SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MAURIZIO PRATELLI

Majoration dans L^p du type Métivier-Pellaumail pour les semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 125-131

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__125_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MAJORATIONS DANS L^P DU TYPE METIVIER-PELLAUMAIL POUR LES SEMIMARTINGALES.

PAR MAURIZIO PRATELLI.

Dans son cours à l'école d'été de Probabilités de Saint Flour (voir [3]), Kunita démontre des résultats de regularité des intégrales stochastiques $\int H_s(\omega,\lambda)dX_s(\omega)$ (X martingale continue) par rapport au paramètre λ par deux méthodes différentes : par application du lemme de Kolmogorov au "processus à deux indices" $(\lambda,t) \to \int_{]0,t]} H_s(\lambda)dX_s$ (mais cette méthode ne peut s'appliquer si X n'est pas continue), et en utilisant les espaces de Sobolev. L'outil essentiel de cette deuxième méthode est l'inégalité de Burkholder pour les martingales continues : on n'a aucune difficulté à étendre les résultats de Kunita à toutes les semimartingales si l'on dispose d'une inégalité qui puisse jouer le rôle de l'inégalité de Burkholder. L'objet de cette note est d'établir une telle inégalité: il s'agit d'une extension de l'inégalité, démontrée par Métivier et Pellaumail, qui caractérise les semimartingales.

En rédigeant cette note, je me suis aperçu que le livre tout récent de Métivier [5] contient le corollaire 1.3 ci-dessous (voir chapitre 8, exercice E.5) ; le résultat que je démontre toutefois est un peu plus général et sa démonstration une simple conséquence des méthodes de [4] : on remarquera qu'on peut montrer le résultat principal sans parler de semimartingales!

Il faut aussi signaler que Meyer [8] obtient des résultats de régularité par des méthodes assez différentes : les inégalités pour les intégrales stochastiques établies dans [2]. Je crois toutefois que la méthode du "processus de contrôle" garde de l'intérêt par sa simplicité.

1. UNE INEGALITE.

Soit $(\Omega,\underline{F},(\underline{F}_t),\mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, vérifiant les conditions habituelles de [1] ; X est un processus adapté à trajectoires c.à.d.l.à.g. , et on écrit comme d'habitude $X_{t-} = \lim_{s\uparrow t} X_s$ et $\Delta_t X = X_t - X_{t-}$.

Je désigne par S(X) le processus croissant $S(X)_t = \left(\sum_{s\leq t} (\Delta_s X)^2\right)^{1/2}$; on re-

marquera que si M est une martingale purement discontinue on a $S(M)_t^2=[M]_t$, et que si X est une semimartingale on a $S(X)_t<+\infty$ p.s. pour tout t.

Je rappelle que Métivier et Pellaumail ont montré (voir [7] pag.129) que X est une semimartingale si et seulement s'il existe un processus croissant adapté A tel que pour tout processus prévisible élémentaire H et tout temps d'arrêt T on ait

$$(1.1)\qquad E[\sup_{0<s<T}(\int_{]0,s]}HdX)^2] \leq E[A_{T-}.\int_{]0,T[}H_s^2dA_s]$$

(on dit alors que A contrôle X) ; l'inégalité (1.1) s'étend alors évidemment à tous les processus prévisibles bornés. J'écris comme d'habitude $H.X=\int HdX$ et $X_t^*=\sup_{s\leq t}|X_s|$, et encore $H.X_t^*$ au lieu de $(H.X)_t^*$ (sans danger de confusion, car je n'intégrerai jamais par rapport au processus croissant X^*) : on peut aussi écrire plus simplement $(H.X_{T-}^*)^2$ au lieu de $\sup_{0<s<T}(\int_{]0,s]}HdX)^2$.

Dans toute la suite, F désigne une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$, nulle en zéro, croissante, continue à droite, telle que $F(x)>0$ pour $x>0$; on dit que F est modérée (à croissance modérée) s'il existe une constante k telle que $F(2x)\leq k.F(x)$ pour tout $x>0$.

THEOREME 1.2 Soit X une semimartingale contrôlée par A, et soit $B_t=A_t+S(X)_t$: pour toute fonction modérée F il existe une constante c (ne dépendant que de F) telle que l'on ait, pour tout processus prévisible borné H

$$E[F(H.X_{T-}^*)] \leq c\,E[F((B_{T-}.\int_{]0,T[}H_s^2dB_s)^{1/2})] .$$

Démonstration Soient a_t et b_t les deux processus croissants $a_t=H.X_t^*$ et $b_t=(B_t.\int_{]0,t]}H_s^2dB_s)^{1/2}$. Il suffit de montrer que pour tout couple R,T de temps d'arrêt avec $R\leq T$ on a $E[(a_{T-}-a_{R-})^2]\leq h.E[b_{T-}^2.I_{\{R<T\}}]$ (avec h constante convénable) et d'appliquer ensuite le lemme 1.1 de [4] (voir aussi les remarques aux pages 31 et 35) pour avoir le résultat.

Le processus $HI_{]R,+\infty[}$ est encore prévisible : si $t\geq R$ on a

$(H.X)_t-(H.X)_{R-}=(HI_{]R,+\infty[}.X)_t+H_R\Delta_R X$. On vérifie aisément l'inégalité suivante :

$H.X^*_{T-}-H.X^*_{R-} \leq HI_{]R,+\infty[}.X^*_{T-} + |H_R\Delta_R X|\, I_{\{R<T\}}$ et donc

$(H.X^*_{T-}-H.X^*_{R-})^2 \leq 2(HI_{]R,+\infty[}.X^*_{T-})^2 + 2\, H_R^2(\Delta_R X)^2 I_{\{R<T\}}$.

Pour le premier terme, on a

$E[(HI_{]R,+\infty[}.X^*_{T-})^2] \leq E[A_{T-}.\int_{]0,T[}(HI_{]R,+\infty[})^2 dA_r] = E[A_{T-}.\int_{]R,T[}H_r^2 dA_r]$

$\leq E[(A_{T-}.\int_{]0,T[}H_r^2 dA_r)I_{\{R<T\}}]$.

Pour le deuxième, on a

$H_R^2(\Delta_R X)^2 = H_R^2(S(X)_R+S(X)_{R-})(S(X)_R-S(X)_{R-}) \leq 2\, S(X)_R\, H_R^2(S(X)_R-S(X)_{R-})$

$\leq 2\, S(X)_R.\int_{]0,R]}H_s^2 dS(X)_s$, et donc

$H_R^2(\Delta_R X)^2 I_{\{R<T\}} \leq 2(S(X)_{T-}.\int_{]0,T[}H_s^2 dS(X)_s)I_{\{R<T\}}$.

On vérifie donc sans peine que

$E[(H.X^*_{T-}-H.X^*_{R-})^2] \leq 6\, E[(B_{T-}.\int_{]0,T[}H_s^2 dB_s)I_{\{R<T\}}]$

ce qui achève la démonstration.

La majoration dans L^p proprement dite est le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.3 Avec les notations du théorème précédent, on a pour tout $p>2$

$E[(H.X^*_{T-})^p] \leq c_p\, E[B_{T-}^{p-1}.\int_{]0,T[}|H_s|^p dB_s]$.

Démonstration En prenant $F(x)=x^p$, on a (compte tenant de l'inégalité de Holder) :

$E[(H.X^*_{T-})^p] \leq c_p\, E[(B_{T-}.\int_{]0,T[}H_s^2 dB_s)^{p/2}] \leq c_p\, E[B_{T-}^{p-1}.\int_{]0,T[}|H_s|^p dB_s]$.

REMARQUE 1.4 L'inégalité du théorème 1.2 n'est pas vraie, en général, avec le processus croissant A_t au lieu de B_t (voir à cet effet l'exemple 2.2). Toutefois on a l'inégalité $E[F(H.X^*_{T-})] \leq c\, E[F((A_{T-}.\int_{]0,T[}H_s^2 dA_s)^{1/2})]$ dans les deux cas suivants :

a) $F(x) = G(x^2)$ avec G concave (il suffit pour cela de remarquer que l'inéga-

lité (1.1) permet d'appliquer directement le lemme 1.3 de [4], qui donne aussi la constante c=2).

b) X est une semimartingale restreinte strictement contrôlée par A (voir [9] définition 1.1 et théorème 1.3) : dans ce cas H est plus généralement optionnel borné. On doit cette fois répéter la démonstration du théorème 1.2 avec $HI_{[R,+\infty[}$ au lieu de $HI_{]R,+\infty[}$.

2. QUELQUES CONSEQUENCES.

Soit M une martingale de carré intégrable, $M=M^c+M^d$ sa décomposition en une somme d'une martingale continue et d'une somme compensée de sauts, et $M^d=M^p+M^i$ où M^p est la somme compensée des sauts prévisibles et M^i des sauts totalement inaccessibles. Métivier et Pellaumail (voir [7] pag. 124) ont montré l'inégalité

$$E[(M^*_{T-})^2] \leq 4\, E[\, \langle M\rangle_{T-} + [M^p]_{T-}\,].$$

Nous avons l'extension suivante :

THEOREME 2.1 Pour toute F modérée, on a

$$E[F(M^*_{T-})] \leq c\, E[F(\,(\langle M\rangle_{T-}+[M^d]_{T-})^{1/2})]$$

avec c constante ne dépendante que de F.

Démonstration Soit H prévisible borné : on a

$$E[(H.M^*_{T-})^2] \leq 4\, E[\,\langle (H.M)\rangle_{T-}+[(H.M)^p]_{T-}] = 4\, E[\int_{]O,T[} H_s^2 d(\langle M\rangle_s+[M^p]_s)]$$

$$\leq 8\, E[A_{T-}\cdot \int_{]O,T[} H_s^2 dA_s] \qquad \text{avec } A_t=(\langle M\rangle_t+[M^p]_t)^{1/2}$$

(pour la dernière inégalité, on rappellera que $dA_t^2=(A_t+A_{t-})dA_t \leq 2A_t dA_t$). En remarquant que $S(M)_t^2=[M^d]_t=[M^p]_t+[M^i]_t$, on a $A_t+S(M)_t \leq 2(\langle M\rangle_t+[M^d]_t)^{1/2}$, et en prenant H=1 , la thèse du théorème 1.2 est précisément l'inégalité cherchée.

On montre dans l'exemple suivant que l'inégalité précédente n'est pas vraie en général avec $[M^p]_t$ au lieu de $[M^d]_t$; on considère à cet effet une martingale

M somme compensée de sauts totalement inaccessibles (donc $[M^p]_t=0$) et la fonction $F(x)=x^p$ avec $p>2$.

EXEMPLE 2.2 Soit $\Omega=]0,+\infty]$, $d\mathbb{P}(x)=e^{-x}dx$, $T(x)=x$ et $\underline{F}_t$ la plus petite filtration (completée et rendue continue à droite) pour laquelle T est un temps d'arrêt: $\underline{F}_t$ contient les boréliens de $]0,t]$ et l'atome $]t,+\infty[$, et T est totalement inaccessible. Soit A borélienne positive, telle que $\int_0^{+\infty}A(x)d\mathbb{P}(x)=\int_0^{+\infty}A(x)e^{-x}dx<+\infty$: considérons le processus croissant adapté $A_t(x)=A(x)I_{\{t\geq T\}}(x)=A(x)I_{]0,t]}(x)$, dont le compensateur prévisible est $\tilde{A}_t(x)=\int_0^{t\wedge x}A(y)dy$. En effet, puisque sur $]0,s]$ on a $A_t-A_s=\tilde{A}_t-\tilde{A}_s=0$, il suffit de vérifier que $\int_s^{+\infty}(A_t-A_s)e^{-x}dx=\int_s^{+\infty}(\tilde{A}_t-\tilde{A}_s)e^{-x}dx$. Le premier terme coincide avec $\int_s^t A(x)e^{-x}dx$ et le deuxième avec $\int_s^t(\int_s^x A(y)dy)e^{-x}dx+\int_t^{+\infty}(\int_s^t A(y)dy)e^{-x}dx$: l'égalité entre ces deux derniers est un simple exercice. Soit maintenant $M_t=A_t-\tilde{A}_t$: on a $[M]_t(x)=A^2(x)I_{]0,t]}(x)$ et $\langle M\rangle_t(x)=\int_0^{t\wedge x}A^2(y)dy$.

Si l'inégalité $E[(M^*_{T-})^p]\leq c_p.E[\langle M\rangle^{p/2}_{T-}]$ $(p>2)$ était vraie, on aurait pour $T=+\infty$ $E[(M^*_\infty)^p]\leq c_p.E[\langle M\rangle^{p/2}_\infty]$ et aussi $E[[M]^{p/2}_\infty]\leq c'_p.E[\langle M\rangle^{p/2}_\infty]$ (on rappellera que $E[[M]^{p/2}_\infty]\leq d_p.E[(M^*_\infty)^p]$: inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, voir par example [4]). Mais $[M]_\infty(x)=A^2(x)$ et $\langle M\rangle_\infty(x)=\int_0^x A^2(y)dy$; on peut trouver facilement A telle que $\int_0^{+\infty}A^p(x)e^{-x}dx=+\infty$ et $\int_0^{+\infty}A^2(y)dy<+\infty$, et dans ce cas $E[[M]^{p/2}_\infty]=+\infty$ et $E[\langle M\rangle^{p/2}_\infty]<+\infty$.

REMARQUE 2.3 Je signale brièvement, sans entrer dans les détails, que l'inégalité du th. 2.1 peut s'appliquer à l'integrale stochastique par rapport aux mesures aléatoires-martingales (je suis de très près la présentation donnée dans [6] pag.111-119) : si on considère, à la pag. 117 de [6], une suite de temps d'arrêt à graphes disjoints qui porte tous les sauts du processus F^q (pas seulement les sauts prévisibles) on obtient une inégalité analogue à la (1.4.6) avec une fonction moderée quelconque F au lieu de $F(x)=x^2$.

Montrons maintenant, à titre d'exemple, la "traduction" pour les semimartin-

gales générales du th.6.2 de [3].

Soit Λ un domaine borné de $\mathbb{R}^d$: je rappelle que l'espace de Sobolev $W_{p,m}(\Lambda)$ est le complété de $C^m(\Lambda)$ pour la norme $\|f\|^p_{p,m} = \Sigma_{|\alpha|\leq m} \int_\Lambda |D^\alpha f|^p d\lambda$.

Si $f \in W_{p,m}(\Lambda)$ et α est un multi-indice avec $|\alpha| \leq m$, il existe une fonction $f^\alpha \in L^p(\Lambda)$ et une suite f_n d'éléments de $C^m(\Lambda)$ telle que $f_n \to f$ et $D^\alpha f_n \to f^\alpha$ dans $L^p(\Lambda)$: on dit que f^α est la dérivée forte de f (qui est aussi dérivée faible, c'est-à-dire dérivée au sens des distributions) et on écrit, avec la notation des dérivées classiques, $f^\alpha = D^\alpha f$. Soit maintenant $H(\omega,s,\lambda)$ définie sur $\Omega \times]0,\infty[\times \Lambda$, mesurable pour la tribu $\underline{P} \times \underline{B}(\Lambda)$ ($\underline{P}$ tribu prévisible sur $\Omega \times]0,\infty[$, $\underline{B}(\Lambda)$ tribu de Borel sur Λ) ; supposons que, pour presque tout ω, pour tout s $H(\omega,s,.)$ soit un élément de $W_{p,m}(\Lambda)$ ($p \geq 2$) et que $D^\alpha H$ soit encore mesurable pour la tribu $\underline{P} \times \underline{B}(\Lambda)$.

Soit X une semimartingale, B le processus croissant qui résulte du th.1.2 et supposons que $\int_{]0,t]} \|H\|^p_{p,m} \, dB_s < +\infty$ p.s. pour tout t : il existe une version $L_t(\lambda)$ de l'intégrale $\int H(\lambda) dX$ telle que, pour presque tout ω, pour tout t $L_t(\lambda) \in W_{p,m}(\Lambda)$ et telle que $D^\alpha L_t = \int_{]0,t]} (D^\alpha H) dX$.

On peut supposer, par arrêt, que $E[B_\infty^{p-1} . \int_{]0,\infty[} \|H\|^p_{p,m} \, dB_s] < +\infty$; la thèse est évidemment vraie pour un processus (prévisible élémentaire) de la forme $\sum_{i=1}^n H_i(\omega,\lambda) I_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$. Pour un tel processus on a

$$E[\sup_{0<t<\infty} \|\int_{]0,t]} H dX\|^p_{p,m}] = E[\sup_{0<t<\infty} \Sigma_{|\alpha|\leq m} \int_\Lambda d\lambda |\int_{]0,t]} (D^\alpha H) dX|^p]$$

$$\leq \Sigma_{|\alpha|\leq m} \int_\Lambda d\lambda \, E[\sup_{0<t<\infty} |\int_{]0,t]} (D^\alpha H) dX|^p]$$

$$\leq c_p . \Sigma_{|\alpha|\leq m} \int_\Lambda d\lambda \, E[B_\infty^{p-1} . \int_{]0,\infty[} |D^\alpha H|^p dB_s] = c_p . E[B_\infty^{p-1} . \int_{]0,\infty[} \|H\|^p_{p,m} \, dB_s] .$$

Soit maintenant H^n une suite de processus prévisibles élémentaires telle que $\lim_{n\to\infty} E[B_\infty^{p-1} . \int_{]0,\infty[} \|H-H^n\|^p_{p,m} \, dB_s] = 0$. En posant $L^n_t = \int H^n dX$, quitte à extraire une sous-suite, $L^n_t(\lambda)$ converge p.s. dans $D([0,\infty[, W_{p,m}(\Lambda))$ (espace des fonctions c.à.d.l.à.g. définies sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $W_{p,m}(\Lambda)$, avec la norme uniforme) : soit L_t la limite, qui est évidemment une version de l'intégrale $\int H dX$.

Puisque $L^n_t \to L_t$ dans $L^p(\Omega,\underline{F}_t,\mathbb{P},W_{p,m}(\Lambda))$, on a $D^\alpha L^n_t \to D^\alpha L_t$ dans $L^p(\Omega,\underline{F}_t,\mathbb{P},L^p(\Lambda))$; mais aussi $\int_{]0,t]}(D^\alpha H^n)dX \to \int_{]0,t]}(D^\alpha H)dX$ dans $L^p(\Omega,\underline{F}_t,\mathbb{P},L^p(\Lambda))$ (remarquer que

$E[\int_\Lambda d\lambda |\int_{]0,t]} D^\alpha(H^n-H)dX|^p] \leq c_p . \int_\Lambda d\lambda \; E[B_t^{p-1} . \int_{]0,t]} |D^\alpha(H^n-H)|^p dB_s]$

$\leq c_p . E[B_t^{p-1} . \int_{]0,t]} ||H^n-H||^p_{p,m} \, dB_s]$).

L'égalité $D^\alpha L^n_t = \int (D^\alpha H^n)dX$ permet de conclure la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DELLACHERIE C. MEYER P. A. Probabilités et potentiel. Chapitres V-VIII Hermann-Paris (1980)

[2] EMERY M. Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques; application aux intégrales multiplicatives stochastiques. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie v. G. 41 (1978) pag. 241-262

[3] KUNITA H. Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. Cours à l'école d'été de Probabilités de Saint Flour 1982. A paraitre

[4] LENGLART E. LEPINGLE D. PRATELLI M. Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Séminaire de Probabilités XIV (pag. 26-48) Lecture Notes 784. Springer Verlag (1980)

[5] METIVIER M. Semimartingales. A course on stochastic processes. A paraitre.

[6] METIVIER M. Stability theorems for stochastic integral equations driven by Random measures and Semimartingales. Journal of Integral Equations 3 (1981) pag. 109-135

[7] METIVIER M. PELLAUMAIL J. Stochastic Integration. Academic Press (1980)

[8] MEYER P. A. Flot d'une équation differentielle stochastique. Séminaire de Probabilités XV (pag. 103-117) Lecture Notes 850. Springer Verlag (1981)

[9] PRATELLI M. La classe des semimartingales qui permettent d'intégrer les processus optionnels . **Dans ce volume.**

Maurizio PRATELLI
Istituto di Statistica
Via S. Francesco 122
35122 PADOVA Italie.