SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MAURIZIO PRATELLI

La classe des semimartingales qui permettent d'intégrer les processus optionnels

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 311-320

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__311_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LA CLASSE DES SEMIMARTINGALES QUI PERMETTENT D'INTEGRER LES PROCESSUS OPTIONNELS.

Par Maurizio PRATELLI.

On connait deux définitions de l'intégrale stochastique d'un processus optionnel K par rapport à une semimartingale X : l'intégrale stochastique compensée $K.X$ (voir [2] pag. 356) qui n'est définie que si X est une martingale locale (et qui d'ailleurs n'est pas invariante par changement de loi) et l'intégrale selon la définition de Yor (voir [6]) dans laquelle X est une semimartingale quelconque mais il faut se restreindre à certaines sous-classes de processus optionnels.

Dans cet article on caractérise la classe des semimartingales qui permettent d'intégrer tous les processus optionnels (bornés) en conservant les traits essentiels du calcul stochastique : une modification du théorème de Dellacherie-Meyer-Mokobodzki montre que cette classe est formée par les processus qui sont la somme d'une martingale continue et d'un processus à variation finie.

On étudie dans la deuxième partie une topologie convenable pour cet espace de processus.

1. LES SEMIMARTINGALES RESTREINTES.

Soit $(\Omega,\underline{F},(\underline{F}_t),\mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, vérifiant les conditions habituelles de [2] et tel que $\underline{F}_\infty = \bigvee_t \underline{F}_t$. On désigne par X un processus adapté, indexé par $[0,\infty[$, à trajectoires c.à.d.l.à.g. (y compris une limite finie à l'infini $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$); on peut supposer sans inconvénient que $X_0=0$, et on écrit comme d'habitude $\Delta_s X = X_s - \lim_{t\uparrow s} X_t$.

DEFINITION 1.1 On dit que X est une semimartingale restreinte (en abrégé s.m.r.) si X est une semimartingale telle que, pour tout t, on ait

$\sum_{s\leq t} |\Delta_s X| < \infty$ p.s.

Il est connu (voir [1] pag. 19) que X est une s.m.r. si et seulement si X = M+V , où M est une martingale locale continue et V un processus adapté à variation finie. Le résultat principal est le théorème suivant, qui est une modification du th. 80 pag. 401 de [2], et qui caractérise les semimartingales restreintes ; je préfère travailler avec les s.m.r. jusqu'à l'infini (les semimartingales jusqu'à l'infini telles que $\sum_{s<+\infty} |\Delta_s X| < +\infty$ p.s.) car cela simplifie les notations, surtout dans la deuxième partie (si l'on veut caractériser les s.m.r. ordinaires, on ne doit faire que des modifications formelles).

On appelle processus optionnel élémentaire un processus K de la forme

$$K(s,w) = \sum_{i=1}^{n} K_i(w)\, I_{[[T_i,T_{i+1}[[}(s,w)$$

où $T_1 \leq T_2 \ldots$ sont des temps d'arrêt et chaque variable K_i est $\mathcal{F}_{T_i}$ mesurable bornée. On peut toujours définir l'intégrale stochastique élémentaire

$$(K.X)_\infty = \int_{]0,\infty]} K_s\, dX_s = \sum_{i=1}^{n} K_i (X^-_{T_{i+1}} - X^-_{T_i})$$

où X^- est le processus des limites à gauche, c'est-à-dire $X^-_t = \lim_{s\uparrow t} X_s$.
(On convient que $X^-_0 = 0$).

THEOREME 1.2 X est une s.m.r. jusqu'à l'infini si et seulement si pour toute suite K^n de processus optionnels élémentaires qui converge uniformément vers 0, les intégrales $(K^n.X)_\infty$ convergent vers 0 en probabilité.

Démonstration Si Θ est l'ensemble des processus optionnels élémentaires K tels que $|K| \leq 1$, la condition du théorème équivaut à dire que l'ensemble $\{ (K.X)_\infty : K\in\Theta \}$ est borné dans L^0.

Pour vérifier que la condition est suffisante, montrons d'abord que la v.a $X^* = \sup_t |X_t|$ est p.s. finie. Supposons au contraire que $\mathbb{P}\{X^* = +\infty\} = a > 0$; il

existe b tel que, si $K\in\theta$, $\mathbb{P}\{|(K.X)_\infty| > b\} \leq a/2$. Soit

$T = \inf\{s: |X_s| \geq 2b\}$ et soit $K^n = I_{[[0,T+\frac{1}{n}[[}$; remarquons que $(K^n.X)_\infty = X_{T+\frac{1}{n}}$.

On a que $\mathbb{P}\{|X_T|>b\} \geq a$, ce qui est contrédit par l'inégalité

$\mathbb{P}\{|X_T|>b\} \leq \min \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|X_{T+\frac{1}{n}}|>b\} \leq a/2$ (due au fait que $\{|X_T|>b\} \subseteq$ $\min \lim_{n\to\infty} \{|X_{T+\frac{1}{n}}|>b\}$). Quitte à remplacer $\mathbb{P}$ par une probabilité équivalente, on peut donc supposer que l'ensemble $\{(K.X)_\infty | K\in\theta\}$ soit convexe, borné dans $L^0(\mathbb{P})$ et contenu dans $L^1(\mathbb{P})$: le théorème 83 pag. 403 de [2] montre alors l'existence d'une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, admettant une densité bornée et telle que $\sup_{K\in\theta} E_{\mathbb{Q}}[(K.X)_\infty] = c<+\infty$.

Interprétons maintenant cette condition :

(1) On peut approcher le processus prévisible élémentaire

$H = H_0 I_{]]0,t_1]]} + .. + H_n I_{]]t_n,\infty[[}$ (avec H_i $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, bornée par 1) par les processus $K^\varepsilon = H_0 I_{[[\varepsilon,t_1+\varepsilon[[} + \ldots + H_n I_{[[t_n+\varepsilon,\infty[[}$ $(\varepsilon>0)$: puisque $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} (K^\varepsilon.X)_\infty = (H.X)_\infty$ p.s. et X^* est $\mathbb{Q}$-intégrable, on obtient $E_{\mathbb{Q}}[(H.X)_\infty] \leq c$, ce qui montre (voir [2] pag. 402) que X est une $\mathbb{Q}$-quasi martingale (donc une $\mathbb{P}$-semimartingale) jusqu'à l'infini.

(2) Soient $T_1<T_2<..<T_n$ des temps d'arrêt, $\varepsilon>0$, $S_i=(T_i+\varepsilon)\wedge T_{i+1}$ et $K^\varepsilon = \sum_i \operatorname{sgn}(\Delta_{T_i} X) I_{[[T_i,S_i[[}$. Puisque $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} (K^\varepsilon.X)_\infty = \sum_{i=1}^n |\Delta_{T_i} X|$ p.s. , on obtient $E_{\mathbb{Q}}[\sum_{i=1}^n |\Delta_{T_i} X|] \leq c$. Si cn considère une suite T_n de temps d'arrêt à graphes disjoints tels que $\bigcup_n [T_n] = \{\Delta X \neq 0\}$, on trouve $E_{\mathbb{Q}}[\sum_{s<+\infty} |\Delta_s X|] \leq c$, donc $\sum_{s<+\infty} |\Delta_s X| < \infty$ $\mathbb{P}$ p.s.

Soit par contre X une s.m.r. et M+V sa décomposition avec M martingale locale continue: si K est un processus optionnel borné quelconque, on peut définir aisément l'intégrale K.X=K.M+K.V . En effet la deuxième est une intégrale

de Stieltjès qui se calcule trajectoire par trajectoire, et pour la première on a K.M=H.M où H est un processus prévisible tel que $\{K\neq H\}$ soit contenu dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt (et le résultat ne dépend pas du choix de H, voir [5] pag. 274). On n'a aucune difficulté à vérifier que la condition de continuité est satisfaite, ce qui achève la démonstration du théorème.

On vérifie immédiatement que si X est une s.m.r. et K un processus optionnel borné, le processus K.X est encore une s.m.r. ; en outre f(X) est une s.m.r si f est ou bien de classe C^2 (grâce à la formule d'Ito) ou bien convexe (grâce à la formule (4) pag.21 de [1]).

On peut aussi caractériser les s.m.r. par la méthode de Metivier-Pellaumail:

THEOREME 1.3 X est une s.m.r. si et seulement s'il existe un processus croissant adapté A tel que pour tout processus optionnel élémentaire K et tout temps d'arrêt T on ait

$$(1.4)\qquad E\Big[\sup_{0<s<T}\Big(\int_{]0,s]}KdX\Big)^2\Big] \leq E\Big[A_{T-}\cdot\int_{]0,T[}K_s^2dA_s\Big]$$

(Plus précisement X est une s.m.r. jusqu'à l'infini et A est tel que $A_\infty=\sup_{s<+\infty}A_s<+\infty$ p.s.). En effet Métivier et Pellaumail ont montré (voir [4] pag. 129) que X est une semimartingale si et seulement s'il existe un processus croissant A qui vérifie l'inégalité (1.4), où toutefois K est supposé prévisible élémentaire: on dit alors que A contrôle X. Nous dirons donc que A contrôle strictement X si la condition du théorème 1.3 est vérifiée.

Démonstration du théorème 1.3. Il est évident que si X est strictement contrôlé par A, il vérifie la condition du théorème 1.2 et donc est une s.m.r. Soit par contre X=M+V une s.m.r. : pour ce qui concerne la partie martingale

continue on a:

$$E[\sup_{0<s<T}(\int_{]0,s]}KdM)^2] = E[\sup_{0<s\leq T}(\int_{]0,s]}KdM)^2] \leq 4\,E[(\int_{]0,T]}KdM)^2]$$

$$= 4\,E[\int_{]0,T]}K_s^2 d\langle M\rangle_s] \leq 8\,E[\langle M\rangle_T^{1/2}.\int_{]0,T]}K_s^2 d(\langle M\rangle_s^{1/2})] .$$

(Je rappelle que si B est continu, $d(B_t^2)=2B_t dB_t$).

Si $|V|_t$ est la variation du processus V sur [0,t] , on a aussi

$$E[\sup_{0<s<T}(\int_{]0,s]}KdV)^2] \leq E[(\int_{]0,T[}|K_s|d|V|_s)^2] \leq E[|V|_{T-}.\int_{]0,T[}K_s^2 d|V|_s] .$$

On peut ainsi choisir $A_t=4\langle M\rangle_t^{1/2} + 2|V|_t$.

2. LA TOPOLOGIE DES SEMIMARTINGALES RESTREINTES.

Soient S l'espace des semimartingales et SR le sous-espace des s.m.r. (jusqu'à l'infini) : la topologie de S a été introduite indépendamment par M. Emery et Métivier-Pellaumail. SR (comme nous verrons) est dense dans S , et si K est optionnel borné, l'operation X↦K.X n'est pas continue dans SR pour la topologie de S : on étudie donc dans ce paragraphe une topologie convénable pour l'espace SR.

Pour ce qui concerne la topologie de S , je suivrai la présentation donnée dans [2] pag. 308-324, et je ne donnerai que des démonstrations sommaires lorsqu'elles seront des modifications faciles des démonstrations de [2].

Si X est une s.m.r. , X=M+V désigne toujours l'unique décomposition dans laquelle M est une martingale locale continue et V un processus à variation finie; si X est une semimartingale, X=N+A est une décomposition quelconque (avec N martingale locale et A processus à variation finie), et si de plus X est spéciale, $X=\overline{N}+\overline{A}$ est la décomposition canonique (dans laquelle $\overline{A}$ est prévisible).

Je rappelle que $\underline{S}^p$ est l'espace de Banach des semimartingales X pour lesquelles la norme $\|X\|_{\underline{S}^p} = \inf_{X=N+A} \|[N]_\infty^{1/2}+|A|_\infty\|_p$ est finie; si X appartient à $\underline{S}^p$, X est spéciale et la norme ainsi définie est équivalente à $\|[\bar{N}]_\infty^{1/2}+|\bar{A}|_\infty\|_p$.

DEFINITION 2.1 On appelle espace $\underline{SR}^p$ l'espace des s.m.r. pour lesquelles la norme $\|X\|_{\underline{SR}^p} = \|\langle M\rangle_\infty^{1/2}+|V|_\infty\|_p$ est finie.

PROPOSITION 2.2 Les trois normes suivantes sont équivalentes:

(1) $\|X\|_{\underline{SR}^p}$ (2) $\|X\|_{\underline{S}^p} + \|\Sigma_s|\Delta_s X|\|_p$

(3) $\sup_{|K|\leq 1} \|(K.X)_\infty\|_p$, où K parcourt l'ensemble des processus optionnels uniformément bornés par 1.

Démonstration On a évidemment $\|X\|_{\underline{S}^p} \leq \|X\|_{\underline{SR}^p}$ et $\|\Sigma_s|\Delta_s X|\|_p \leq$ $\leq \|\,|V|_\infty\|_p$ (cela car $\Sigma_s|\Delta_s X|=\Sigma_s|\Delta_s V| \leq |V|_\infty$). Soit par contre $X=M+V=\bar{N}+\bar{A}$: si on indique par $\tilde{V}$ le compensateur prévisible du processus V, on a $\bar{A}=\tilde{V}$ et $\bar{N}=M+(V-\tilde{V})$. Donc $[\bar{N}]_\infty=\langle M\rangle_\infty+\Sigma_s\Delta_s(V-\tilde{V})^2$ et, par conséquent, $\|\langle M\rangle_\infty^{1/2}\|_p \leq \|X\|_{\underline{S}^p}$. Si on écrit $V=V^c+V^d$ (où V^c est la partie continue et V^d la partie purement discontinue du processus V), on a $\tilde{V}=V^c+\tilde{V}^d$ (car V^c est prévisible). On a ainsi $|V|=|V^c|+|V^d|=|V^c|+\Sigma_s|\Delta_s X|$.
En remarquant que $V^c=\tilde{V}-\tilde{V}^d=\bar{A}-\tilde{V}^d$, on trouve $|V^c|\leq|\bar{A}|+|\tilde{V}^d|$ et enfin que $|V|\leq|\bar{A}|+|V^d|+|\tilde{V}^d|$. Mais l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy ([2] pag. 183) affirme que $\|\,|\tilde{V}^d|\,\|_p \leq p.\|\,|V^d|\,\|_p$ et on trouve finalement que $\|\,|V|_\infty\|_p \leq c_p(\|X\|_{\underline{S}^p}+\|\Sigma_s|\Delta_s X|\|_p)$: on a ainsi démontré l'équivalence entre (1) et (2).

Si K est optionnel uniformément borné par 1, on a $(K.X)_\infty=(K.M)_\infty+(K.V)_\infty$:

$$\| (K.M)_\infty \|_p \leq c_p . \| (\int_{]0,\infty]} K_s^2 d\langle M\rangle_s)^{1/2} \|_p \leq c_p . \| \langle M\rangle_\infty^{1/2} \|_p$$

$$\| (K.V)_\infty \|_p \leq \| \int_{]0,\infty]} |K_s| d|V|_s \|_p \leq \| |V|_\infty \|_p .$$

On a ainsi montré que $\| (K.X)_\infty \|_p \leq (c_p+1) \| X \|_{\underline{SR}^p}$. Rappelons que (voir [2] pag. 319) on a $\| X \|_{\underline{S}^p} \leq c. \sup_{|H|\leq 1} \| (H.X)_\infty \|_p$, où H parcourt l'ensemble des processus prévisibles uniformément bornés par 1. Si on prend une suite de temps d'arrêt à graphes disjoints telle que $\{X \neq 0\} \subseteq \bigcup_n [[T_n]]$, et on considère le processus optionnel $K = \Sigma_n \operatorname{sgn}(\Delta_{T_n} X) . I_{[[T_n]]}$, on a $|K(s,w)| \leq 1$ et $(K.X)_\infty = \Sigma_s |\Delta_s X|$, ce qui permet de montrer que $\| \Sigma_s |\Delta_s X| \|_p \leq \sup_{|K|\leq 1} \| (K.X)_\infty \|_p$.

PROPOSITION 2.3 $\underline{SR}^p$ est dense dans $\underline{S}^p$.

Démonstration. Puisque tout élément de $\underline{S}^p$ est somme d'un processus à variation finie prévisible, d'une martingale continue (et cette somme est une s.m.r.) et d'une martingale "somme compensée de sauts", on peut se borner à ce dernier cas, et supposer que X soit de la forme $X_t = \Sigma_{n\geq 1} (A^n_t - \tilde{A}^n_t)$, où $A^n_t = I_{\{t\geq T_n\}} . \Delta_{T_n} X$. Chaque martingale $(A^n - \tilde{A}^n)$ est à variation finie (donc une s.m.r.) et la série converge dans $\underline{S}^p$ (la norme de X dans $\underline{S}^p$ est équivalente à $\| (\Sigma_n (\Delta_{T_n} X)^2)^{1/2} \|_p$) , ce qui achève la démonstration.

Je rappelle que la topologie de $\underline{S}$ est engedrée par la distance à l'origine $d(X,0) = \inf_{X=N+A} (E[1 \wedge ([N]_\infty^{1/2} + |A|_\infty)] + \sup_T E[|\Delta_T N|])$

(et plus généralement $d(X,Y)=d(X-Y,0)$). Introduisons dans $\underline{SR}$ la nouvelle distance $d'(X,0) = E[1 \wedge (\langle M\rangle_\infty^{1/2} + |V|_\infty)]$, et appelons topologie de $\underline{SR}$ la topologie engendrée par cette nouvelle distance. Nous dirons que les X^n convergent vers X prélocalement dans $\underline{SR}^p$ s'il existe une suite T_k de temps d'arrêt, qui tende

stationnairement vers $+\infty$ (i.e. $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\{T_k=+\infty\}=1$) et telle que les processus "arrêtés avant T_k" $a_{T_k-}(X^n)$ convergent vers $a_{T_k-}(X)$ dans $\underline{SR}^p$ (on pose $a_{T-}(X)_s = X_s.I_{\{s<T\}} + X_T^-.I_{\{s\geq T\}}$).

On a le résultat suivant, dont une conséquence immédiate est que $\underline{SR}$ est complet.

THEOREME 2.4 1) Si X^n converge vers X prélocalement dans $\underline{SR}^p$, X^n converge vers X dans $\underline{SR}$.

2) Si X^n est de Cauchy dans $\underline{SR}$, il en existe une sous-suite qui converge prélocalement dans $\underline{SR}^p$.

Démonstration. (la démonstration est un peu sommaire car elle est proche de celle du th. 101 pag. 315 de [2]). 1) On peut supposer X=0. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe T tel que $\mathbb{P}\{T<+\infty\}<\varepsilon$, et que $\lim_n \| a_{T-}(X^n) \|_{\underline{SR}^p} = 0$.

Si $X=M+V$, $a_{T-}(X)=a_{T-}(M)+a_{T-}(V)$ et sur l'ensemble $\{T=+\infty\}$ on a $\langle a_{T-}(M)\rangle_\infty = \langle M\rangle_\infty$ et $|a_{T-}(V)|_\infty = |V|_\infty$.

Donc $d'(X^n,0) \leq \mathbb{P}\{T<+\infty\} + E[1\wedge(\langle a_{T-}(M^n)\rangle_\infty^{1/2} + |a_{T-}(V^n)|_\infty)]$

$\leq \mathbb{P}\{T<+\infty\} + \| a_{T-}(X^n) \|_{\underline{SR}^p} \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand.

2) Il suffit de prouver que si $d'(X^n,0)\leq 2^{-n}$, alors la série $\Sigma_n X^n$ converge prélocalement dans $\underline{SR}^p$. Le processus croissant $C_t = \Sigma_n (\langle M^n\rangle_t^{1/2} + |V^n|_t)$ est à valeurs finies sur $[0,\infty]$ et les temps d'arrêt $T_k = \inf\{t : C_t \geq k\}$ tendent stationnairement vers $+\infty$. On n'a aucune difficulté à montrer que la série $\Sigma_n a_{T_k-}(X^n)$ converge dans $\underline{SR}^p$, et que les limites se recollent bien vers une s.m.r. X.

PROPOSITION 2.5 La topologie de SR est engendrée aussi par la distance

$d''(X,0)=d(X,0)+E[1\wedge(\Sigma_s|\Delta_s X|)]$.

Donc X^n converge vers X dans $\underline{SR}$ si et seulement si X^n converge vers X dans $\underline{S}$ et $\Sigma_s|\Delta_s(X^n-X)|$ converge vers 0 en probabilité.

Démonstration. Il est d'abord évident que $d''(X,0) \leq 2d'(X,0)$. Quitte à extraire une sous-suite, le th.101 pag. 315 de [2] montre que si $\lim_n d(X^n,0)=0$ alors X^n converge vers 0 prélocalement dans $\underline{S}^1$; on montre avec de petites modifications sur la partie 2) du th.2.4 que si $\lim_n E[1\wedge(\Sigma_s|\Delta_s X^n|)]=0$, alors $\Sigma_s|\Delta_s X^n|$ converge vers 0 prélocalement dans L^1. On a ainsi la convergence prélocale dans $\underline{SR}^1$, donc la convergence dans $\underline{SR}$.

PROPOSITION 2.6 $\underline{SR}$ est dense dans $\underline{S}$.

Démonstration. $\underline{S}^1$ est dense dans $\underline{S}$ (c'est une conséquence immédiate du th. 101 pag.315 de [2]) et $\underline{SR}^1$ est dense dans $\underline{S}^1$ pour la topologie de $\underline{S}^1$, donc aussi pour la topologie de $\underline{S}$.

Disons enfin (sans entrer dans les détails) que la topologie de $\underline{SR}$ peut aussi être caractérisée par les processus qui contrôlent strictement les s.m.r. D'abord, la norme de X dans $\underline{SR}^2$ est équivalente à la pseudonorme $\inf_A \| A_\infty \|_2$ où A parcourt l'ensemble des processus croissants qui contrôlent strictement X. En effet, d'une part $A_t=\langle M\rangle_t^{1/2}+|V|_t$ contrôle strictement X; et de l'autre si A_t contrôle strictement X et si $|K(s,w)|\leq 1$, on a $\|(K.X)_\infty\|_2 \leq \| A_\infty\|_2$.

On peut donc adapter les arguments de [3] et montrer que:

THEOREME 2.7 X^n converge vers X dans $\underline{SR}$ si et seulement s'il existe des processus croissants A^n tels que:

1) A^n contrôle strictement (X^n-X)

2) $\lim_{n\to\infty} A^n_\infty = 0$ en probabilité.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AZEMA J. YOR M. Temps Locaux. Astérisque 52-53 (1978)

[2] DELLACHERIE C. MEYER P.A. Probabilités et Potentiel. Chapitres V-VIII Hermann-Paris (1980)

[3] EMERY M. Equations differentielles stochastiques: la méthode de Métivier et Pellaumail. Séminaire de Probabilités XIV (pag.118-124) Lecture Notes 784. Springer Verlag (1980).

[4] METIVIER M. PELLAUMAIL J. Stochastic Integration. Academic Press (1980)

[5] MEYER P.A. Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XIV (pag.118-124) Lecture Notes 511. Springer Verlag (1976)

[6] YOR M. En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles. Séminaire de Probabilités XIII (pag.407-426) Springer Verlag (1979).

Maurizio PRATELLI
Istituto di Statistica.
Via S. Francesco
35100 PADOVA. Italie