int_0^t (f_s - f_s^n) d(\sigma(\Gamma_s k))\right|$

$\leq (M + C) \, ||f - f_n||_t$ et donc $\rho^n(T)$ tend vers 0 avec n.

2. Cas d'un ouvert de R^p.

Soit D un ouvert connexe de R^p. On suppose qu'il existe une fonction u de classe C_b^2 (bornée ainsi que ses deux premières dérivées) telle que :

(2.1) $D = \{u > 0\}$, $\partial D = \{u = 0\}$, $\nabla u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial D$.

On considère, sur ∂D, un champ de vecteurs $\nu(x)$ de classe C_b^2, vérifiant

(2.2) $< \nabla u(x), \nu(x) > \geq \beta > 0$, pour tout $x \in \partial D$.

Sous ces hypothèses, il existe, pour tout $x \in \partial D$ une carte locale (U,φ) contenant x avec $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ de classe C^2 et $U \cap \bar{D} = \{\varphi_1 \geqslant 0\}$ et $\varphi^* \nu = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}/\varphi(x)$. Une telle carte sera dite canonique au bord.

On se donne sur $\bar{D}$ des champs de matrices $p\times d$ $\sigma(x)$ et de vecteurs $b(x)$ et $b_\varepsilon(x)$ vérifiant, pour tout $x,y \in \bar{D}$:

$$|\sigma(x)| \leqslant M,\ |b(x)| \leqslant M,\ |\sigma(x)-\sigma(y)| \leqslant K|x-y|,\ |b_\varepsilon(x)-b_\varepsilon(y)| \leqslant K|x-y| \tag{2.3}$$

b_ε tend vers b uniformément sur $\bar{D}$.

On condidère alors l'équation :

$$\begin{aligned} &x_t^\varepsilon = x+\varepsilon \int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon)dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \nu(x_s^\varepsilon)da_s^\varepsilon \ ;\ \text{avec}\ x_t^\varepsilon \in \bar{D} \\ &a_t^\varepsilon \ \text{processus croissant continu},\ a_0^\varepsilon = 0 \ \text{et}\ a_t^\varepsilon = \int_0^t 1_{\partial D}(x_s^\varepsilon)da_s^\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sous les hypothèses (2.3), il y a existence et unicité des solutions $(x^\varepsilon,a^\varepsilon)$ de (2.4) et elles sont définies sur R_+ (il n'y a pas d'explosion). Ceci se montre en recouvrant $\bar{D}$ par un système de cartes et en construisant de proche en proche la solution de (2.4) jusqu'à un temps d'explosion τ. Mais on a $\lim_{t\uparrow\tau<+\infty} |x_t^\varepsilon| = +\infty$ p.s. d'où on déduit facilement, les coefficients étant bornés, la non-explosion.

L'important pour les calculs est le point suivant. Soit (V,φ) une carte canonique au bord et U un ouvert de $\bar{D}$ tel que $\bar{U} \subset V$; on définit sur R^p,

$$\tilde{\sigma}(y) = J(\varphi)^*\sigma(\varphi^{-1}(y)),\ y \in \varphi(U),\ J(\varphi) \ \text{jacobien de}\ \varphi,$$

$$\tilde{b}_\varepsilon^i(y) = L^\varepsilon \varphi^i(\varphi^{-1}(y)),\ y \in \varphi(U),\ L^\varepsilon \varphi^i = \frac{1}{2}\varepsilon^2(\nabla\varphi_i)^* \sigma\sigma^*\nabla\varphi_i + \nabla\varphi_i\, b_\varepsilon$$

qu'on prolonge sur tout R^p en des fonctions lipschitziennes bornées.

On note alors $x_t^\varepsilon(t_o,\tilde{x}_o)$, $\tilde{a}_t(t_o,\tilde{x}_o)$ les solutions de :

$$x_t^\varepsilon = \tilde{x}_o + \varepsilon \int_{t_o}^t \tilde{\sigma}(\tilde{x}_s^\varepsilon)dB_s + \int_{t_o}^t \tilde{b}_\varepsilon(\tilde{x}_s^\varepsilon)ds + e_1\, \tilde{a}_s^\varepsilon\ ,\ t \geqslant t_o\ ;\ (\tilde{x}_t^\varepsilon)_1 \geqslant 0$$

$\tilde{a}_t^\varepsilon$ processus croissant continu, $\tilde{a}_{t_o}^\varepsilon = 0$, $\int_{t_o}^t 1_{(x_1=0)}(\tilde{x}_s^\varepsilon)d\tilde{a}_s^\varepsilon = \tilde{a}_t^\varepsilon$.

Alors pour $u < v$, on a p.s. sur $\{x_s^\varepsilon \in U \text{ pour tout } s \in [u,v]\}$,

$$\varphi(x_s^\varepsilon) = \tilde{x}_{s-u}^\varepsilon(u,\varphi(x_u^\varepsilon)),\ a_s^\varepsilon - a_u^\varepsilon = \tilde{a}_{s-u}^\varepsilon(u,\varphi(x_u^\varepsilon)) \ \text{pour}\ s \in [u,v].$$

Pour $f \in C([0,T],R^d)$, a.c. avec $\int_0^T |f_s'|^2 ds \leqslant A$, on définit (h_t,a_t) comme

comme solution de :

$$(2.5)\quad h_t = z + \int_0^t \{\sigma(h_s)\dot{f}_s + b(h_s)\}ds + \int_0^t \nu(h_s)da_s \ ; \text{ avec } \quad h_t \in \bar{D},\ a_t \text{ processus}$$

croissant continu, $a_o = 0$ et $\int_0^t 1_{\partial D}(h_s)da_s = a_t$.

Sous (2.3), on établit facilement l'existence sur tout R_+ et l'unicité des solutions de (2.5). On a donc, en posant $g_s = \sigma(h_s)\dot{f}_s + b(h_s)$,

$$(2.6)\quad u(h_t) - u(z) = \int_0^t \nabla u(h_s).g_s\, ds + \int_0^t \nabla u(h_s).\nu(h_s)da_s.$$

Remarquons que si t_o, t_1 sont tels que $h_{t_o} \in \partial D$, $h_{t_1} \in \partial D$ et $h_t \in D$ si $t_o < t < t_1$, on a $\int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).g_s\, ds = 0$ puisque a_s est plate sur $]t_o, t_1[$.

Fixons t, et soit $\Delta = \{s\ ;\ h_s \in \partial D\}$ et $t_o = \inf(s \leqslant t,\ s \in \Delta)$, $t_1 = \sup(s \leqslant t,\ s \in \Delta)$; évidemment $a_s = 0$ si $s \leqslant t_o$ et $a_s = a_{t_1}$ si $t_1 \leqslant s \leqslant t$. De plus,

$$0 = \int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).g_s ds + \int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).\nu(h_s)da_s = \int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).g_s 1_{\partial D}(h_s)ds + \int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).\nu(h_s)da_s$$

car $\int_{t_o}^{t_1} \nabla u(h_s).g_s\ 1_D(h_s)ds = 0$ puisque c'est une somme dénombrable sur des incursions dans D. On en déduit les formules :

$$(2.7)\quad c_t = \int_0^t \nabla u(h_s).\nu(h_s)da_s = -\int_0^t \nabla u(h_s).g_s.1_{\partial D}(h_s)ds$$

$$(2.8)\quad a_t = -\int_0^t \frac{\nabla u(h_s).g_s}{\nabla u(h_s).\nu(h_s)}\ .1_{\partial D}(h_s).ds \quad \text{où} \quad g_s = \sigma(h_s)\dot{f}_s + b(h_s).$$

Compte tenu de (2.2), on en déduit facilement :

Lemme 2.1 : Soient $T, A > 0$ et K un compact et soient (h_t, a_t) les solutions de (2.5) avec $z \in K$ et $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leqslant A$, alors :

(i) h_t et a_t sont absolument continues avec $\dot{h}_t$ et $\dot{a}_t$ dans $L^2([0,T])$

(ii) il existe des constantes $C_1(T,A,K)$ et $C_2(T,A)$ telles que :

$$\sup_{t \leqslant T} |h_t| \leqslant C_1(T,A,K), \quad \int_0^T |\dot{h}_s|^2 ds \leqslant C_2(T,A).$$

On a alors, $(x^\varepsilon,a^\varepsilon)$ et (h,a) désignant les solutions de (2.4) et (2.5),

Théorème 2.2 : Pour tout T,A,R, $\rho > 0$ et K compact de $\bar{D}$, il existe ε_0,α, $r > 0$ tels que si $\int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds \leq A$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $|x-z| \leq r$, $z \in K$, on a :

$$\varepsilon^2 \log P\left[||x^\varepsilon-h||_T + ||a^\varepsilon-a||_T > \rho,\ ||\varepsilon B-f||_T < \alpha\right) \leq -R.$$

Démonstration : D'après le *lemme 2.1*, $\sup_{t\leq T} |h_t| \leq C=C(T,A,K)$. On peut construire $\delta > 0$, $0 < \bar{\alpha} < \bar{\beta}$ et des cartes $(U_1,\varphi_1),\ldots,(U_q,\varphi_q)$ telles que :

1) Les U_i sont soit des ouverts de R^p, soit des cartes canoniques au bord.

2) Les (U_i) recouvrent $\bar{B}(0,C)$ (boule fermée de centre 0, de rayon C)

3) Pour tout $x \in \bar{D} \cap \bar{B}(0,C)$, $B(x,\delta) \subset U_i$ pour un certain i,

4) pour tout i et $x,y \in U_i$, $\bar{\alpha} \leq \dfrac{|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|}{|x-y|} \leq \bar{\beta}$.

Soient $x_1,\ldots,x_q \in \bar{D} \cap \bar{B}(0,C)$ tels que les boules $B(x_j, \frac{\delta}{4})$ recouvrent $\bar{D} \cap \bar{B}(0,C)$ et soit $V_j = B(x_j, \frac{\delta}{2})$. Fixons A,T,R, alors pour tout ρ, il existe $r(\rho)$, $\varepsilon_0(\rho)$, $\alpha(\rho)$ telles que si $f \in \tilde{\Phi}(A)$, si $0 \leq s < t \leq T$ et si, pour un certain i, $h([s,t]) \subset V_i$, on a, pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0(\rho)$,

$$P\left(||x^\varepsilon-h||_s^t + ||a^\varepsilon-a||_s^t > \rho,\ |x_s^\varepsilon-h_s|+|a_s^\varepsilon-a_s| \leq r(\rho), ||\varepsilon B-f||_T < \alpha(\rho)\right] \leq \exp\left(-\frac{R+1}{\varepsilon^2}\right).$$

Ceci résulte du *théorème 1.1* car compte tenu de 3) et 4) ci-dessus, une telle probabilité s'évalue dans une carte (U_i,φ_i) dès que $\rho < \frac{\delta}{2}$.

Définissons $t_0 = 0$, $t_1 = \inf(t > t_0;\ |h_t-z| > \frac{\delta}{4}),\ldots,t_{i+1} = \inf(t > t_i;\ |h_t-h_{t_i}| > \frac{\delta}{4}),\ldots$

Comme $|h_t-h_s| = |\int_s^t h_u\, du| \leq |t-s|^{1/2}\, C_2^{1/2}(T,A)$ (*lemme 2.1*), on construit ainsi une suite $t_0 = 0 < \ldots < t_m = T$ avec $m \leq N=N(T,A,K)$ et $h([t_i, t_{i+1}]) \subset V_j = B(x_j, \frac{\delta}{2})$ pour un certain j. Alors, $P(||x^\varepsilon-h||_T + ||a^\varepsilon-a||_T > \rho,\ ||\varepsilon B-f||_T < \alpha)$

$\leq P(||\ |x^\varepsilon-h|+|a^\varepsilon-a|\ ||_T > \rho/2,\ ||\varepsilon B-f||_T < \alpha) \leq P\left[||\ |x^\varepsilon-h|+|a^\varepsilon-a|\ ||_{t_1}^0 > \rho_m,\ ||\varepsilon B-f||_T < \alpha\right]$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} P(||\ |x^\varepsilon-h|+|a^\varepsilon-a|\ ||_{t_{i+1}}^{t_i} > \rho_{m-i}, |x_{t_i}^\varepsilon-h_{t_i}|+|a_{t_i}^\varepsilon-a_{t_i}| \leq \rho_{m-i+1}, ||\varepsilon B-f||_T < \alpha],$$

où $\rho_1=\rho/2$, $\rho_{j+1}= \inf(r(\rho_j),\rho_j)$.

Donc posant $\alpha=\inf(\alpha(\rho_1),\ldots,\alpha(\rho_N)),\varepsilon_o= \inf(\varepsilon(\rho_1),\ldots,\varepsilon(\rho_N)),r=\inf(r(\rho_1),\ldots,r(\rho_N))$;

si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$, $|x-z| \leqslant r$,

$$P(||x^\varepsilon-h||_T + ||a^\varepsilon-a||_T > \rho \ ; \ ||\varepsilon B-f||_T < \alpha) \leqslant N \exp\ (- \frac{R+1}{\varepsilon^2}\ ).$$

Il suffit alors de choisir $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ pour que $N \exp (- \frac{R+1}{\varepsilon^2}\ ) \leqslant \exp(- \frac{R}{\varepsilon^2}\ )$.

Etendons maintenant la *proposition 1.4.*

Proposition 2.3 : Pour tout $A > 0$, l'application de $\overline{D} \times \mathcal{Y}(A)$ dans $C([0,T],$ $\overline{D} \times R_+)$ qui à (z,f) associe (h,a) solution de (2.6) est continue, $\mathcal{Y}(A)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme.

dem : on conserve les notations de la démonstration du *théorème 2.2.* Soit alors $t_o= 0 <\ldots< t_n= T$ tels que $h([t_i,t_{i+1}]) \subset V_j= B(x_j, \frac{\delta}{2}\ )$ pour un certain j. On note (h^n,a^n) les solutions de (2.5) relatives à z_n et f_n et on suppose $z_n \to z$, $||f^n-f||_T \to 0$ en restant dans $\mathcal{Y}(A)$. Comme $h([t_o,t_1]) \subset V_n$, tout un voisinage d'ordre $\frac{\delta}{2}$ de $h([t_o,t_1])$ est inclus dans une carte $(U_{j'}, \varphi_{j'})$, on a *(prop. 1.4)*, h^n_t tend vers h_t et a^n_t tend vers a_t uniformément sur $[0,t_1]$; alors $h^n(t_1) \to h(t_1)$ et $h([t_1,t_2]) \subset V_{j''}$ et on recommence...

3. *Transport des estimations de Ventcel-Freidlin.*

Dans ce paragraphe nous présentons des résultats d'Azencott [2] sous une forme synthétique et bien adaptée à notre situation.

$T > 0$ est fixé, on note $\mathcal{C}_o$ l'ensemble des applications continues de $[0,T]$ dans R^d nulles en 0, muni de la topologie de la convergence uniforme. On définit pour $f \in \mathcal{C}_o$,

$$(3.1) \qquad \mathcal{I}(f) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds, \text{ si } f \text{ est a.c. ; } +\infty \text{ sinon.}$$

Rappelons que $\mathcal{I}$ est s.c.i. sur $\mathcal{C}_o$ et $\mathcal{Y}(A) = \{f \in \mathcal{C}_o, \mathcal{I}(f) \leqslant A\}$ compact.

$(\Omega,\underline{\underline{F}}_t,\underline{\underline{F}},B_t,P)$ étant un brownien à valeurs R^k issu de 0, nous utiliserons les deux estimations classiques suivantes :

(i) pour tout $f \in \tilde{C}_0$, $\alpha > 0$, $\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P(||\varepsilon B - f|| < \alpha) \geqslant -\overset{\sim}{\lambda}(f)$ uniformément sur $\overset{\sim}{\Phi}(A)$.

(ii) pour tout fermé F de $\tilde{C}_0$, $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P(\varepsilon B \in F) \leqslant -\overset{\sim}{\Lambda}(F) = -\inf(\overset{\sim}{\lambda}(f), f \in F)$.

Soit (S,δ) un espace métrique, $C=C([0,T],S)$, d la distance usuelle sur C, $C_x = \{g \in C, g_0 = x\}$; on suppose donnés :

1) pour tout $x \in S$, des processus continus, $\underline{F}_t$ adaptés $y_t^\varepsilon(x)$ avec $y_0^\varepsilon(x)=x$,

2) une application $\beta : (z,f) \to \beta_z(f)$ de $S \times \bigcup_A \overset{\sim}{\Phi}(A)$ dans C_z, continue sur $S \times \overset{\sim}{\Phi}(A)$ telle que : pour tout compact K de S, tout $A,R,\rho > 0$, il existe $\varepsilon_1,\alpha, r > 0$ tels que si f vérifie $\overset{\sim}{\lambda}(f) \leqslant A$, si $z \in K$, si $\delta(x,z) < r$ on ait, pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$:

$$\varepsilon^2 \log P(d(y^\varepsilon(x),\beta_z(f)) \geqslant \rho, \ ||\varepsilon\beta - f||_T < \alpha) \leqslant -R$$

On pose alors, pour $g \in C$,

$$(3.2)\quad \lambda(g) = \inf(\overset{\sim}{\lambda}(f); B_{g_0}(f)=g), \Lambda(A) = \inf(\lambda(g), g \in A), \Phi(A)=\{g; \lambda(g) \leqslant A\}.$$

On a alors,

Proposition 3.1 : λ est s.c.i sur C ; $\Phi(A) \cap \{g_0 \in \text{compact}\}$ est compact ; si $\lambda(g) < +\infty$, l'inf est atteint dans (3.2).

Proposition 3.2 : Pour tout compact K de S, $A,\rho,\eta > 0$, il existe ε_0, $r > 0$ tels que si $\lambda(g) \leqslant A$, $g_0 = z \in K$, on ait, pour tout x tel que $\delta(x,z) \leqslant r$ et $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$:

$$\varepsilon^2 \log P\,[\,d(y^\varepsilon(x),g) < \rho\,] \geqslant -\lambda(g) - \eta.$$

Proposition 3.3 : Soit $\Phi_x(A) = \{g ; \lambda(g) \leqslant A, g_0 = x\}$. Alors pour tout K compact de $S, \overline{A}, \rho, \eta > 0$, il existe ε_0 tel que, si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $x \in K$, $A \leqslant \overline{A}$, on ait :

$$\varepsilon^2 \log P(d(y^\varepsilon(x),\Phi_x(A)) \geqslant \rho) \leqslant -A + \eta.$$

Théorème 3.4 : Pour tout borélien E de C_x, on a,

$$-\Lambda^o(E) \leqslant \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P(y^\varepsilon(x) \in E) \leqslant \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P(y^\varepsilon(x) \in E) \leqslant -\Lambda(\overline{E}).$$

La démonstration de la *prop. 3.1* est facile.

Démonstration de la prop. 3.2 :

Il existe $f \in \mathcal{C}_0$ telle que $\tilde{\lambda}(f) \leq A$ et $\beta_z(f) = g$. On applique 2) ci-dessus à K,A,ρ et $R=A+\eta$; on en tire ε_1,α,r. De plus, vu (i), il existe ε_2 tel que si $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon^2 \log P(||\varepsilon B-f||_T < \alpha) \geq -\tilde{\lambda}(f)-\eta/2$. Soit $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$ tel que $\varepsilon_0^2 \log 2 < \frac{\eta}{2}$; alors pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\delta(x,z) < r$: $P(||\varepsilon B-f||_T < \alpha) \leq P(||\varepsilon B-f||_T < \alpha$; $d(y^\varepsilon(x),g) \geq \rho)+P(d(y^\varepsilon(x),g) < \rho) \leq \exp(-\frac{R}{\varepsilon^2}) + P(d(y^\varepsilon(x),g) < \rho)$. Donc $-\lambda(g)-\eta/2= -\tilde{\lambda}(f)-\eta/2 \leq \varepsilon^2 \log 2 + \text{Max}(-R, \varepsilon^2 \log P(d(y^\varepsilon(x),g)) < \rho)$; mais, vu le choix de R, $-\lambda(g)-\frac{\eta}{2} > -R$ donc le max ne peut être atteint pour R d'où le résultat.

Démonstration de la prop. 3.3 :

Soit $M=M(x,A) = \{h$; $d(h,g) \geq \rho$ pour tout g tel que $g_0 = x$, $\lambda(g) \leq A\}$ alors $d(h,\Phi_x(A)) \geq \rho$ équivaut à $h \in M(x,A)$. On applique 2) ci-dessus à K, A,ρ et $R = A-\eta+1$; on en tire ε_1,α. Il existe $f_1,\ldots,f_N \in \tilde{\Phi}(A)$ tels que $\tilde{\Phi}(A) \subset \bigcup_1^N B(f_i,\alpha) = U$; alors, puisque $g_i = \beta_x(f_i) \in \Phi_x(A)$, $\{\varepsilon B \in U\} \cap \{y^\varepsilon(x) \in M\} \subset \bigcup_1^N \{||\varepsilon B-f_i||_T < \alpha$; $y^\varepsilon(x) \in M\} \subset \bigcup_1^N \{||\varepsilon B-f_i||_T < \alpha$, $d(y^\varepsilon(x),g_i) \geq \rho\}$ et donc, $P(\varepsilon B \in U, y^\varepsilon(x) \in M) \leq N \exp(-\frac{R}{\varepsilon^2})$ si $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ et $x \in K$. Par ailleurs U^c étant fermé, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon^2 \log P(\varepsilon B \in U^c) \leq -\tilde{\Lambda}(U^c) + \frac{\eta}{2} \leq -A + \frac{\eta}{2}$. D'où pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$, $P(y^\varepsilon(x) \in M) \leq P(\varepsilon B \in U^c) + N \exp(-\frac{R}{\varepsilon^2}) \leq \exp(-\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{2\varepsilon^2}) + N \exp(-\frac{R}{\varepsilon^2}) \leq \exp(-\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{\varepsilon^2}).(\exp(-\frac{\eta}{2\varepsilon^2}) + N \exp(-\frac{1}{\varepsilon^2}))$ - Vu le choix de R- $\leq \exp(-\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{\varepsilon^2})$, Si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Ici ε_0 dépend de A ; mais soit $\bar{k}$ tel que $\bar{k}\eta \leq \bar{A} < (\bar{k}+1)\eta$; on peut choisir ε_0 tel que $P(y^\varepsilon(x) \in M(x,k\eta)) \leq \exp(-\frac{k\eta}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{\varepsilon^2})$, $k=1,2,\ldots,\bar{k}$. Alors pour $k\eta \leq A < (k+1)\eta$, $M(x,A) \subset M(x,k\eta)$ et $P(y^\varepsilon(x) \in M(x,A)) \leq P(y^\varepsilon(x) \in M(x,k\eta)) \leq \exp(-\frac{k\eta}{\varepsilon^2} + \frac{\eta}{\varepsilon^2}) \leq \exp(-\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{2\eta}{\varepsilon^2})$.

Démonstration du théorème 3.4 :

La *prop. 3.2* entraîne immédiatement l'inégalité de gauche. Supposons donc E fermé et soit $0 < A < \inf(\lambda(g)$; $g \in E)$ - si $\Lambda(E) = 0$, il n'y a rien à montrer. Alors E et $\Phi_x(A)$ sont disjoints et $\Phi_x(A)$ compact donc il existe $\rho > 0$ tel que $d(y^\varepsilon(x), \Phi_x(A)) \geq \rho$ si $y^\varepsilon(x) \in E$ donc (*prop. 3.3*) $\overline{\lim}\, \varepsilon^2 \log P(y^\varepsilon \in E) \leq -A$.

4. Identification de λ.

1^{er}). On considère l'application, définie pour $f \in \overset{\circ}{C}_0 \cap (U \overset{\circ}{\Phi}(A))$, $f \to \beta_x(f) = (h,a)$ solutions de (2.5) et on se propose de calculer $\hat{\lambda}(h,a)$ définie par (3.2).

On peut supposer que h et a sont absolument continues avec des dérivées dans $L^2(0,T)$ sinon, compte tenu des résultats du n°2, $\hat{\lambda}(h,a) = +\infty$. Il existe donc (*prop. 3.1*), f avec $\tilde{\lambda}(f) < +\infty$ telle que :

$$(4.1) \qquad \sigma(h_s)\dot{f}_s = k_s \quad \text{avec} \quad k_s = \dot{h}_s - b(h_s) - \nu(h_s)1_{\partial D}(h_s)\dot{a}_s .$$

Posons, pour $x \in \overline{D}$, $v \in R^p$,

$$(4.2) \qquad q^*(x,v) = \text{Inf}\,\{|w|^2;\ \sigma(x)w = v\}\ ;\ = +\infty \ \text{ si } \{\ldots\} = \emptyset .$$

On montre facilement (on omet x qui est fixé dans le lemme),

Lemme : Soit $q(v) = \langle v, \sigma\sigma^* v \rangle$ et $q^*(v) = \sup_t \{\langle 2t, v\rangle - q(tv)\}$. Alors $q^*(v) < +\infty$ s.s.i $v \in \text{Im}\,\sigma$ et, pour $v \in \text{Im}\,\sigma$, soit $w_\rho = \sigma^*(\rho I + \sigma\sigma^*)^{-1}v$, w_ρ tend vers w lorsque $\rho \to 0$ et on a $\sigma w = v$ et $|w|^2 = q^*(v) = \inf\{|w'|^2,\ \sigma w' = v\}$.

Soit $\Gamma = \{(x,v)\ ;\ x \in \overline{D},\ v \in R^p\ ;\ q^*(x,v) < +\infty\}$, Γ est borélien ainsi que la fonction, définie pour $(x,v) \in \Gamma$, $\varphi(x,v) = \lim_{\rho \to 0} \sigma^*(x)\,[\rho I + \sigma(x)\sigma^*(x)]^{-1}v$ et on a $\sigma(x)\varphi(x,v) = v$ et $\sigma(x)w = v$ entraine $|w| \geqslant |\varphi(x,v)|$.

Remarquons enfin que $q^*(x,v)$ est s.c.i du couple et que si $\sigma\sigma^*(x)$ est inversible $q^*(x,v) = \langle v, (\sigma\sigma^*)^{-1}(x)v\rangle$.

Vu (4.1), $(h_t,k_t) \in \Gamma$ pp en t. Soit donc, u_t telle que $u_0 = 0$ et p.p. $\dot{u}_t = \varphi(h_t,k_t)$ et soit v_t tel que $(h,a) = \beta_x(v)$; on a $\sigma(h_t)\dot{u}_t = k_t = \sigma(h_t)\dot{v}_t$ et donc $|\dot{u}_t| \leqslant |\dot{v}_t|$ pp en t. En particulier pour $v = f$ ce qui entraine que $\tilde{\lambda}(u) < +\infty$ et $\tilde{\lambda}(u) \leqslant \tilde{\lambda}(v)$; donc $\hat{\lambda}(h,a) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}_t|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^T q^*(h_t,k_t)dt$. En résumé,

Proposition 4.1 : La fonctionnelle de Cramer relative à $(x^\varepsilon, a^\varepsilon)$ solution de (2.3) est

$$(4.3) \qquad \hat{\lambda}(h,a) = \frac{1}{2}\int_0^T q^*(h_t, \dot{h}_t - b(h_t) - \nu(h_t)1_{\partial D}(h_t)\dot{a}_t)dt .$$

Il suffit alors d'appliquer le *th. 3.4* pour avoir le résultat de grandes déviations cherché.

2^e) Déterminons maintenant la fonctionnelle λ définie par (3.2) et l'application

$f \to \beta_x(f) = h$ solution de (2.5). Si $\lambda(h) < +\infty$, il existe f avec $\tilde{\lambda}(f) < +\infty$ et a ne croissant que sur $\{s ; h_s \in \partial D\}$ et vérifiant $\int_0^T \dot{a}_s^2 1_{\partial D}(h_s)ds < +\infty$, tels qu'on ait (2.6) - voir le n°2. Donc :

$$(4.4)\quad \lambda(h) = \inf\{\hat{\lambda}(h,a), a = \int_0^{\cdot} \alpha_s 1_{\partial D}(h_s)ds \ ; \ \alpha_s \text{ mesurable} \geq 0, \int_0^T \alpha_s^2 1_{\partial D}(h_s)ds < +\infty\}$$

où $\hat{\lambda}(h,a)$ est donnée par (4.3).

Pour $x \in \partial D$ et $v \in R^p$, on définit :

$$(4.5)\qquad \theta^*(x,v) = \inf_{\alpha \geq 0} q^*(x, v-\nu(x)\alpha).$$

Soit $D^+(x,v)$ la demi-droite $\{v-\nu(x)\alpha, \alpha \geq 0\}$ et posons $\Delta = \{(x,v) ; x \in \partial D, v \in R^p, D^+(x,v) \cap \text{Im } \sigma(x) \neq \emptyset\}$. Alors $\theta^*(x,v) < +\infty$ ssi $(x,v) \in \Delta$ et deux cas sont possibles :

(i) $D^+(x,v)$ rencontre Im $\sigma(x)$ en un seul point donc pour une seule valeur de α.

(ii) $D^+(x,v) \subset$ Im $\sigma(x)$ ce qui entraine que v et $\nu(x)$ appartiennent à Im $\sigma(x)$ et alors $\alpha \to q^*(x, v-\nu(x)\alpha)$ est un polynôme du second degré en α.

Il existe donc une application borélienne (unique) $\psi(x,v)$ de Δ dans R_+ telle que, pour tout $(x,v) \in \Delta$, $q^*(x, v-\nu(x)\psi(x,v)) = \theta^*(x,v)$. Puisque $\lambda(h) < +\infty$, $(h_t, \dot{h}_t - b(h_t)) \in \Delta$ pp sur $\{t ; h_t \in \partial D\}$; pour de tels t, soit, $\gamma_t = \psi(h_t, \dot{h}_t - b(h_t))$ qui est positive. Posant $k_t = \dot{h}_t - b(h_t) - \nu(h_t)1_{\partial D}(h_t)\gamma_t$, on voit immédiatement que, pp en t, $q^*(h_t,k_t) \leq q^*(h_t, \dot{h}_t - b(h_t) - \nu(h_t)1_{\partial D}(h_t)\alpha_t)$ pour tout α_t intervenant dans (4.4) ; en particulier $\int_0^T q^*(h_t,k_t)dt < +\infty$.

Mais, utilisant le 1er et la fonction mesurable φ, si u_t est telle que $u_0 = 0$, $\dot{u}_t = \varphi(h_t,k_t)$, $\int_0^T |\dot{u}_s|^2 ds < +\infty$ et si $c_t = \int_0^t \gamma_s 1_{\partial D}(h_s)ds$, le triplet (u,h,c) vérifie (2.5) et le raisonnement du n°2 montre alors que $\int_0^T \gamma_s^2 1_{\partial D}(h_s)ds < +\infty$. L'inf dans (4.4) est bien atteint pour γ. Donc,

Théorème 4.2 : La fonctionnelle de Cramer relative à x^ε solution de (2.3) est :

$$\lambda(h) = \frac{1}{2}\int_0^T \theta^*(h_t, \dot{h}_t - b(h_t))dt, \text{ où :}$$

(4.6) $\theta^*(x,v) = \inf_{\alpha \geq 0} q^*(x, v-\nu(x)\alpha 1_{\partial D}(x))$, $x \in \bar{D}$, $v \in R^p$.

Le *théorème 3.4* donne alors le résultat annoncé dans l'introduction (0.1).

Remarque : Le *théorème 4.2* généralise les cas suivants :

(i) $x \in D$, σ matrice carrée inversible, $\theta^*(x,v) = |\sigma^{-1}(x)(v)|^2$; on retrouve le résultat de Ventcel-Freidlin [5].

(ii) $x \in D$, σ quelconque, $\theta^*(x,v) = q^*(x,v)$, c'est le résultat d'Azencott [2].

(iii) $x \in \partial D$, σ matrice carré inversible ; $q^*(x,v) = |\sigma^{-1}(x)v|^2$ et on voit immédiatement que $q^*(x,v-\alpha w)$ est minimum pour $\bar{\alpha} = \dfrac{< \sigma^{-1}(x)v, \sigma^{-1}(x)w >}{|\sigma^{-1}(x)w|^2}$ lorsque α parcourt R et donc :

(4.7) $\theta^*(x,v) = |\sigma^{-1}(x)v|^2 - \dfrac{< \sigma^{-1}(x)v, \sigma^{-1}(x)\nu(x) >^2}{|\sigma^{-1}(x)\nu(x)|^2} . 1_{R_+}(< \sigma^{-1}(x)v, \sigma^{-1}(x)\nu(x) >)$

C'est le résultat de Anderson-Orey [1].

5. Considérons pour D,σ,b vérifiant (2.1), (2.2), (2.3) la solution $x_t(x)$ de :

(5.1) $x_t = x + \int_0^t \sigma(x_s)dB_s + \int_0^t b(x_s)ds + \int_0^t \nu(x_s)da_s$ avec $x_t \in \bar{D}$,

a_t processus croissant continu, $a_0 = 0$, ne croissant que sur $\{s ; x_s \in \partial D\}$.

Soit P_x la loi de $x_0(x)$ sur l'espace canonique (W,G_t,G,ξ_t), $W=C(R_+,\bar{D})$, $\xi_t(w) = w(t)$, alors (ξ_t,P_x) est un processus de Markov dont le générateur coïncide sur les fonctions φ de classe C^2 vérifiant $< \nabla\varphi, \nu > \equiv 0$ sur ∂D avec $L\varphi = \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^* \sigma\sigma^* (\nabla\varphi) + \nabla\varphi.b$. Il est bien connu qu'un résultat comme le *théorème 4.2* permet d'estimer, lorsuqe $t \to 0$, $P_x(\xi_t \in A)$.

En effet, posant $a_s^\varepsilon = a_{\varepsilon s}$, $B_s^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{\varepsilon s}$, $x_t^\varepsilon = x_{\varepsilon t}$, on a :

(5.2) $x_t^\varepsilon = x + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \sigma(x_u^\varepsilon)dB_u^\varepsilon + \int_0^t \varepsilon b(x_u^\varepsilon)du + \int_0^t \nu(x_u^\varepsilon)da_u^\varepsilon$; avec $x_t^\varepsilon \in \bar{D}$ et a_t^ε processus croissant continu ne croissant que sur $\{s ; x_s^\varepsilon \in \partial D\}$. On peut donc appliquer le *théorème 4.2* en observant que $P_x(\xi_t \in A) = P(x_1^t \in \tilde{A})$ où $\tilde{A} = \{\varphi ; \varphi_0 = x, \varphi_1 \in A\}$. Donc si on pose :

$$(5.3)\quad S(x,y) = \inf \{ \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^*(\varphi_t, \dot{\varphi}_t)dt \ ; \ \varphi_0 = x, \ \varphi_1 = y\}$$

où θ^* est défini par (4.6) ; on a :

Proposition 5.1 : $-\inf_{y\in\mathring{A}} S(x,y) \leqslant \varliminf_{t\to 0} t \log P_x(\xi_t \in A) \leqslant \varlimsup_{t\to 0} t \log P_x(\xi_t \in A)$
$\leqslant -\inf_{y\in\bar{A}} S(x,y).$

Exemple : On choisit $D = \{(x_1,x_2) \ ; \ x_1 > 0\}$; $\sigma(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}$ et on suppose $\rho > 0$ (par symétrie, on a le cas où $\rho < 0$).

Alors $q^*(x,(v_1,v_2)) = v_1^2$ si $v_2 = 0$, $= +\infty$ si $v_2 \neq 0$ et

$$(5.4)\quad \theta^*((x_1,x_2),(v_1,v_2)) = \begin{cases} v_1^2 \text{ si } x_1 \neq 0, \ v_2 = 0 \\ (v_1 - v_2/\rho)^2 \text{ si } x_1 = 0, \ v_2 \geqslant 0 \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc si $\lambda(\varphi) < +\infty$, on a, p.p, $\dot{\varphi}_s^{\,2} = 0$ sur $\{s \ ; \ \varphi_s^{\,1} \neq 0\}$ et $\dot{\varphi}_s^{\,2} \geqslant 0$ sur $\{s \ ; \ \varphi_s^{\,1} = 0\}$ et alors,

$$(5.5)\quad \lambda(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^1 [(\dot{\varphi}_s^{\,1})^2 1_{\{\varphi_s^{\,1} > 0\}} + (\dot{\varphi}_s^{\,1} - \frac{1}{\rho} \dot{\varphi}_s^{\,2})^2 1_{\{\varphi_s^{\,1} = 0\}}] \, ds$$

Une trajectoire φ allant de (x_1,x_2) à (y_1,y_2) avec $\lambda(\varphi) < +\infty$ ne se déplace donc que parallèlement à $x_2 = 0$ tant que $x_1 > 0$ et dans le sens des x_2 croissant lorsque $x_1 = 0$. Mais une incursion à l'intérieur avec un $\lambda(\varphi)$ minimal va aller de (x_1,x_2) à $(0,x_2)$ pendant $[0,t_1]$; puis de $(0,x_2)$ à $(0,y_2)$ pendant $[t_1,t_2]$ - avec nécessairement $y_2 \geqslant x_2$ - enfin de $(0,y_2)$ à (y_1,y_2) pendant $[t_2,1]$ et sur chacun de ces intervalles ce sera la trajectoire à vitesse constante qui aura un $\lambda(\varphi)$ minimum vu la forme (5.5) de $\lambda(\varphi)$. Cette trajectoire sera donc de la forme :

$$\begin{cases} \varphi_s^{\,1} = \frac{x_1}{t_1}(t_1 - s) \\ \varphi_s^{\,2} = x_2 \end{cases} \quad , \quad 0 \leqslant s \leqslant t_1$$

$$\begin{cases} \varphi_s^{\,1} = 0 \\ \varphi_s^{\,2} = \dfrac{1}{t_2-t_1}\,(x_2(t_2-s) - y_2(t_1-s)) \end{cases}, \quad t_1 \leqslant s \leqslant t_2$$

$$\begin{cases} \varphi_s^{\,1} = \dfrac{1}{1-t_2}\,y_1(s-t_2) \\ \varphi_s^{\,2} = y^2 \end{cases} \qquad t_2 \leqslant s \leqslant 1.$$

Pour une telle trajectoire,

$$\lambda(\varphi) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{t_1}\,(x_1)^2 + \frac{1}{t_2-t_1}\left(\frac{y_2-x_2}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{1-t_2}\,(y_1)^2 \right\}$$

Comme pour $a,b,c > 0$, $\inf\{\alpha a+\beta b+\gamma c \ ; \ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = 1\}$ $= \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2$, on a,

$$(5.6) \qquad S((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{1}{\rho}\,(y_2-x_2)+y_1 \right]^2 & \text{si } y_2 > x_2. \\ \frac{1}{2}\left[x_1-y_1 \right]^2 & \text{si } y_2 = x_2 \\ +\infty & \text{si } y_2 < x_2. \end{cases}$$

6. Une autre application de ces résultats est la suivante. On se place toujours sous les hypothèses du n°2. Pour $x \in \overline{D}$, on note $g(x) = \sigma(x)\sigma^*(x) = (g_{ij}(x)$; $1 \leqslant i,j \leqslant p)$. Soit $(V_\varepsilon)_{\varepsilon \geqslant 0}$ une famille d'applications continues de $\overline{D}$ dans R telle que $V_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} V_0$ uniformément et $V^+ \in L^\infty(\overline{D})$.

Supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\psi_\varepsilon(t,x)$ continue sur $[0,T] \times \overline{D}$, de classe $C^{1,2}$ sur $]0,T[\times \overline{D}$ et vérifiant :

$$(6.1) \quad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,x) = \dfrac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{p} g_{ij}(x)\, \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} b_j \sqrt{\varepsilon}(x)\, \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}\,(t,x) + V_\varepsilon(x)\psi(t,x) \\ \qquad\qquad (t,x) \in]0,T] \times \overline{D} \\ < \nabla_x \psi(t,x), \nu(x) > = 0 \quad , \quad (t,x) \in]0,T] \times \partial D \\ \psi(0,x) = f(x) \quad , \quad x \in \overline{D} \ ; \end{cases}$$

ceci pour une donnée initiale f continue et bornée sur $\overline{D}$.

On notera $\psi_\varepsilon^{\,f}(t,x)$ la solution de (6.1). Evidemment l'existence d'une telle fonction demande certaines hypothèses de non dégénérescence de σ et éventuellement

de compacité sur $\bar{D}$. On montre alors facilement, grâce à la Formule de Itô, que :

$$(6.2) \qquad \psi_\varepsilon^f(t,x) = E\{f(x_t^{\sqrt{\varepsilon},x})\exp(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon} V_\varepsilon(x_s^{\sqrt{\varepsilon},x})ds)\} ;$$

$x_t^{\sqrt{\varepsilon},x}$ étant la solution de (2.4) où on a remplacé ε par $\sqrt{\varepsilon}$.

On définit une application θ_x de $C_x([0,T],\bar{D})$ dans R par la formule $\theta_x(h) = \int_0^T V_0(h(s))ds$. Soit :

$$(6.3) \qquad S(T,x) = \sup\{\theta_x(h)-\lambda(h) \ ; \ h \in C_x([0,T],\bar{D})\}$$

où λ est la fonctionnelle de Cramer donnée par le *théorème 4.2*.

Les résultats de Varadhan [4] joints aux estimations de grandes déviations (0.1) montrent alors que :

(i) $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \psi_\varepsilon^1(T,x) = S(T,x)$

(ii) si dans (6.3) le sup est atteint en un point unique $h^{T,x}$ alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\psi_\varepsilon^f(T,x)}{\psi_\varepsilon^1(T,x)} = f(h^{T,x}(T)).$$

REFERENCES

[1] R. ANDERSON et S. OREY. Small random perturbations of dynamical systems with reflecting boundary. Nagoya Math J Vol 60 (1976) 189-216.

[2] R. AZENCOTT. Grandes déviations et applications. Ecole d'été de probabilités de Saint Flour VII. 78. Lecture Notes in Math Springer Verlag (1980).

[3] P. PRIOURET. Remarques sur les petites perturbations de systèmes dynamiques. Séminaire de Strasbourg XVI. Lecture Notes de Math. Springer Verlag (1982).

[4] S.R.S. VARADHAN. Asymptotic probabilities and differential equations. Comm. Pure. Appli. Math. Vol 1 261-286. (1966).

[5] A.D. VENTSEL et M.J. FREIDLIN. On small perturbations of dynamical sytems Russian Math Surveys 25 1.55 (1970).