SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

J.-Y. CALAIS
M. GÉNIN

Sur les martingales locales continues indexées par $]0,\infty[$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 162-178
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__162_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES MARTINGALES LOCALES CONTINUES INDEXÉES PAR $]0,\infty[$

J.Y. CALAIS ; M. GENIN

0. INTRODUCTION

Dans un article publié en 1980, Sharpe a étudié le comportement en 0 des martingales locales continues indexées par $]0,\infty[$ (cf. [9]).

Si $(M_t)_{t>0}$ désigne une telle martingale, Sharpe a montré, qu'en 0, trois possibilités s'offraient à M :

i) $\lim_{t\downarrow o} M_t$ existe dans $\mathbb{R}$.

ii) $\lim_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$.

iii) $\underline{\lim}_{t\downarrow o} M_t = -\infty$ et $\overline{\lim}_{t\downarrow o} M_t = +\infty$.

Dans la première partie de cet article, nous proposons de nouvelles démonstrations des résultats de Sharpe, en particulier du théorème précédent.

Dans la deuxième partie, nous étudions le cas $\lim_{t\downarrow o} M_t = +\infty$. Nous donnerons un théorème de représentation pour de tels processus. Plus précisément, nous montrerons, qu'à un changement de temps près, les trajectoires de M sont celles du processus $-\mathrm{Log}(\rho)$, où ρ est un processus de Bessel de dimension 2, issu de 0.

Si, de plus, $M > 0$ (condition toujours réalisée au voisinage de 0), nous montrerons, qu'à un changement de temps près, les trajectoires de M sont celles du processus $\frac{1}{\rho}$ où ρ est un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0.

Ce dernier résultat nous permettra de généraliser un théorème de Pitman ([8]).

Walsh s'est intéressé, dans un article publié en 1977 (cf.[11]) au comportement en 0 des martingales conformes indexées par $]0,\infty[$.

Si $(Z_t)_{t>0}$ désigne une telle martingale, Walsh a montré qu'une des éventualités suivantes était réalisée :

i) $\lim_{t\downarrow o} Z_t$ existe dans $\mathbb{C}$

ii) $\lim_{t\downarrow o} |Z_t| = +\infty$

iii) $\forall\, \delta > 0$, $\{Z_t(\omega)\ ;\ 0 < t < \delta\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Ce théorème est démontré très simplement dans la première partie de cet article.

Dans la troisième partie nous montrerons que dans le cas ii), les trajectoi-

res de Z sont, à un changement de temps près, celle du processus $\frac{1}{U}$ où U est un mouvement brownien complexe issu de 0.

Nous montrerons aussi qu'on ne peut trouver de théorème de représentation pour le cas iii).

Enfin, soit $M_t = (M_t^i)_{\substack{t>0 \\ 1\le i\le n}}$ $(n \ge 3)$ une martingale locale, continue, indexée par $]0,\infty[$ telle que :

$$d\langle M^i, M^j\rangle = 0 \ (i \neq j) \quad \text{et} \quad d\langle M^i\rangle = d\langle M^j\rangle \quad (1 \le i,j \le n) .$$

Nous montrerons que cette martingale converge nécessairement lorsque t tend vers 0.

1. DEMONSTRATION NOUVELLE DE RESULTATS CONNUS

Dans cette première partie, nous nous proposons de démontrer plus simplement un théorème de Walsh [11], les principaux théorèmes de Sharpe sur $\mathcal{L}_c^{\text{open}}$, et d'améliorer le théorème (3.16;[9]) sur $\mathcal{L}_c^{\text{inc}}$.

Rappelons quelques définitions et résultats dont nous aurons besoin (cf. [9]).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité filtré de référence, supposé satisfaire les conditions habituelles.

$\mathcal{L}_c^{\text{open}}$ désigne l'ensemble des processus $(M_t)_{t>0}$ tels que :

i) pour presque toute trajectoire : $t \to M_t$ est continue

ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $(M_{\varepsilon+t})_{t\ge 0}$ est une $(\mathcal{F}_{\varepsilon+t})_{t\ge 0}$ martingale locale

$\mathcal{L}_c^{\text{inc}}$ désigne l'ensemble des processus $(M_{s,t})_{0<s\le t}$ tels que :

i) $\forall\, s > 0, (M_{s,t})_{t\ge s}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\ge s}$ martingale locale continue

ii) pour tout triplet (r,s,t) tel que $0 < r \le s \le t$, on a : $M_{r,t} = M_{r,s} + M_{s,t}$.

A un processus $M \in \mathcal{L}_c^{\text{open}}$ (resp. $M \in \mathcal{L}_c^{\text{inc}}$), est associée une unique mesure aléatoire positive $d\langle M\rangle$ sur $]0,\infty[$, telle que :

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\{M^2_{\varepsilon+t} - \langle M\rangle(.,]\varepsilon,\varepsilon+t])\}$ est une $(\mathcal{F}_{\varepsilon+t})_{t\ge 0}$ martingale locale continue (resp. $M^2_{s,t} - \langle M\rangle(.,]s,t])$, $t \ge s$, est une $(\mathcal{F}_t)_{t\ge s}$ martingale locale continue.

La classe $\mathcal{L}_c^{\text{open}}$ est stable par les opérations suivantes :

1) Arrêt : $M \in \mathcal{L}_c^{\text{open}}$ et T un $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ temps d'arrêt, alors $M^T 1_{\{T>0\}} \in \mathcal{L}_c^{\text{open}}$

2) Localisation : si $M \in \mathcal{L}_c^{\text{open}}$ et $A \in \mathcal{F}_0$ alors $1_A \cdot M \in \mathcal{L}_c^{\text{open}}$.

De plus, nous utiliserons fréquemment le raisonnement suivant :

Soient $A \in \mathcal{F}_0$, $B \in \mathcal{F}_0$; pour établir que $A \subset B$ p.s., on peut, quitte à

changer de probabilité (prendre $P_A = P(./A)$) supposer que $A = \Omega$ p.s. et montrer qu'alors $P(B) = 1$.

I.1.- LEMME : Soit $X_t = X_o + M_t + A_t$ la décomposition canonique d'une sous-martingale continue, positive, bornée par une constante c. On a :

$$E(A_\infty) \leq c, \text{ A admet des moments de tous ordres et } M \in BMO.$$

Démonstration : On se ramène par arrêt, au cas où M est bornée, ce qui entraîne $\forall\, t > 0 \quad E(A_t) \leq c$ et donc :
$E(A_\infty) \leq c$. De plus, $E(A_\infty - A_t \mid \mathcal{F}_t) \leq c$ et $E(|M_\infty - M_t| \mid \mathcal{F}_t) \leq 3c$; d'après [2], A admet des moments de tous ordres, et $M \in BMO$.

Le théorème des surmartingales inverses permet de démontrer simplement la proposition suivante :

I.2.- PROPOSITION : ([9] , 2-15(i)). Soit $M \in \mathcal{L}_c^{open}$; notons
$A = \{\omega ; \lim_{t \downarrow o} M_t(\omega) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$ et $B = \{\omega ; \langle M \rangle (\omega ;]0,1]) < \infty\}$, alors :
$A = B$ p.s. et $1_A M$ est une martingale locale continue.

Démonstration : A l'évidence, $A \in \mathcal{F}_o$. Supposons que $A = \Omega$ p.s. Par localisation et arrêt, on se ramène au cas où M est bornée par c. D'après le théorème des surmartingales inverses, M est alors une martingale continue bornée, donc:
$\langle M \rangle (.,]0,1]) < \infty$ p.s. et $P(B) = 1$.

De même, $B \in \mathcal{F}_o$; supposons que $B = \Omega$ p.s. ; pour tout $t \geq 0$,
$C_t = \langle M \rangle (.,]0,t])$ est un processus croissant, continu, nul en 0. Par arrêt, on se ramène au cas où $C_\infty \leq k$ $(k > 0)$. Puisque M et $M^2 - C$ appartiennent à $\mathcal{L}_c^{open}$, on a, lorsque $0 < u \leq s \leq t$:

$$E(M_t - M_s)^2 = E(C_t - C_s) \leq k \quad \text{et} \quad E(M_t - M_u \mid \mathcal{F}_s) = M_s - M_u \ .$$

Soit $s_n \downarrow 0$ avec $s_o < 1$; notons $Z_n = M_1 - M_{s_n}$. On a :

$$E(Z_n - Z_m)^2 = E(|C_{s_n} - C_{s_m}|) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0, \quad \text{donc } Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} Z \ .$$

Il existe donc une suite $u_n \downarrow 0$ et $M_o \in \mathcal{F}_o$ tels que : $M_{u_n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} M_o$, $M_1 - M_o = Z$ p.s. $\forall\, t \geq 0$, $M_t - M_o = (M_t - M_1) + Z \in L^2$, et on a, lorsque $s < t$ et $u_n \leq s$:

$$E(M_t - M_o \mid \mathcal{F}_s) = E(M_t - M_{u_n} + M_{u_n} - M_o \mid \mathcal{F}_s) = M_s - M_{u_n} + M_{u_n} - M_o = M_s - M_o \ .$$

D'après le théorème des surmartingales inverses, $\lim_{t \downarrow o} M_t = M_o$ p.s., donc $P(A) = 1$.

I.3.- THEOREME : ([9] ; 2-4). Soit $M \in \mathcal{L}_c^{open}$. Pour presque tout ω , une des éventualités suivantes est réalisée :

i) $\lim_{t\downarrow o} M_t(\omega)$ existe et est finie

ii) $\lim_{t\downarrow o} |M_t(\omega)| = +\infty$

iii) $\underline{\lim}_{t\downarrow o} M_t(\omega) = -\infty$ et $\overline{\lim}_{t\downarrow o} M_t(\omega) = +\infty$.

Démonstration : Soient $C = \{\omega ; \overline{\lim}_{t\downarrow o} M_t(\omega) \in \mathbb{R}\}$ et $D = \{\omega ; \lim_{t\downarrow o} M_t(\omega)$ existe et est finie$\}$. Pour démontrer le théorème, il suffit, quitte à changer M en -M, de montrer que C = D p.s.

On a, de toute évidence, $D \subset C$ et $C \in \mathcal{F}_o$; supposons que C = Ω p.s. Par localisation et arrêt, on se ramène à : $M_t \leq k$, $\forall\, t > 0$.

Appliquons la formule d'Ito à M et à $x \to (k+1-x)^{-1}$; on a :

$$(1) \qquad \frac{1}{k+1-M_t} = \frac{1}{k+1-M_\varepsilon} + \int_\varepsilon^t \frac{dM_s}{(k+1-M_s)^2} + \int_\varepsilon^t \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^3} \qquad (0 < \varepsilon \leq t)$$

Remarquons que : $\forall\, t > 0$, $0 < \frac{1}{k+1-M_t} \leq 1$; on déduit alors du lemme I.1 que :

$\forall\, \varepsilon > 0$, $E\left(\int_\varepsilon^1 \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^3}\right) \leq 1$ et donc que : $\int_o^1 \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^3} < \infty$ p.s.

Soit $A_t = \int_o^t \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^3}$. A est un processus croissant continu, nul en 0, à valeurs finies. Posons $V_t = \frac{1}{k+1-M_t} - A_t$ pour $t > 0$.

D'après (1), $V \in \mathcal{L}_c^{open}$ et $<V>(.,]0,1]) = \int_o^1 \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^4} \leq A_1$. On déduit alors de la proposition I.2 que $\lim_{t\downarrow o} V_t$ existe dans $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que $\lim_{t\downarrow o} M_t$ existe p.s. dans $\mathbb{R}$ et donc que P(D) = 1.

Soit $\mathcal{C}_c^{open} \overset{def}{=} \{Z = X + iY ; X,Y \in \mathcal{L}_c^{open}$, $d<X> = d<Y>$ et $d<X,Y> = 0\}$. Remarquons que $Z \in \mathcal{C}_c^{open}$ si et seulement si $\forall\, \varepsilon > 0$, $(Z_{\varepsilon+t})_{t\geq o}$ est une $(\mathcal{F}_{\varepsilon+t})_{t\geq o}$ martingale conforme (cf. [3]).

I.4.- PROPOSITION : Soit $Z \in \mathcal{C}_c^{open}$; alors :

$$\{\omega ; \overline{\lim}_{t\downarrow o} |Z_t(\omega)| < \infty\} \overset{p.s.}{=} \{\omega ; \lim_{t\downarrow o} Z_t(\omega) \text{ existe dans } \mathbb{C}\}.$$

Démonstration : Soient $A = \{\omega ; \overline{\lim}_{t\downarrow o} |Z_t(\omega)| < \infty\}$ et $B = \{\omega ; \lim_{t\downarrow o} Z_t(\omega)$ existe dans $\mathbb{C}\}$. On a $B \subset A$ et $A \in \mathcal{F}_o$; supposons que A = Ω p.s. Par localisation et arrêt, on se ramène au cas où $|Z_t| \leq k$, $\forall\, t > 0$; donc : $X_t^2 \leq k^2$ et $Y_t^2 \leq k^2$ $\forall\, t > 0$; d'après le théorème I.3, $\lim_{t\downarrow o} X_t$ et $\lim_{t\downarrow o} Y_t$ existent dans $\mathbb{R}$ p.s., donc $\lim_{t\downarrow o} Z_t$ existe p.s. dans $\mathbb{C}$ et P(B) = 1.

A l'aide de cette proposition, nous pouvons démontrer simplement le théorème suivant :

I.5.- THEOREME : (Walsh [11]). Soit $Z \in \mathcal{C}_c^{open}$; pour presque tout ω, une des éventualités suivantes est réalisée :

i) $\lim_{t \downarrow o} Z_t(\omega)$ existe dans $\mathbb{C}$

ii) $\lim_{t \downarrow o} |Z_t(\omega)| = +\infty$

iii) $\forall\, \delta > 0$, $\{Z_t(\omega)\ ;\ 0 < t < \delta\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Démonstration : Supposons i) et ii) non réalisées p.s. Soit $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $T = \inf \{t>0\ ;\ |Z_t - z| < r\}$. T est un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt et, $\mathbb{C}$ étant à base dénombrable, le théorème sera démontré si : $P\{T > 0\} = 0$. Supposons que $P\{T > 0\} > 0$. $\{T > 0\} \in \mathcal{F}_o$; supposons donc que $\{T > 0\} = \Omega$ p.s.

Soit $V = \frac{1}{Z^T - z}$; d'après la formule d'Ito, $V \in \mathcal{C}_c^{open}$ et $|V_t| \leq \frac{1}{r}$ pour $t > 0$.

D'après la proposition I.4, $\lim_{t \downarrow o} V_t$ existe dans $\mathbb{C}$ p.s. ce qui est impossible.

Nous allons établir maintenant, pour les processus de $\mathcal{L}_c^{inc}$, un théorème analogue du théorème I.3 relatif à $\mathcal{L}_c^{open}$. $\mathcal{L}_c$ désigne l'espace des martingales locales continues.

Commençons par démontrer quelques résultats sur $\mathcal{L}_c^{inc}$.

I.6.- PROPOSITION : Soit $M \in \mathcal{L}_c^{inc}(\mathcal{F}_t)$, T un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt tel que $P\{T > 0\} = 1$. Alors :

$$N = (M_{s\wedge T, t\wedge T}\ ;\ 0 < s \leq t) \in \mathcal{L}_c^{inc}(\mathcal{F}_{t\wedge T}) .$$

Démonstration : Soit $s > 0$ fixé ; $s \wedge T$ est un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt, et $P(0 < s \wedge T < \infty) = 1$. $t \to N_{s,t}$ est continue sur $[s,\infty[$ et $N_{r,t} = N_{r,s} + N_{s,t}$ pour $0 < r \leq s \leq t$. Reste à montrer que : $\forall\, s > 0$, $(N_{s,t})_{t\geq s}$ est une $(\mathcal{F}_{t\wedge T})_{t\geq s}$ martingale locale.

D'après le lemme (3.7;[9]), $M_{s\wedge T,(s\wedge T)+u}$ est une $(\mathcal{F}_{(s\wedge T)+u})$martingale locale continue, $T - s \wedge T$ est un $(\mathcal{F}_{(s\wedge T)+u})_{u\geq o}$ temps d'arrêt ; donc :

$(M_{s\wedge T,(s\wedge T)+(u\wedge(T-s\wedge T))})_{u\geq o}$ est une $(\mathcal{F}_{(s\wedge T)+(u\wedge(T-s\wedge T))})_{u\geq o}$ martingale locale continue.

La proposition résulte alors de l'égalité : $(s \wedge T) + (u \wedge (T - s \wedge T)) = (s + u) \wedge T$.

Etablissons l'analogue, pour les processus de $\mathcal{L}_c^{inc}$ de la proposition I.2 relatif à $\mathcal{L}_c^{open}$.

I.7.- PROPOSITION : ([9], 3.8,9 et 10). Soit $M \in \mathcal{L}_c$, $A = \{\omega ; \exists N \in \mathcal{L}_c$, $\forall s < t, N_t - N_s = M_{s,t}\}$, $B = \{\omega ; \lim_{t \downarrow o} M_{s,1}$ existe dans $\mathbb{R}\}$ et $C = \{\omega ; <M>(\omega ;]0,1]) < \infty\}$

On a : $A = B = C$ p.s.

Démonstration : On a : $A \subset B$, $B \in \mathcal{F}_o$; supposons que $B = \Omega$ p.s. ; et soit $N_t = \lim_{s \downarrow o} M_{s,t}$, alors : $N_t - N_s = M_{s,t}$, donc $N \in \mathcal{L}_c^{open}$; puisque $\lim_{t \downarrow o} N_t = 0$, $N \in \mathcal{L}_c$ et par conséquent $P(A) = 1$.

On a d'autre part : $A \subset C$ et $C \in \mathcal{F}_o$; supposons que $C = \Omega$ p.s. Soit $J_t = <M>(.,]0,t])$ J est un processus croissant continu, nul en 0, à valeurs finies. Par arrêt, on se ramène, à l'aide de la proposition I.6, à : $J_\infty \leq c$ ($c > 0$). On a pour $0 < s \leq t$: $E(M_{s,t}^2) = E(J_t - J_s) \leq c$. Soit $s_n \downarrow 0$ avec $s_o < 1$, posons $Z_n = M_{s_n,1}$. On a : $E(Z_n - Z_p)^2 = E(|J_{s_n} - J_{s_p}|) \xrightarrow[n,p \to \infty]{} 0$, donc $Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} Z$.

Il existe donc une suite $u_n \downarrow 0$ telle que : $M_{u_n,1} \xrightarrow[L^2]{p.s.} Z$. Posons, pour $t > 0$, $V_t = (M_{1,t} + Z)1_{t \geq 1} + (Z - M_{t,1})1_{t<1}$; $V_t = \lim_{n \to \infty} M_{u_n,t}$ et $V_t - V_s = M_{s,t}$, donc $V \in \mathcal{L}_c^{open}$. Comme $<V>(.,]0,1]) = J_1 < \infty$ p.s., il en résulte que $V \in \mathcal{L}_c$ et donc que $P(A) = 1$.

Nous pouvons maintenant démontrer, pour les éléments de $\mathcal{L}_c^{inc}$, l'analogue du théorème I.3.

I.8.- THEOREME : Soit $M \in \mathcal{L}_c^{inc}$; pour presque tout ω, une des éventualités suivantes est réalisée :

i) $\lim_{s \downarrow o} M_{s,1}$ existe dans $\mathbb{R}$.

ii) $\lim_{s \downarrow o} M_{s,1} = \pm \infty$

iii) $\lim_{s \downarrow o} M_{s,1} = -\infty$ et $\overline{\lim}_{s \downarrow o} M_{s,1} = +\infty$.

Démonstration : Soient $A = \{\omega ; \overline{\lim}_{s \downarrow o} M_{s,1} \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{\omega ; \lim_{s \downarrow o} M_{s,1}$ existe dans $\mathbb{R}\}$. Pour démontrer le théorème il suffit, quitte à changer M en $-M$, de montrer que $A = B$ p.s. On a : $B \subset A$, $A \in \mathcal{F}_o$; supposons que $A = \Omega$ p.s. et soit $X = \overline{\lim}_{s \downarrow o} M_{s,1}$.

Pour $t > 0$, posons

$$V_t = (M_{1,t} + X)1_{t \geq 1} + (X - M_{t,1})1_{t<1} \; ; \; V_t = \overline{\lim}_{s \downarrow o} M_{s,t} \text{ et } V_t - V_s = M_{s,t}$$

$(0 < s \leq t)$, donc $V \in \mathcal{L}_c^{\text{open}}$; comme $\lim_{t\downarrow o} V_t = 0$, on déduit du théorème I.3 que $V \in \mathcal{L}_c$ et donc, d'après la proposition I.7, que $P(B) = 1$.

II. REPRESENTATION ET PROPRIETES DES MARTINGALES OUVERTES QUI CONVERGENT VERS $+\infty$

Dans cette deuxième partie, nous nous proposons d'étudier l'ensemble :

$$\mathcal{H} \overset{\text{def}}{=} \{M \in \mathcal{L}_c^{\text{open}} \; ; \; \lim_{t\downarrow o} M_t = +\infty\}$$

Rappelons tout d'abord qu'un processus de Bessel ρ, de dimension $q \geq 2$, issu de 0, est l'unique solution trajectorielle (et donc en loi) [cf. Yamada-Watanabe, [4], théorème 3.2, p.168) de l'équation :

$$\rho_t = \beta_t + \frac{1}{2}(q-1)\int_o^t \frac{ds}{\rho_s} \qquad (\beta \text{ mouvement brownien réel, issu de 0})$$

Notation : Nous désignons par BES(q) tout processus de Bessel de dimension $q \geq 2$ issu de 0.

Rappelons ensuite le théorème de caractérisation des mouvements browniens arrêtés.

THEOREME : Soit M une $(\mathcal{F}_t, P)$ martingale locale continue, issue de 0 ; T un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt tel que : $\langle M \rangle_t = t \wedge T$.

Soit $B' = (\Omega', (\mathcal{F}'_t), B'_t, P')$ un mouvement brownien réel issu de 0. Alors sur l'espace $\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, muni de la filtration $(\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t)_{t\geq o}$ convenablement complétée pour la probabilité $P \otimes P'$, il existe un mouvement brownien réel issu de 0, $\bar{B}$, tel que si on pose $\bar{M}_t(\omega,\omega') = M_t(\omega)$, $\bar{T}(\omega,\omega') = T(\omega)$, on ait :

$$\bar{M}_t = B_{t\wedge\bar{T}} \quad .$$

N.B.-Dans ce qui suit, le lecteur doit avoir à l'esprit que, si nécessaire, nous utilisons le théorème ci-dessus et les techniques de relèvement d'espace (cf. [4], p.89-91 et [3], p.292 (cas complexe)) sans le préciser, de manière à obtenir des énoncés plus concis et à éviter des changements inutiles de notations.

Voici une représentation des éléments de $\mathcal{H}$.

II.1.- THEOREME : Soit $M \in \mathcal{H}$. Alors le processus croissant continu $A_t = \int_o^t \exp(-2M_s)\, d\langle M \rangle_s$ est à valeurs finies et il existe ρ, BES(2), tel que

$$\exp(-M_t) = \rho_{A_t} \quad .$$

Démonstration : Appliquons la formule d'Ito à $x \to \exp(-x)$ et à $M \in \mathcal{H}$, on a :

$$(2)\quad \exp(-M_t) = \exp(-M_\varepsilon) - \int_\varepsilon^t \exp(-M_s)\, dM_s + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^t \exp(-M_s)\, d\langle M\rangle_s \quad (0 < \varepsilon \leq t)$$

Quitte à arrêter M, on peut supposer $M \geq 0$ donc $0 \leq \exp(-M_t) \leq 1$ et on déduit du lemme I.1 que $\int_0^t \exp(-M_s)\, d\langle M\rangle_s < \infty$ p.s. donc que $\int_0^t \exp(-2M_s)\, d\langle M\rangle_s < \infty$.

De la proposition I.7, il résulte que $N_t = -\int_0^t \exp(-M_s)\, dM_s \in \mathcal{L}_c$. On a :

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t \exp(-2M_s)\, d\langle M\rangle_s$$

Lorsque l'on fait tendre ε vers 0 dans l'égalité (2), il vient, en faisant apparaître $d\langle N\rangle_s$:

$$\forall\, t \geq 0,\ \exp(-M_t) = N_t + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(M_s)\, d\langle N\rangle_s \quad .$$

Soit τ l'inverse à droite de $\langle N\rangle$; $\tau(0) = 0$, car $\langle N\rangle_t > 0$, $\forall\, t > 0$. On a :

$$\forall\, t \geq 0,\ \exp(-M_{\tau(t)}) = N_{\tau(t)} + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\langle N\rangle_\infty} \exp(M_{\tau(s)})\, ds$$

$(N_{\tau(t)})_{t\geq 0}$ étant un mouvement brownien réel, issu de 0, arrêté à $\langle N\rangle_\infty$, $\exp(-M_{\tau(t)})_{t\geq 0}$ est, d'après le théorème de Yamada-Watanabe, un BES(2) arrêté à $\langle N\rangle_\infty$. On termine la démonstration en remarquant que les intervalles de constance de M et de $\langle N\rangle$ sont les mêmes.

Ce théorème montre, qu'à un changement de temps près, les trajectoires de $M \in \mathcal{H}$ sont celles du processus $(-\operatorname{Log}(\rho_t))_{t>0}$ où ρ est un BES(2).

II.2.- COROLLAIRE : Soit ρ un BES(q), $q > 2$. Il existe un processus croissant continu, nul en 0, A, et ρ' un BES(2) tels que : $\exp\left(-\frac{1}{\rho_t^{q-2}}\right) = \rho'_{A_t}$.

Démonstration : D'après la formule d'Ito, $\frac{1}{\rho^{q-2}} \in \mathcal{H}$. Le résultat se déduit du théorème II.1 avec $A_t = (q-2)^2 \int_0^t \exp\left(-\frac{2}{\rho_s^{q-2}}\right) \frac{ds}{\rho_s^{2(q-1)}}$

Le résultat suivant est l'analogue d'un théorème de F. Knight [5] sur la représentation de deux martingales continues, orthogonales.

II.3.- PROPOSITION : Soient M et M' $\in \mathcal{H}$ telles que $d\langle M,M'\rangle = 0$. Alors il existe ρ et ρ' deux BES(2) indépendants tels que :

$$\exp(-M_t) = \rho_{A_t} \ ; \ \exp(-M'_t) = \rho'_{A'_t} \quad .$$

Démonstration :

$\exp(-M_t) = N_t + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(M_s)\, d<N>_s$, $\exp(-M'_t) = N'_t + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(M'_s)\, d<N'>_s$

avec $N_t = -\int_0^t \exp(-M_s)\, dM_s \in \mathcal{L}_c$ et $N'_t = -\int_0^t \exp(-M'_s)\, dM'_s \in \mathcal{L}_c$.

On a : $d<N,N'> = 0$ car $d<M,M'> = 0$; d'après le théorème de Knight [5], N_τ et $N'_{\tau'}$, sont deux mouvements browniens réels, arrêtés, issus de 0, indépendants, τ et τ' désignant les inverses à droite respectifs de $<N>$ et $<N'>$. On en déduit donc que ρ et ρ' sont deux BES(2) indépendants.

Remarque : Soit $M \in \mathcal{H}$, $M > 0$; en appliquant la formule d'Ito à $x \mapsto \frac{1}{x}$ et à M, le lemme I.1., et le théorème de Yamada-Watanabe pour caractériser BES(3), on obtient le théorème suivant, qui est une représentation des éléments positifs de $\mathcal{H}$.

II.4.- THEOREME : Soit $M \in \mathcal{H}$, $M > 0$. Alors le processus croissant continu $A_t = \int_0^t \frac{d<M>_s}{M_s^4}$ est à valeurs finies et il existe un BES(3) noté ρ, tel que

$$\frac{1}{M_t} = \rho_{A_t} .$$

De ce théorème, on déduit, en suivant le raisonnement du corollaire II.2 et de la proposition II.3, le corollaire et la proposition suivants :

II.5.- COROLLAIRE : Soit ρ un BES(q), $q > 2$; il existe un processus croissant continu A, nul en 0, et un BES(3), ρ', tels que : $\rho_t^{q-2} = \rho'_{A_t}$ avec $A_t = (q-2)^2 \int_0^t \rho_s^{2(q-3)}\, ds$.

II.6.- PROPOSITION : Soient M et M' orthogonales, $M > 0$, $M' > 0$, alors $\frac{1}{M_t} = \rho_{A_t}$, $\frac{1}{M'_t} = \rho'_{A'_t}$, ρ et ρ' étant deux BES(3) indépendants.

Le théorème de représentation II.4 des processus strictement positifs de l'ensemble $\mathcal{H}$ permet de généraliser le théorème de Pitman ([8]) dont nous rappelons une version :

Soit ρ un $(\mathcal{F}_t)$ processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 et $J_t(\rho) = \inf_{s \geq t} \rho_s$. Alors $B_t = 2\, J_t(\rho) - \rho_t$ est un $(\mathcal{F}_t \vee \sigma(J_t))$ mouvement brownien.

II.7.- THEOREME :

1) Soit $M \in \mathcal{H}$, $M > 0$. Alors $\frac{2}{J_t(-M)} + \frac{1}{M_t}$ est une martingale locale continue

nulle en 0.

2) En particulier, soit X une diffusion strictement positive, $X(0) = 0$, $X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$, s sa fonction d'échelle telle que $s(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Alors :

$\frac{2}{s(J_t(X))} - \frac{1}{s(X_t)}$ est une martingale locale continue, nulle en 0.

Démonstration :

1) D'après le théorème II.4, on a : $\frac{1}{M_t} = \rho_{A_t}$ où ρ est un BES(3) et $A_t = \int_0^t \frac{d<M>_s}{M_s^4} < \infty$. Alors :

$2\, J_t(\frac{1}{M}) - \frac{1}{M_t} = 2J_t(\rho_A) - \rho_{A_t} = \beta_{A_t}$; A_t est un $(\mathcal{F}_t \vee \sigma(J_t))$ temps d'arrêt,

donc $2J_t(\frac{1}{M}) - \frac{1}{M_t}$ est une martingale locale continue, nulle en 0.

De l'égalité $J_t(\frac{1}{M}) = -\frac{1}{J_t(-M)}$ on déduit la première partie du théorème.

2) On choisit s de sorte que $s < 0$ ($[1\,0]$). Dans ce cas, $-s(X_t) \in \mathcal{H}$ et $-s(X_t) > 0$. Par application de 1) à $-s(X_t)$, on obtient :

$$\frac{2}{J_t(s(X))} - \frac{1}{s(X_t)} \text{ est une martingale locale continue, nulle en 0.}$$

s étant continue et croissante, $J_t(s(X)) = s(J_t(X))$, la deuxième partie en résulte.

Nous allons maintenant démontrer une propriété de la mesure aléatoire $d<M>$ associée à $M \in \mathcal{H}$, qui permettra de montrer que $d<M>$ n'est pas déterministe.

Commençons par une remarque :

Soit $M \in \mathcal{H}$, $M > 0$; alors en appliquant la formule d'Ito à $x \to \text{Log } x$, puis à $x \to \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, on obtient :

$$\int_{0^+}^{\cdot} \frac{d<M>_s}{M_s^{2+\alpha}} \begin{cases} = +\infty & (\alpha \leq 0) \\ < \infty & (\alpha > 0) \end{cases}$$

II.8.- PROPOSITION : Soient $M \in \mathcal{H}$, $N \in \mathcal{L}_c^{open}$ telles que $d<M> = d<N>$. Alors $MN \notin \mathcal{L}_c^{open}$.

Démonstration : Quitte à arrêter M, on peut supposer $M > 0$. Supposons $MN \in \mathcal{L}_c^{open}$ ce qui équivaut à $d<M,N> = 0$, et appliquons la formule d'Ito à $(n,m) \to \text{Arctg}(\frac{n}{m})$ et à (N,M). On obtient :

$$\text{Arctg}\,\frac{N_t}{M_t} = \text{Arctg}\,\frac{N_\varepsilon}{M_\varepsilon} + \int_\varepsilon^t \frac{M_s\,dN_s - N_s\,dM_s}{N_s^2 + M_s^2} \qquad (0 < \varepsilon \leq t).$$

On a bien sûr : $|\text{Arctg}\,\frac{N_t}{M_t}| \leq \frac{\pi}{2}$. On déduit alors, du théorème I.3 et de la proposition I.2, que :

$$\lim_{t\downarrow o} \text{Arctg}\,\frac{N_t}{M_t} \in \mathbb{R}, \text{ donc que } \lim_{t\downarrow o} \frac{N_t}{M_t} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et que } \text{Arctg}\,\frac{N}{M} \in \mathcal{L}_c.$$

Il découle alors de la proposition I.2 que :

$$(3) \qquad \int_{o+}^{\cdot} \frac{d\langle M\rangle_s}{N_s^2 + M_s^2} < \infty$$

En étudiant les différents comportements en 0 de N (par application du théorème I.3), nous allons montrer que (3) n'a pas lieu, ce qui terminera la démonstration.

a) $N \in \mathcal{L}_c$

Ceci est impossible car $d\langle N\rangle = d\langle M\rangle$ et $M \in \mathcal{H}$.

b) $\lim_{t\downarrow o} N_t = +\infty$

Au voisinage de 0, $\frac{1}{N_s^2 + M_s^2} \geq \frac{1}{(N_s + M_s)^2}$ donc

$\int_{o+}^{\cdot} \frac{d\langle N + M\rangle_s}{(N_s + M_s)^2} \leq 2 \int_{o+}^{\cdot} \frac{d\langle M\rangle_s}{N_s^2 + M_s^2} < \infty$, ce qui, d'après la remarque précédente, est impossible puisque $N + M \in \mathcal{H}$.

c) $\lim_{t\downarrow o} N_t = -\infty$

On applique le raisonnement du cas b) à (-N).

d) $\underline{\lim}_{t\downarrow o} N_t = -\infty$ et $\overline{\lim}_{t\downarrow o} N_t = +\infty$

Dans ce cas, $\lim_{t\downarrow o} \frac{N_t}{M_t} = 0$, donc, au voisinage de 0, $N_s^2 \leq M_s^2$, et par conséquent : $\frac{1}{N_s^2 + M_s^2} \geq \frac{1}{2M_s^2}$. Donc : $\int_{o+}^{\cdot} \frac{d\langle M\rangle_s}{M_s^2} \leq 2 \int_{o+}^{\cdot} \frac{d\langle M\rangle_s}{N_s^2 + M_s^2} < \infty$ ce qui contredit encore la même remarque.

II.9.- COROLLAIRE : Soit $M \in \mathcal{H}$. Alors, la mesure de Radon $d\langle M\rangle$ n'est pas déterministe.

Démonstration : Supposons qu'il existe $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F},P,(M_t)_{t>0})$ "processus" tel que : $M \in \mathcal{H}$ $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F},P)$, $M>0$ (ce à quoi on peut toujours se ramener par arrêt), et $<M>(.,]\varepsilon,t]) = \mu(]\varepsilon,t])$, avec μ mesure de Radon déterministe, positive, sur $]0,\infty[$, $\mu(]\varepsilon,1]) \nearrow_{\varepsilon\downarrow 0} +\infty$.

Soit $(\Omega',(\mathcal{F}'_t),\mathcal{F}',(M'_t),P')$ une copie du processus précédent. Sur l'espace produit convenablement complété, posons : $X_t(\omega,\omega') = M_t(\omega)$ et $Y_t(\omega,\omega') = M'_t(\omega')$. Alors :

$$X \in \mathcal{H},\ Y \in \mathcal{H},\ X>0,\ Y>0,\ <X>(.,]\varepsilon,t]) = \mu(]\varepsilon,t]) = <Y>(.,]\varepsilon,t]).$$

De plus, par construction, $XY \in \mathcal{H}$, ce qui, d'après la proposition II.8 est impossible.

III.- REPRESENTATION DE CERTAINES MARTINGALES CONFORMES OUVERTES, ET APPLICATIONS

Dans cette troisième partie, nous nous proposons d'étudier, pour $n \geq 2$, l'espace :

$$\mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^n) \overset{def}{=\!=} \{M=(M^i)_{1\leq i\leq n}\ ;\ \forall\, i \in \{1,.,n\},\ M^i \in \mathcal{L}_c^{open},$$
$$d<M^i> = d<M^j>\ ,\ d<M^i,M^j> = 0,\ i \neq j\}$$

Cette étude nous permettra de résoudre le problème suivant :

Soient B un mouvement brownien réel, issu de 0, et $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue. Sous quelles hypothèses existe-t-il $V \in \mathcal{L}_c^{open}$ telle que :

$$V_t - V_s = \int_s^t f(u)\, dB_u \quad (0 < s \leq t) \ ?$$

$\mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^2)$ s'identifie de manière évidente à l'espace :

$$\mathcal{C}_c^{open} = \{Z = X + iY\ ;\ X,Y \in \mathcal{L}_c^{open},\ d<X> = d<Y> \text{ et } d<X,Y> = 0\}\ .\ \text{(cf. I).}$$

Le théorème I.5 donne le comportement en 0 des trajectoires des éléments de $\mathcal{C}_c^{open}$.

Nota bene : Soient $W = A + iB$ et $Z = X + iY$ deux martingales locales, continues, complexes ; on prend pour définition de $<W,Z> \equiv <A+iB, X+iY>$ le processus $<A,X> - <B,Y> + i(<B,X> + <A,Y>)$. En particulier, si $Z = X + iY$ est une martingale conforme, on a :

$$<Z,Z> = <\bar{Z},\bar{Z}> = 0, \qquad <Z,\bar{Z}> = 2<X>$$

III.1.- THEOREME : Soit $Z \in \mathcal{C}_c^{open}$ tel que $\lim_{t\downarrow o} |Z_t| = +\infty$. Le processus croissant continu $A_t = \frac{1}{2}\int_o^t \frac{d<Z,\bar{Z}>_s}{|Z_s|^4}$ est à valeurs finies et il existe un mouvement brownien complexe, U, issu de 0, tel que : $\frac{1}{Z_t} = U_{A_t}$.

Démonstration : D'après la formule d'Ito, $\frac{1}{Z} \in \mathcal{C}_c^{open}$; comme $\lim_{t\downarrow o} \frac{1}{Z_t} = 0$, on déduit de la proposition I.2 que $\frac{1}{Z}$ est une martingale conforme, nulle en 0. Il existe donc (cf. [3]) $U \in BM_o(\mathbb{C})$ tel que : $\frac{1}{Z_t} = U_{A_t}$, avec $A_t = <Re(\frac{1}{Z})>_t = \frac{1}{2}\int_o^t \frac{d<Z,\bar{Z}>_s}{|Z_s|^4}$.

Remarque : Soit $Z \in \mathcal{C}_c^{open}$ tel que $\lim_{t\downarrow o} |Z_t| = +\infty$. On obtient, en appliquant la formule d'Ito à $z \to \mathrm{Log}\,(|z|)$, puis à $z \to |z|^{-q/2}$ $(q > 0)$, que :

$$\int_{o+}^{\cdot} \frac{d<Z,\bar{Z}>_s}{|Z_s|^{q+2}} \begin{cases} = +\infty & (q \le 0) \\ < +\infty & (q > 0) \end{cases}$$

Remarquons également que la proposition II.8 permet de montrer que les éléments de $\mathcal{H}$ ne peuvent être partie réelle d'éléments de $\mathcal{C}_c^{open}$.

Il reste à étudier le troisième cas du théorème de Walsh qui correspond à :

$$\lim_{t\downarrow o} |Z_t| = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{t\downarrow o}}\, |Z_t| = +\infty .$$

Le théorème suivant montre que dans ce cas il n'est pas possible d'obtenir un résultat analogue au théorème III.1.

III.2.- THEOREME : Il n'existe pas de loi μ de martingale de $\mathcal{C}_c^{open}$ telle que :

$$\forall\, V \in \mathcal{C}_c^{open},\ \lim_{t\downarrow o} |V_t| = 0 \text{ et } \overline{\lim_{t\downarrow o}}\, |V_t| = +\infty,$$

$\exists$ A processus croissant continu nul en 0, $A_t > 0$ $\forall$ $t > 0$, et M de loi μ tel que $V_t = M_{A_t}$.

Démonstration : Supposons l'existence d'une telle loi μ. Soit U un mouvement brownien complexe issu de 0, et posons : $V_t = \exp(\frac{1}{U_t})$, $W_t = \exp(V_t)$. De la formule d'Ito, on déduit que V et W appartiennent à $\mathcal{C}_c^{open}$; de plus on a :

$$\underline{\lim}_{t\downarrow o} |V_t| = \underline{\lim}_{t\downarrow o} |W_t| = 0 , \quad \overline{\lim}_{t\downarrow o} |V_t| = \overline{\lim}_{t\downarrow o} |W_t| = +\infty .$$

Par hypothèse, on a alors : $V_t = M_{A_t}$, $W_t = M'_{A'_t}$, où $M \in \mathcal{C}_c^{open}$, $M' \in \mathcal{C}_c^{open}$, M et M' ont pour loi μ. Ceci est impossible puisque $|\mathrm{Log}(M_{A_t})| \xrightarrow[t\downarrow o]{} +\infty$, $\underline{\lim}_{t\downarrow o} |\mathrm{Log}\, M'_{A'_t}| = 0$. □

Soit $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) = \{M = (M^i)_{1\le i\le n}$; $\forall\, i \in \{1,..,n\}$, $M^i \in \mathcal{L}_c$; $d\langle M^i\rangle = d\langle M^j\rangle$ et $d\langle M^i, M^j\rangle = 0\}$. Il est clair que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^n)$ pour $n \in \{1,2\}$. Pour les dimensions supérieures, on a le :

III.3.- THEOREME : $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $n \ge 3$.

Démonstration : Soit $n \ge 3$. Supposons qu'il existe $M = (M^i) \in \mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^n)$, $M \notin \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Du théorème I.3, on déduit que : $\lim_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$ ou $\underline{\lim}_{t\downarrow o} |M_t| < \overline{\lim}_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$.

a) $\lim_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$

Dans ce cas, on peut, quitte à arrêter $|M|$, supposer que $|M_t| > 1$, $\forall\, t > 0$. Appliquons la formule d'Ito à $(M_i)_{1\le i\le n}$ et à $(x_i)_{1\le i\le n} \longrightarrow (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{-n/2+1}$; il vient :

$$\frac{1}{|M_t|^{n-2}} = \frac{1}{|M_\varepsilon|^{n-2}} + (2-n) \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^t \frac{M_s^i\, dM_s^i}{|M_s|^n}$$

Comme $\frac{1}{|M_t|^{n-2}} \xrightarrow[t\downarrow o]{} 0$ $(n \ge 3)$, $\frac{1}{|M|^{n-2}}$ appartient à $\mathcal{L}_c$, est nulle en 0, positive, continue. Or c'est une surmartingale, elle est donc nulle partout, ce qui est impossible.

b) $\underline{\lim}_{t\downarrow o} |M_t| < \overline{\lim}_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$.

Appliquons la formule d'Ito à $(M^i)_{1\le i\le n}$ et à $(x_i)_{1\le i\le n} \longrightarrow (1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^{-q}$ avec $q = \frac{n}{2} - 1 > 0$. On obtient :

$$\frac{1}{(1+|M_t|^2)^q} = \frac{1}{(1+|M_\varepsilon|^2)^q} - 2q \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^t \frac{M_s^i\, dM_s^i}{(1+|M_t|^2)^{q+1}} - nq \int_\varepsilon^t \frac{d\langle M^1\rangle_s}{(1+|M_s|^2)^{q+2}}$$

Comme $0 < \frac{1}{(1+|M_t|^2)^q} \le 1$, $\forall\, t > 0$, on a : $E\left(\int_\varepsilon^t \frac{d\langle M^1\rangle_s}{(1+|M_s|^2)^{q+2}}\right) \le \frac{1}{nq}$

et par conséquent $\int_{o+}^{\cdot} \frac{d<M^1>}{(1+|M_s|^2)^{q+2}} < \infty$.

On en déduit alors, en appliquant le théorème I.8, que $\int_o^t \sum_{i=1}^n \frac{M_s^i \, dM_s^i}{(1+|M_s|^2)^{q+1}}$ appartient à $\mathcal{L}_c$ et donc que $\lim_{t\downarrow o} \frac{1}{(1+|M_t|^2)^{q+2}}$ existe et est finie, ce qui contredit les hypothèses sur $|M|$. □

III.4. PROPOSITION : Soit $M \in \mathcal{L}_c^{open}$, $M \notin \mathcal{L}_c$. Alors $d<M>$ n'est pas une mesure de Radon déterministe.

Démonstration : Cette proposition n'est autre que le corollaire II.9, dans le cas où $M \in \mathcal{H}$. Il nous reste donc à établir ce résultat pour $M \in \mathcal{L}_c^{open}$, $\underline{\lim}_{t\downarrow o} M_t = -\infty$ et $\overline{\lim}_{t\downarrow o} M_t = +\infty$.

Supposons qu'il existe $M \in \mathcal{L}_c^{open}$, $M \notin \mathcal{L}_c \cup \mathcal{H}$ vérifiant $<M>(.,]\varepsilon,t]) = \mu(]\varepsilon,t])$ $(0 < \varepsilon \leq t)$ avec μ mesure de Radon positive sur $]0,\infty[$, $\mu(]\varepsilon,1]) \nearrow_{\varepsilon\downarrow o} +\infty$. Donnons-nous deux copies M' et M'' du processus précédent et sur l'espace produit convenablement complété, définissons :

$$X_t(\omega,\omega',\omega'') = M_t(\omega) \quad , \quad Y_t(\omega,\omega',\omega'') = M'_t(\omega') \quad , \quad Z_t(\omega,\omega',\omega'') = M''_t(\omega'') \quad (t>0) .$$

$X \in \mathcal{L}_c^{open}$, $Y \in \mathcal{L}_c^{open}$, $Z \in \mathcal{L}_c^{open}$, $d<X> = d<Y> = d<Z>$ et par construction $d<X,Y> = d<X,Z> = d<Y,Z> = 0$, donc $V = (X,Y,Z) \in \mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3)$, ce qui est impossible car cet ensemble est vide. □

Remarque :

a) Soit $Z = X + iY \in \mathcal{C}_c^{open}$, $Z \notin \mathcal{C}_c$; posons $U = X$. Alors

$d<U> = d<X> = d<Y>$, $d<U,Y> = d<X,Y> = 0$.

Par contre, $d<U,X> = d<X> \neq 0$.

b) Soit $Z = X + iY \in \mathcal{C}_c^{open}$, $Z \notin \mathcal{C}_c$, $M \in \mathcal{L}_c^{open}$; en se plaçant sur un espace produit, on définit trois processus M', X', Y' tels que :

$d<X'> = d<Y'> \neq d<M'>$ et $d<M',X'> = d<M',Y'> = d<X',Y'> = 0$

Ces deux exemples montrent que l'on ne peut appauvrir les hypothèses définissant $\mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^3)$ tout en conservant un résultat analogue au théorème III.3

On déduit de la proposition III.4, le corollaire suivant :

III.5.- COROLLAIRE : Soient B un mouvement brownien issu de 0 et f : $]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les assertions a) et b) sont équivalentes :

a) $\exists\, M \in \mathcal{L}_c^{open}$, $\forall\, 0 < s \leq t$: $M_t - M_s = \int_s^t f(u)\, dB_u$

b) $\int_{0+}^{1} f^2(u)\, du < \infty$

De plus, $M \in \mathcal{L}_c$.

Démonstration: b) $\Longrightarrow$ a) d'après la proposition I.7.

Montrons que a) $\Longrightarrow$ b).

Soit $M \in \mathcal{L}_c^{open}$, telle que $M_t - M_s = \int_s^t f(u)\, dB_u$ $(0 < s \leq t)$. On a donc $\langle M \rangle\ (.,]\varepsilon,t]) = \int_\varepsilon^t f^2(u)\, du$ et $d\langle M \rangle$ est déterministe. De la proposition III.4, on déduit que $M \in \mathcal{L}_c$ et, d'après la proposition I.2, que $\int_{0+}^{1} f^2(s)\, ds < \infty$. □

Ce corollaire met en évidence l'existence d'éléments de $\mathcal{L}_c^{inc}$ qui ne sont pas accroissements d'éléments de $\mathcal{L}_c^{open}$, par exemple $\int_s^t \frac{dBu}{u}$.

Nous terminons cet article en donnant des exemples illustrant les théorèmes I.3 et I.5.

- Toute martingale locale, continue, étant un mouvement brownien changé de temps, il suffit pour illustrer I.3,i) de prendre le mouvement brownien standard.

- De même, le théorème II.4 montre que pour illustrer le cas I.3,ii), il suffit de prendre $\frac{1}{\rho}$ où ρ est un BES(3).

- Soit $U = X + iY$ un mouvement brownien complexe issu de 0, alors $\mathrm{Re}(\frac{1}{U}) = \frac{X}{X^2 + Y^2} \in \mathcal{L}_c^{open}$ et vérifie I.3,iii).

En fait, la proposition II.8 montre que si $Z \in \mathcal{C}_c^{open} \setminus \mathcal{C}_c$ alors $\mathrm{Re}(Z) \in \mathcal{L}_c^{open}$ et vérifie I.3,iii).

Soit $U = X + iY$ un mouvement brownien complexe issu de 0. U est un exemple du cas I.5,i), $\frac{1}{U}$ est un exemple du cas I.5,ii), et $\exp(\frac{1}{U})$ est un exemple du cas I.5,iii).

Remarquons que, d'une manière générale, si $Z \in \mathcal{C}_c^{open} \setminus \mathcal{C}_c$, alors $\exp(Z)$ vérifie toujours I.5,iii), car $\lim_{t \downarrow 0} |\exp(Z_t)| = 0$.

REFERENCES

[1] J. AZEMA et M. YOR : En guise d'introduction - Astérisque 52-53 (Temps Locaux), 3-16 (1978).

[2] C. DELLACHERIE et P.A. MEYER : Probabilités et potentiel (Théorie des martingales). Hermann - 1980.

[3] R.K. GETOOR, M.J. SHARPE : Conformal martingales. Invent. Math. - 16 - 271-308 (1972).

[4] N. IKEDA, S. WATANABE : Stochastic differential equations and diffusion processes. North Holland - Kodansha - 1981.

[5] F.B. KNIGHT : A reduction of continuous square integrable martingale to brownian motion. Lecture Notes in Math. 190, Springer-Verlag, Berlin. (1971)

[6] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sem. de proba. X Springer Lecture Notes. 511 (1976).

[7] P.A. MEYER, C. STRICKER : Sur les semi-martingales au sens de L. Schwarz. Mathematical analysis and application, Part B. Advances in Math. Supplementary Studies; vol. 7 B, (1981).

[8] J.W. PITMAN : One dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process, Adv. Appl. Prob., 7 (1975), 511-526.

[9] M.J. SHARPE : Local times and singularities of continuous local martingales. Sem. de proba. XIV. Springer Lecture Notes (1980).

[10] M.J. SHARPE : Some transformations of diffusion by time reversal. Ann. proba. 8, n°6 , 1156-1163 (dec. 1980).

[11] J.B. WALSH : A property of conformal martingales. Sem. de proba. XI. Springer Lecture Notes 581 (1977).

Rectificatif à l'énoncé du théorème II.7.

Il faut ajouter, dans les hypothèses, en i) : $\lim_{t\uparrow\infty} M_t=0$, ce qui entraîne $A_\infty = \infty$ p.s., et donc : $J_t(\rho_{A_\cdot}) = J_{A_t}(\rho_\cdot)$.

Marc YOR a contribué, par les discussions fructueuses que nous avons eues ensemble, à l'élaboration de ce travail. Nous l'en remercions vivement.

Signalons également que le problème de la représentation des martingales locales continues, indexées par $]0,\infty[$, a été posé par M. Sharpe à J. Azema et M. Yor.

Laboratoire de Probabilités
Université Pierre et Marie CURIE,
4, Place Jussieu - Tour 56, 3è étage. 75005 PARIS