Séminaire de probabilités (Strasbourg)

G. K. Eagleson
Jean Mémin

Sur la contiguïté de deux suites de mesures : généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryayev

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 319-337
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__319_0>

SUR LA CONTIGUITE DE DEUX SUITES DE MESURES:

GENERALISATION D'UN THEOREME DE KABANOV-LIPTSER-SHIRYAYEV.

G.K. Eagleson (*) J. Mémin (**)

(*):CSIRO Division of Mathematics and Statistics,P.O.Box 218
Lindfield,NSW 2070 AUSTRALIA

(**):Département de Mathématiques,Université de Rennes,35042 RENNES CEDEX

Soit P et Q deux probabilités définies sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{F})$, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration de $\mathcal{F}$, il est intéressant de donner des conditions assurant l'absolue continuité de Q par rapport à P ou la singularité de P et Q à partir du comportement limite de certains processus adaptés à $(\mathcal{F}_t)$. Quand Q est localement absolument continue par rapport à P, c'est à dire quand pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, la restriction Q_t de Q à $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la restriction P_t de P à $\mathcal{F}_t$, Kabanov, Liptser et Shiryayev ont obtenu [8] un résultat caractérisant l'absolue continuité (resp:la singularité) de Q par rapport à P en termes de finitude (resp:infinitude) Q-presque sûre de la variable terminale d'un processus croissant prévisible lié au processus densité Z (où $Z_t=dQ_t/dP_t$).

Eagleson et Gundy [2] ont montré que ce résultat, dans le cas d'une filtration discrète $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pouvait être obtenu comme corollaire d'un théorème général relatif à une suite $(P^n,Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de couples de probabilités définies sur des espaces mesurables $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$ munis de filtrations respectives $(\mathcal{F}^n_j)_{j\leq n}$; ce théorème permettant également d'obtenir des conditions de contiguité de $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite contigue relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$, si, étant donné une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements où pour chaque n , F_n appartient à $\mathcal{F}_n$, on a la relation:

$$\lim_n P^n(F_n)=0 \quad \text{implique} \quad \lim_n Q^n(F_n)=0.$$

Cette notion de contiguité introduite par Le Cam [9] en 1960 a un grand intérêt en Statistique: en effet si $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contigue relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si étant donné une suite (S^n) de statistiques, les lois de S^n sous P^n tendent vers une loi limite, alors au moins dans les "bons" cas on peut en déduire une loi limite pour la suite des lois de S^n sous Q^n. La contiguité a été notamment utilisée par Hájek et Šidák [3] dans des calculs d'efficacité relative asymptotique de tests et par Hall et Heyde [4] pour montrer l'existence d'intervalles de confiance asymptotiques minimaux pour l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Lorsque $\Omega^n=\Omega$, $\mathfrak{F}^n=\mathfrak{F}$, $Q^n=Q$, $P^n=P$ la contiguité de Q relativement à P est l'absolue continuité de Q par rapport à P (conséquence immédiate du lemme 2-1).

On peut définir aussi une notion qui pour les suites de couples $(P^n,Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ jouent un rôle analogue à celui de la singularité de deux probabilités P et Q, c'est la séparabilité complète (voir par exemple Le Cam [10]): On dit que $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont complètement séparables, s'il existe une sous suite $(P^{n_k},Q^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite d'ensembles $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, chaque F_{n_k} appartenant à $\mathfrak{F}_{n_k}$ telle que:

$$\lim_k P^{n_k}(F_{n_k})=0 \quad \text{alors que} \quad \lim_k Q^{n_k}(F_{n_k})=1 .$$

Nous considérons ici le cadre du temps continu, où pour chaque n, $\mathfrak{F}^n$ est munie d'une filtration $(\mathfrak{F}^n_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, et nous montrons un théorème (Théorème 2-7) analogue à celui de Eagleson et Gundy, donnant comme corollaire le résultat de Kabanov-Liptser-Shiryayev (Corollaire 2-9) et d'autre part des conditions de contiguité ou de complète séparabilité pour la suite $(P^n,Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Corollaires 2-8 et 2-12).

La méthode de démonstration utilisée est assez différente de celle de [8]; reprenant les idées de [2] et s'appuyant d'autre part sur les inégalités de domination de Lenglart [11], elle permet de garder tels quels les processus densités Z^n et les processus associés sans faire d'opération de troncation et sans se servir du comportement à l'infini de martingales ou de sous martingales locales.

Dans une première partie nous nous intéressons à deux probabilités P et Q définies sur $(\Omega,\mathfrak{F})$ et aux processus liés au processus densité Z, en exhibant des propriétés utilisées ensuite.

Dans la deuxième partie, après avoir relié les propriétés de contiguité ou de complète séparabilité au comportement asymptotique de la suite des variables terminales $(Z_\infty^n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous montrons le théorème principal et les deux corollaires annoncés. On donne enfin à titre d'application une caractérisation de la contiguité lorsque (P^n,Q^n) sont des lois de processus à accroissements indépendants (Théorème 3-2 et Corollaire 3-3).

Le language, les notions (et la plupart des notations) utilisés sont ceux de la théorie générale des processus tels qu'ils sont exposés par exemple dans le livre [1] de Dellacherie et Meyer ou dans celui [6] de Jacod; nous ferons souvent référence à ce dernier.

I) ABSOLUE CONTINUITE LOCALE ET PROCESSUS DENSITE

Soit $(\Omega,\mathcal{F})$ un espace mesurable, P et Q deux probabilités sur $(\Omega,\mathcal{F})$, π la probabilité $1/2(P+Q)$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration possédant les propriétés habituelles pour π (c'est à dire: continuité à droite, et pour chaque $t\in\mathbb{R}^+$ $\mathcal{F}_t$ contient les ensembles de de π probabilité nulle), on suppose de plus que $\mathcal{F}=\bigvee_t \mathcal{F}_t$. On suppose que Q est localement absolument continue par rapport à P, et on note Q_t (resp: P_t) la restriction de Q (resp: P) à $\mathcal{F}_t$. Il existe (voir par exemple [6], [8]) un processus Z à valeurs dans $[0,\infty]$ et un seul à un ensemble π-évanescent près, $(\mathcal{F}_t)$-adapté, dont les trajectoires sont continues à droite limitées à gauche, admettant une limite $Z_\infty=\lim Z_t$ et qui vérifie $Z_t=dQ_t/dP_t$ pour tout $t\in\mathbb{R}^+$; ce processus a les propriétés suivantes:

(a) $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une P-martingale positive;

(b) Soit $R=\inf\{t:Z_t=0\}$ alors $Z=Z^R$ (processus arrêté en R), $0<Z_-<\infty$ sur $]\!]0,R[\![$ et $Z_{R-}<\infty$ sur $\{0<R<\infty\}$.

(c) Soit $R_p=\inf\{t:Z_t\leq 1/p, p\in\mathbb{N}\}$, on a: $\lim_{p\uparrow\infty} R_p=R$.

(d) Pour tout $F\in\mathcal{F}$ on a $Q(F)=\int_F Z_\infty dP + Q(F\cap\{Z_\infty=\infty\})$ en particulier $P(Z_\infty<\infty)=1$ et $Q(Z_\infty>0)=1$.

Z est le "processus densité de Q par rapport à P"; notons enfin le résultat suivant:

1-1 Lemme. On a les équivalences:

$$Q\ll P \iff Q(Z_\infty<\infty)=1$$
$$Q\perp P \iff Q(Z_\infty=\infty)=1$$

(Comme de coutume "$Q \ll P$" signifie :"Q absolument continue par rapport à P",et "$Q \perp P$" signifie :"Q et P sont singulières").

Soit $p \in \mathbb{N}$, R_p le temps d'arrêt introduit cidessus,sur $[\![0,R_p]\!]$ le processus Z_-^{-1} est borné par p,on peut donc définir sur cet ensemble l'intégrale stochastique:

$$\int Z_{s-}^{-1} dZ_s \overset{d}{=} \int (Z_{s-}^{R_p})^{-1} dZ_s^{R_p} \qquad (\overset{d}{=} : \text{par définition}).$$

Par recollement on peut définir $\int (Z_{s-})^{-1} dZ_s = M$ sur l'ensemble stochastique $E = \bigcup_p [\![0,R_p]\!]$;M qui est une P-martingale locale sur chaque $[\![0,R_p]\!]$,est appelée (P,E) martingale locale.Sur E on a $Z = \mathcal{E}(M)$ (exponentielle de Doléans de M),plus précisément

$$Z_t = \mathcal{E}(M)_t = \exp(M_t - 1/2 \langle M^c,M^c\rangle_t) \prod_{s\leq t}(1+\Delta M_s)\exp(-\Delta M_s)$$

où $\langle M^c,M^c\rangle$ est la partie continue de la variation quadratique (notée $[M,M]$)de M; ΔM_s désigne le saut de M en s.

On note B(M) le processus croissant défini sur E par:

$$(1):\quad B(M)_t = \langle M^c,M^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s^2 \, 1\!\!1_{\{-1/3 \leq \Delta M_s \leq 1/2\}} + \sum_{s\leq t} |\Delta M_s| \, 1\!\!1_{\{\Delta M_s < -1/3 \text{ ou } \Delta M_s > 1/2\}}$$

(la raison du choix des bornes -1/3 et 1/2 est purement technique et apparaitra au lemme 1-8).

Soit C(M) le processus croissant défini sur E par:

$$(2):\qquad C(M)_t = \langle M^c,M^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} (1/2\,\Delta M_s + 1 - (1+\Delta M_s)^{1/2}).$$

Comme M est une (P,E) martingale locale,B(M) (resp: C(M)) est P-localement intégrable sur E,ce qui signifie que pour chaque p,$B^{R_p}(M)$ (resp:$C^{R_p}(M)$) est P-localement intégrable.On peut donc définir (aussi par recollement) $\tilde{B}^P(M)$ et $\tilde{C}^P(M)$ les P-compensateurs prévisibles respectifs de B(M) et de C(M).

D'autre part (voir par exemple [6],chap.5),il existe des constantes universelles c et c' telles que l'on ait:

$$(3):\qquad cC(M) \leq B(M) \leq c'C(M).$$

On note enfin $B_{R-}(M)$ la limite $\lim_{t\uparrow R} B_t(M)$ (qui a un sens);la relation (3) implique que,en R,B(M) et C(M) ont le même comportement limite.

Comme $\{R<\infty\}$ est Q-négligeable on peut définir Q-presque partout $\tilde{B}_\infty^P(M)$ et $\tilde{C}_\infty^P(M)$, le résultat de Kabanov,Liptser et Shiryayev que nous montrons dans la deuxième partie est alors le suivant:

1-2 Théorème

(a) $\quad Q(\tilde{B}_\infty^P(M)<\infty) = Q(\tilde{C}_\infty^P(M)<\infty) = 1 \iff Q \ll P$

(b) $\quad Q(\tilde{B}_\infty^P(M)=\infty) = Q(\tilde{C}_\infty^P(M)=\infty) = 1 \iff Q \perp P.$

On va introduire maintenant les éléments M',B(M') correspondant à M,B(M),mais pour la probabilité Q.Soit M' le processus défini par:

$$M'_t = -M_t + \langle M^c,M^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} \frac{\Delta M_s^2}{1+\Delta M_s} \, 1\!\!1_{\{s<R\}} \text{ sur } E$$

$M'_t = 0$ sur E^c .

M' est un processus continu à droite et limité à gauche,$(\mathcal{F}_t)$-adapté;on note U le P-compensateur prévisible du processus $(\mathbb{1}_{t\geq R})_{t\in\mathbb{R}^+}$;et on pose N=M'+U.

1-3 : On peut noter les propriétés suivantes de U:

a) à un ensemble Π évanescent près,U peut être choisi de telle façon que pour chaque ω ,la trajectoire $\omega\to U(\omega)$ admette seulement des sauts d'amplitude bornée par1.

b) on a la relation : $E_Q[U_\infty]\leq 1$; en effet:

$$E_Q[U_\infty]=E_Q[\lim_{t\uparrow\infty}U_t]=\lim_{t\uparrow\infty} E_Q[U_t]=\lim_{t\uparrow\infty}E_{Q_t}[U_t]=\lim_{t\uparrow\infty}E_{P_t}[Z_tU_t]=\lim_{t\uparrow\infty}E_{P_t}\left[\int_0^t Z_s dU_s\right]$$

$$=\lim_{t\uparrow\infty}E_{P_t}\left[\int_0^t Z_{s-}dU_s\right]\leq\lim_{t\uparrow\infty}E_{P_t}\left[\int_0^t Z_{s-}d(\mathbb{1}_{\{s\geq R\}})\right]=\lim_{t\uparrow\infty}E_{P_t}\left[(Z_{R\wedge t})_-\right]\leq 1.$$

1-4 <u>Lemme</u> N est une Q-martingale locale.

<u>Démonstration</u>

Il suffit de montrer ([6],Théorème 7-23) que NZ est une (P,E) martingale locale; pour cela,soit $p\in\mathbb{N}$,on considère le processus arrêté $(NZ)^{R_p}$;comme sur $[\![0,R_p]\!]$ on a $Z_t=1+\int_0^t Z_{s-}dM_s$,en appliquant la formule de Ito aux produits:

$$(MZ)^{R_p} ,(\langle M^c,M^c\rangle Z)^{R_p} ,((\sum_s \frac{\Delta M_s^2}{1+\Delta M_s}\mathbb{1}_{\{s<R\}})Z)^{R_p} ,(UZ)^{R_p}$$

on obtient (notant que $[M,M]$ est le processus $\langle M^c,M^c\rangle+\sum_s\Delta M_s^2$)

$$(NZ)^{R_p} = -\int Z_{s-}dM_s^{R_p} -\int M_{s-}dZ_s^{R_p} -\int Z_{s-}d[M,M]_s^{R_p} +\int Z_{s-}d\langle M^c,M^c\rangle_s^{R_p} +\int\langle M^c,M^c\rangle_s^{R_p}dZ_s$$

$$+\int(\sum_{u<s}\frac{\Delta M_u^2}{1+\Delta M_u}\mathbb{1}_{u<R})^{R_p}dZ_s +\int Z_s d(\sum_{u\leq s}\frac{\Delta M_u^2}{1+\Delta M_u}\mathbb{1}_{\{u<R\}})^{R_p} +\int U_s^{R_p}dZ_s$$

$$+\int Z_{s-}dU_s^{R_p}$$

ce qui s'écrit:

$$(NZ)^{R_p} = L-\int Z_{s-}d(\sum_{u\leq s}\Delta M_u^2)^{R_p} +(\sum_s Z_s\frac{\Delta M_s^2}{1+\Delta M_s}\mathbb{1}_{\{s<R\}})^{R_p} +\int Z_{s-}dU_s^{R_p}$$

où L est la martingale locale (relativement à P):

$$L = -\int Z_{s-}dM_s^{R_p} -\int M_{s-}dZ_s^{R_p} +\int\langle M^c,M^c\rangle_s dZ_s^{R_p} +\int(\sum_{u<s}\frac{\Delta M_u^2}{1+\Delta M_u}\mathbb{1}_{u<R})^{R_p}dZ_s +\int U_s^{R_p}dZ_s.$$

Il reste donc:

$$(NZ)^{R_p} = L-(\sum_s Z_{s-}\Delta M_s^2)^{R_p} +(\sum_s Z_{s-}\Delta M_s^2\mathbb{1}_{\{s<R\}})^{R_p} + \int Z_{s-}dU_s^{R_p}$$

$$= L-\int Z_{s-}(d(\sum_{u\leq s}\Delta M_u^2\mathbb{1}_{\{u=R\}})-dU_s)^{R_p}$$

$$(\text{car } Z_{u-}(\Delta M_u^2)\mathbb{1}_{\{u=R\wedge R_p\}}=Z_{u-}\mathbb{1}_{\{u=R\wedge R_p\}}).$$

Le dernier terme du membre de droite de l'égalité est une P-martingale locale, donc $(NZ)^{R_p}$ est une P-martingale locale,et NZ une (P,E) martingale locale,ainsi N est une (Q,E) martingale locale,et donc une Q-martingale locale puisque $R=+\infty$ Q.p.s.

1-5 Remarque En reprenant la démonstration,appliquée au processus $M'^c=-M^c+\langle M^c,M^c\rangle$ (au lieu de N),il est facile de voir que M'^c est une Q-martingale locale continue qui est la partie "Q-martingale locale continue" de la Q-martingale locale N (et de la Q-semi martingale M');de plus $\langle M'^c,M'^c\rangle = \langle M^c,M^c\rangle$.

1-6 Remarque On vérifie immédiatement,d'après la définition adoptée pour $\langle M^c,M^c\rangle$ que ce processus est invariant par changement localement absolument continu de probabilité;enfin on a facilement la relation: $\langle N^c,N^c\rangle = \langle M^c,M^c\rangle$.

1-7 Remarque Comme $\{R<\infty\}$ est Q-négligeable,1/Z est défini Q.p.s. sur $[\![0,\infty[\![$ et d'après l'expression de M' et la remarque précédente on vérifie que $1/Z=\mathcal{E}(M')$ Q.p.s. Enfin 1/Z est une Q-surmartingale.

On définit maintenant comme pour M,les processus croissants B(N),B(M'),C(M');(remarquer que $\Delta M'>-1$).Compte tenu de la propriété 1-3 a) on a:

$$\text{pour tout } t\in\mathbb{R}^+ \quad \sum_{s\leq t}\Delta U_s^2 \leq \sum_{s\leq t}\Delta U_s \leq U_t \ ;$$

et il n'est pas difficile de vérifier que l'on peut trouver des constantes c_1 et c_2 telles que l'on ait:

$$(4) \qquad B(N)\leq c_1B(M')+c_2U \qquad \text{et} \qquad B(M')\leq c_1B(N)+c_2U.$$

Comme N est une Q-martingale locale,B(N) est Q-localement intégrable;comme U est Q-intégrable (d'après 1-3 b)) B(M') est aussi Q-localement intégrable;on peut donc définir les Q-compensateurs prévisibles $\tilde{B}^Q(N)$ et $\tilde{B}^Q(M')$.En adoptant les notations:

$$B^1(M) = \sum_s|\Delta M_s|\, 1_{\{\Delta M_s<-1/3 \text{ ou } \Delta M_s>1/2\}} \qquad \text{et} \qquad B^2(M) = B(M)-B^1(M)$$

puis définissant de la même façon $B^1(M')$ et $B^2(M')$,on obtient le résultat:

1-8 Lemme On a les relations:

$$(5) \qquad 1/6\ \tilde{B}^{2P}(M)\leq\tilde{B}^{2Q}(M')\leq 6\ \tilde{B}^{2P}(M) \qquad (Q.p.s.)$$

$$(6) \qquad \tilde{B}^{1P}(M) = \tilde{B}^{1Q}(M') + U \qquad (Q.p.s.)$$

$$(7) \qquad 1/6\ \tilde{B}^P(M)\leq\tilde{B}^Q(M') + U \leq 6\ \tilde{B}^P(M) \quad (Q.p.s.)$$

Démonstration

Considérons la fonction de variables réelles à valeurs dans $]-1,+\infty[$ et définie dans $]-1,+\infty[$ par $f(x) = -x/1+x$;on a $f=f^{-1}$ et $f([-1/3,1/2]) = [-1/3,1/2]$;enfin si $x\in[-1/3,1/2]$ on a $|f(x)|\leq 2|x|$ de sorte que:

$$\sum_s (\Delta M'_s)^2 1\!\!1_{\{-1/3\leq\Delta M'_s\leq 1/2\}} \leq 4\sum_s \Delta M_s^2 1\!\!1_{\{-1/3\leq\Delta M_s\leq 1/2\}}$$

on en déduit donc la double inégalité:

$$1/4\ B^2(M) \leq B^2(M') \leq 4\ B^2(M) \quad \text{Q.p.s;}$$

Montrons le coté gauche de l'inégalité (5);pour cela soit $p\in\mathbb{N}$,et soit Y un processus prévisible positif tel que :

pour tout $t<\infty$,on ait $E_Q\left[\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{2Q}(M')_s^{R_p}\right] < \infty$

On a à montrer que,pour tout t:

$$E_Q\left[\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{2Q}(M')_s^{R_p}\right] \geq 1/6\ E_Q\left[\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{2P}(M)_s^{R_p}\right] .$$

(On omet dans ce qui suit l'arrêt en R_p pour ne pas alourdir l'écriture.)

$$E_Q\left[\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{2Q}(M')_s\right] = E_Q\left[\int_0^t Y_s dB^2(M')_s\right] \geq 1/4\ E_Q\left[\int_0^t Y_s dB^2(M)_s\right] = 1/4\ E_P\left[Z_t\int_0^t Y_s dB^2(M)_s\right]$$

$$= 1/4\ E_P\left[\int_0^t Y_s Z_s dB^2(M)_s\right] = 1/4\ E_P\left[\int_0^t Y_s Z_{s-}(1+\Delta M_s) dB^2(M)_s\right] \geq 1/6\ E_P\left[\int_0^t Y_s Z_{s-} dB^2(M)_s\right]$$

(car $1+\Delta M \geq 2/3$ sur l'ensemble $\{s:\Delta M_s \geq -1/3\}$)

$$= 1/6\ E_P\left[\int_0^t Z_{s-} Y_s d\tilde{B}^{2P}(M)_s\right] = 1/6\ E_P\left[\int_0^t Z_s Y_s d\tilde{B}^{2P}(M)_s\right] = 1/6\ E_P\left[Z_t\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{2P}(M)_s\right]$$

$$= 1/6\ E_Q\left[\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{2P}(M)_s\right] .$$

Le coté droit de l'inégalité se montre de façon analogue.

Pour l'égalité (6) on procède par la même méthode;soit Y un processus prévisible positif tel que pour tout t on ait: $E_Q\left[\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{1Q}(M')_s^{R_p}\right] < \infty$

$$E_Q\left[\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{1Q}(M')_s^{R_p}\right] = E_Q\left[\int_0^t Y_s dB^1(M')_s^{R_p}\right] = E_P\left[Z_t\int_0^t Y_s dB^1(M')_s^{R_p}\right] = E_P\left[\int_0^t Z_s Y_s dB^1(M')_s^{R_p}\right]$$

$$= E_P\left[\Big(\sum_{\substack{s\leq t\\ \{\Delta M_s<-1/3 \text{ ou } \Delta M_s>1/2\}}} (Z_{s-}(1+\Delta M_s) Y_s \frac{|\Delta M_s|}{1+\Delta M_s} 1\!\!1_{\{s<R\}}\Big)^{R_p}\right] = E_P\left[\Big(\sum_{\substack{s\leq t\\ \{\Delta M_s<-1/3 \text{ ou } \Delta M_s>1/2\}}} Z_{s-} Y_s |\Delta M_s|\, 1\!\!1_{\{s<R\}}\Big)^{R_p}\right]$$

$$= E_P\left[\int_0^t Z_{s-} Y_s dB^1(M)_s^{R_p}\right] - E_P\left[\Big(\sum_{\substack{s\leq t\\ \{\Delta M_s<-1/3 \text{ ou } \Delta M_s>1/2\}}} Z_{s-} Y_s |\Delta M_s|\, 1\!\!1_{\{s\geq R\}}\Big)^{R_p}\right]$$

$$= E_P\left[\int_0^t Z_{s-} Y_s d\tilde{B}^{1P}(M)_s^{R_p}\right] - E_P\left[\int_0^t Z_{s-} Y_s d(1\!\!1_{\{s\geq R\}})^{R_p}\right]$$

(pour le dernier terme,on note que $(Z_{s-}|\Delta M_s|\, 1\!\!1_{\{s\geq R\}})^{R_p} = Z_{s-}|\Delta M_s|\, 1\!\!1_{\{s=R=R_p\}}$ $= Z_{s-} 1\!\!1_{\{Z_{s-}>0\}} 1\!\!1_{\{s=R=R_p\}} |\Delta M_s| = Z_{s-} 1\!\!1_{\{s=R=R_p\}}$,car sur l'ensemble $\{Z_{s-}>0\}\cap\{s=R=R_p\}$ on a $\Delta M_s=-1$).Reprenons la suite des égalités:

$$= E_P\left[Z_t\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{1P}(M)_s^{R_p}\right] - E_P\left[\int_0^t Z_{s-} Y_s dU_s^{R_p}\right] = E_Q\left[\int_0^t Y_s d\tilde{B}^{1P}(M)_s^{R_p}\right] - E_Q\left[\int_0^t Y_s dU_s^{R_p}\right]$$

d'où le résultat. Les inégalités (7) sont une conséquence directe de (5) et (6).

II) CONTIGUITE ET COMPLETE SEPARABILITE

Dans cette partie on considère une suite d'espaces mesurables $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$ pour $n\in\mathbb{N}$; pour chaque n $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$ est muni de deux probabilités P^n et Q^n, et d'une filtration $(\mathcal{F}^n_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ possédant les propriétés habituelles relativement à la probabilité $\Pi^n = 1/2(P^n+Q^n)$ qui domine P^n et Q^n. On suppose que pour chaque n, Q^n est localement absolument continue relativement à P^n; on définit alors comme dans la première partie le processus densité Z^n, le temps d'arrêt R^n, avec $R^n = \inf\{t:Z^n_t=0\}$, les temps d'arrêt $R^n_p = \inf\{t:Z^n_t\leq 1/p\}$, pour $p\in\mathbb{N}$ et l'ensemble $E^n = \bigcup_p [\![0,R^n_p]\!]$; on considère la (P^n,E^n)-martingale locale M^n, les processus croissants $B(M^n)$ et $C(M^n)$, puis la Q^n-martingale locale $N^n = M'^n+U^n$ où U^n est le P^n-compensateur prévisible du processus $(\mathbb{1}_{\{t\geq R^n\}})_{t\in\mathbb{R}^+}$ enfin les processus $B(N^n)$, $B(M'^n)$, $C(M'^n)$.

Etant donné une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, pour chaque n, x_n étant définie sur $(\Omega^n,\mathcal{F}^n,P^n)$; on dira que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (P^n)-asymptotiquement uniformément tendue (P^n-a.u.t.) si on a:

$$\lim_{K\uparrow\infty}(\limsup_n P^n(|x_n|>K)) = 0.$$

(ceci revient à dire que les points limite de la suite des lois de x_n sous P^n sont des probabilités sur $\mathbb{R}$.)

On commence par donner des résultats de contiguité ou de complète séparabilité en termes de comportement de la suite $(Z^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$; on remarque d'abord que la suite $(Z^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est (P^n)-uniformément tendue; en effet, soit $K>0$ on a:

$$P^n(Z^n_\infty>K)\leq 1/K\ E_{P^n}[Z^n_\infty] \leq 1/K$$

et donc $\quad \lim_{K\uparrow\infty}(\sup_n P^n(Z^n_\infty>K)) = 0.$

2-1 <u>Lemme</u> (Hall-Loynes [5])

On a l'équivalence entre les trois assertions suivantes:

(a) $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contigue relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $(Z^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est (Q^n)-a.u.t.

(c) $(Z^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est (P^n)-uniformément intégrable et $\lim_{n\uparrow\infty}Q^n(Z^n_\infty=\infty)= 0$.

<u>Démonstration</u>

1) (b) $\Longrightarrow$ (a)

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments respectifs de $(\mathcal{F}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n P^n(F_n)=0$.

Comme $(Z^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est (Q^n)-a.u.t.;étant donné $\varepsilon>0$,il existe K et n_0 tels que pour tout $n\geq n_0$ on ait:

$$Q^n(Z^n_\infty>K) \leq \varepsilon/2 .$$

Or $Q^n(F_n) = Q^n(F_n\cap\{Z^n_\infty\leq K\}) + Q^n(F_n\cap\{Z^n_\infty>K\}) \leq \int_{F_n\cap\{Z^n_\infty\leq K\}} Z^n_\infty \, dP^n + Q^n(Z^n_\infty>K)$

$$\leq K\, P^n(F_n) + \varepsilon/2 .$$

D'après l'hypothèse faite sur $(P^n(F_n))$ il existe $n_1\geq n_0$ tel que pour tout $n\geq n_1$ $P^n(F_n)\leq \varepsilon/2K$,de sorte que pour tout $n\geq n_1$ on a $Q^n(F_n)\leq\varepsilon$,d'où le résultat.

2) (a)$\Longrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(b) (démonstration de [5])

On a : $Q^n(Z^n_\infty>K) = \int_{\{Z^n_\infty>K\}} Z^n_\infty \, dP^n + Q^n(Z^n_\infty=\infty)$;ce qui donne (c)$\Longrightarrow$(b).
$P^n(Z^n_\infty=\infty) = 0$,et donc d'après la contiguité de (Q^n) par rapport à (P^n):

$$\lim_n Q^n(Z^n_\infty=\infty) = 0 .$$

Ainsi pour tout $\varepsilon>0$,il existe n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$ on ait:

$$Q^n(Z^n_\infty=\infty)\leq \varepsilon/2.$$

On aura maintenant $\int_{\{Z^n_\infty>K\}} Z^n_\infty \, dP^n \leq \varepsilon/2$ (uniformément en n) à partir d'un nombre K assez grand ,si on a la P^n-uniforme intégrabilité de $(Z^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$;or cette propriété découle de façon classique des deux propriétés suivantes:

(1) $\sup_n \int Z^n_\infty \, dP^n<\infty$ (ici on a $\sup_n\int Z^n_\infty \, dP^n\leq 1$)

(2) si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $P^n(F_n)\longrightarrow 0$,alors $\int_{F_n} Z^n_\infty \, dP^n\longrightarrow 0$;(on a bien cette propriété ici puisque $\int_{F_n} Z^n_\infty \, dP^n\leq Q^n(F_n)$ et que $Q^n(F_n)\longrightarrow 0$ d'après la contiguité de (Q^n) relativement à (P^n).

2-2 Lemme $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont complètement séparables si et seulement si on a la propriété suivante:

pour tout $K>0$, $\limsup_n Q^n(Z^n_\infty>K) = 1$.

Démonstration

Si pour chaque $K\in\mathbb{N}$,on a $\limsup_n Q^n(Z^n_\infty>K)=1$,on peut trouver une suite $(n_K)_{K\in\mathbb{N}}$ telle que $n_{K+1}>n_K$ et que:

$$Q^{n_K}(Z^{n_K}_\infty>K)\geq 1-1/K ;$$

on a ainsi $\lim_K Q^{n_K}(Z^{n_K}_\infty>K) = 1$,alors que $\lim_K P^{n_K}(Z^{n_K}_\infty>K) = 0$ d'après la propriété d'uniforme tension pour (P^n) de $(Z^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$,d'où la complète séparabilité.

Réciproquement soit $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ complètement séparables ,il existe une sous-suite $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments $F_{n_p}\in\mathcal{F}^{n_p}$ avec:

$$\lim_{p\uparrow\infty} P^{n_p}(F_{n_p}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p\uparrow\infty} Q^{n_p}(F_{n_p}) = 1.$$

On a ainsi: $Q^{n_p}(F_{n_p}) = \int_{F_{n_p}\cap\{Z^{n_p}_\infty\leq K\}} Z^{n_p} dP^{n_p} + Q^{n_p}(F_{n_p}\cap\{Z^{n_p}_\infty>K\})$

$$\leq K\, P^{n_p}(F_{n_p}) + Q^{n_p}(Z_\infty^{n_p}>K)$$

on déduit de l'hypothèse faite que $\lim_{p\uparrow\infty} Q^{n_p}(Z_\infty^{n_p}>K) = 1$ d'où le résultat.

2-3 Remarque Considérons le cas particulier $\Omega^n=\Omega, P^n = P, Q^n = Q, \mathcal{F}^n = \mathcal{F}$;d'après le (c) du lemme 2-1 et le lemme 1-1,il est immédiat que la contiguité de $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réduit à l'absolue continuité de Q par rapport à P.

La complète séparabilité de $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réduit elle à la singularité des probabilités P et Q:en effet soit $F_n=F=\{Z_\infty=\infty\}$ on a $P(Z_\infty=\infty)=0$ et la complète séparabilité implique que $Q(Z_\infty=\infty)=1$.

Dans tout ce qui suit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite d'éléments respectifs de $(\mathcal{F}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose qu'il existe $\alpha>0$ avec $:\alpha\leq\inf_n Q^n(F_n)$;enfin on notera $Q^n_{F_n}$ la probabilité conditionnelle $Q^n(.|F_n)$.

2-4 Lemme Soit pour chaque $n\in\mathbb{N}$ un processus V^n défini sur $(\Omega^n,\mathcal{F}^n,Q^n)$,croissant, continu à droite limité à gauche,adapté à $(\mathcal{F}^n_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$,localement intégrable et soit $\widetilde{V}^n$ son Q^n-compensateur prévisible .Alors,si la suite $(\widetilde{V}^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est $Q^n_{F_n}$-a.u.t.,on a la même propriété pour la suite $(V^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration

Pour tout temps d'arrêt S on a: $E_{Q^n}(V^n_S) = E_{Q^n}(\widetilde{V}^n_S)$;ainsi $\widetilde{V}^n$ est un processus croissant prévisible qui domine au sens de Lenglart(voir [11])le processus croissant V^n;par conséquent pour tout temps d'arrêt S,pour tout $\varepsilon>0$, $\eta>0$,on a l'inégalité de domination:

$$Q^n(V^n_S>\varepsilon)\leq \eta/\varepsilon + Q^n(\widetilde{V}^n_S>\eta).$$

Il est immédiat de voir que l'on a aussi (la démonstration en est identique):

$$Q^n(\{V^n_S>\varepsilon\}\cap F_n)\leq \eta/\varepsilon + Q^n(\{\widetilde{V}^n_S>\eta\}\cap F_n).$$

en prenant $S=\infty$,on a donc:

$$Q^n(\{V^n_\infty>\varepsilon\}\cap F_n)\leq \eta/\varepsilon + Q^n(\{\widetilde{V}^n_\infty>\eta\}\cap F_n)$$

et donc $Q^n_{F_n}(V^n_\infty>\varepsilon)\leq \eta/\varepsilon\alpha + Q^n_{F_n}(\widetilde{V}^n_\infty>\eta)$.En prenant $\varepsilon=K$, $\eta=\sqrt{K}$ on obtient:

$$\sup_n Q^n_{F_n}(V^n_\infty>K)\leq 1/\alpha\sqrt{K} + \sup_n Q^n_{F_n}(\widetilde{V}^n_\infty>\sqrt{K})$$

on en déduit le résultat cherché.

2-5 Lemme Soit pour chaque $n\in\mathbb{N}$ une Q^n-martingale locale X^n à valeurs réelles,définie sur $(\Omega^n,\mathcal{F}^n,(\mathcal{F}^n_t)_{t\in\mathbb{R}^+})$;soit $B(X^n)$ le processus croissant défini comme dans la formule (1) de la partie I),et $\widetilde{B}^{Q^n}(X^n)$ le Q^n-compensateur prévisible de $B(X^n)$; on note enfin $(X^n)^*$ le processus croissant défini par $(X^n)^*_t = \sup_{s\leq t}|X^n_s|$.

Alors,si la suite $(\widetilde{B}^{Q^n}(X^n)_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est $Q^n_{F_n}$-a.u.t.,on a la même propriété pour la suite $((X^n)^*_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration

Il existe une constante h telle que $[X^n,X^n]^{1/2} \leq h\, B(X^n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$;
D'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante k telle que pour tout temps d'arrêt S on ait $E_{Q^n}[(X^n)^*_S] \leq k\, E_{Q^n}\left[[X^n,X^n]^{1/2}_S\right]$,pour tout $n\in\mathbb{N}$; on a ainsi les inégalités:

$$E_{Q^n}[(X^n)^*_S] \leq E_{Q^n}[hkB(X^n)_S] = E_{Q^n}[hk\tilde{B}^{Q^n}(X^n)_S] ,$$

de sorte que $(X^n)^*$ est dominé au sens de Lenglart par $hk\tilde{B}^{Q^n}(X^n)$; en procédant comme dans la démonstration du précédent lemme 2-4 on obtient le résultat voulu.

On aborde maintenant le résultat principal de ce travail; commençons par une remarque.

2-6 Remarque a) La suite $(U^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est $Q^n_{F_n}$-uniformément tendue, puisque d'après 1-3 b) on a: pour tout $c>0$ $Q^n_{F_n}(U^n_\infty > c) \leq 1/c\alpha^n$.

b) De a) ,du lemme 1-8 et des inégalités (3), on déduit que les propriétés suivantes sont équivalentes:

" $(\tilde{B}^{P^n}_\infty(M^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $(Q^n_{F_n})$-a.u.t."

" $(\tilde{B}^{Q^n}_\infty(M'^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $(Q^n_{F_n})$-a.u.t."

" $(\tilde{C}^{P^n}_\infty(M^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $(Q^n_{F_n})$-a.u.t."

Il en est de même des propriétés:

"pour tout $K>0$, $\limsup_n Q^n_{F_n}(\tilde{B}^{P^n}_\infty(M^n)>K) = 1$"

"pour tout $K>0$, $\limsup_n Q^n_{F_n}(\tilde{B}^{Q^n}_\infty(M'^n)>K) = 1$"

"pour tout $K>0$, $\limsup_n Q^n_{F_n}(\tilde{C}^{P^n}_\infty(M^n)>K) = 1$".

2-7 Théorème

(a) Si pour tout $K>0$ $\limsup_n Q^n_{F_n}(\tilde{B}^{P^n}_\infty(M^n)>K) = 1$,alors pour tout $K>0$ on a:

$$\limsup_n Q^n_{F_n}(Z^n_\infty > K) = 1.$$

(b) Si la suite $(\tilde{B}^{P^n}_\infty(M^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $(Q^n_{F_n})$-a.u.t. et si :

$$\lim_{K\uparrow\infty}(\limsup_n Q^n_{F_n}(\sup_s|\Delta M^n_s|>K)) = 0$$

alors $(Z^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(Q^n_{F_n})$-a.u.t.

Compte tenu des lemmes 2-1 et 2-2 et de la remarque 2-6 le corollaire suivant est immédiat.

2-8 Corollaire

(a) Si pour tout $K>0$, $\limsup_n Q^n(\tilde{C}_\infty^{P^n}(M^n)>K) = 1$, alors les suites $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont complètement séparables.

(b) Si les suites $(\tilde{C}_\infty^{P^n}(M^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sup_s |\Delta M_s^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sont (Q^n)-a.u.t., alors la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contigue relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration du point (a) du Théorème

Pour chaque n, notons $Z'^n = (1/Z^n)^{1/2} = (\mathcal{E}(M'^n))^{1/2}$ qui est défini sur $[\![0,\infty[\![$ à un ensemble Q^n-évanescent près. En procédant comme dans la proposition II-3 de [12] on obtient la Q^n-décomposition multiplicative de Z'^n en:

$$Z'^n = L^n D^n$$

où D^n est un processus décroissant prévisible (positif ou nul) tel que:

$$D^n = \mathcal{E}(A^n) \quad \text{avec} \quad A^n = -1/8 < M^{n,c}, M^{n,c}> + \overline{\sum_s ((1+\Delta M'^n_s)^{1/2} - 1 - 1/2\, \Delta M'^n_s)}^{Q^n}$$

et L^n est une Q^n-surmartingale positive avec $L_0^n = 1$.

D'après les inégalités (3) de la première partie, il existe une constante $\gamma>0$ telle que $\tilde{B}_\infty^{Q^n}(M'^n) \leq \gamma(-A_\infty^n)$ de sorte que:

$$\{\tilde{B}_\infty^{Q^n}(M'^n)>K\} \subset \{\gamma A_\infty^n < -K\} \quad ;$$

et $\limsup_n Q^n_{F_n}(\tilde{B}_\infty^{Q^n}(M'^n)>K) = 1$ implique que $\limsup_n Q^n_{F_n}(A_\infty^n < -K/\gamma)$ existe et égale 1; comme $\mathcal{E}(A^n)_t \leq \exp(A_t^n)$ on en déduit aussi que $\limsup_n Q^n_{F_n}(\mathcal{E}(A^n)_\infty < \exp(-K/\gamma))=1$.

Ainsi l'hypothèse faite entraine que pour tout $\varepsilon>0$, $\limsup_n Q^n_{F_n}(D_\infty^n < \varepsilon)$ existe et égale 1.

Maintenant

$$\begin{aligned} Q^n_{F_n}(Z'^n_\infty \geq \varepsilon) = Q^n_{F_n}(L_\infty^n D_\infty^n \geq \varepsilon) &\leq Q^n_{F_n}(L_\infty^n D_\infty^n \geq \varepsilon, D_\infty^n \geq \varepsilon^2/2) \\ &\quad + Q^n_{F_n}(L_\infty^n D_\infty^n \geq \varepsilon, D_\infty^n < \varepsilon^2/2) \\ &\leq Q^n_{F_n}(D_\infty^n \geq \varepsilon^2/2) + Q^n_{F_n}(L_\infty^n > 2/\varepsilon). \end{aligned}$$

or $Q^n(L_\infty^n > 2/\varepsilon) \leq \varepsilon/2\, E_{Q^n}[L_0^n] = \varepsilon/2$; et donc $Q^n_{F_n}(Z'^n_\infty \geq \varepsilon) \leq Q^n_{F_n}(D_\infty^n \geq \varepsilon^2/2) + \varepsilon/2\alpha$;

ainsi $\liminf_n Q^n_{F_n}(Z'^n \geq \varepsilon) = 0$, **d'où le résultat.**

Démonstration du point (b)

On considère $\mathcal{E}(M'^n) = 1/Z^n$; nous avons à montrer que:

$$\lim_{\eta \downarrow 0}(\limsup_n Q^n_{F_n}(\mathcal{E}(M'^n)_\infty \geq \eta)) = 1.$$

D'après la seconde hypothèse, étant donné $\varepsilon>0$, il existe K et n_0 tels que:

$$\sup_{n\geq n_0} Q^n_{F_n}(\sup_s \Delta M^n_s > K) < \varepsilon.$$

ainsi $\sup_{n\geq n_0} Q^n_{F_n}(\inf_s \Delta M'^n_s < \frac{-K}{1+K}) < \varepsilon$. Considérons dorénavant $n\geq n_0$.

On pose $G^n = \exp(M'^n - 1/2 < M^{nc}, M^{nc}> - \sum_s \Delta M'^n_s \mathbb{1}_{\{\Delta M'^n_s > 1/2\}}) \prod_s (1+\Delta M'^n_s \mathbb{1}_{\{\Delta M'^n_s > 1/2\}})$

et $H^n = \prod_{\{s: \frac{-K}{1+K} \leq \Delta M'^n_s \leq 1/2\}} (1+\Delta M'^n_s)\exp(-\Delta M'^n_s)$

comme $\{s: \Delta M'^n_s < \frac{-K}{1+K}\}$ est fini et que pour tout s $\Delta M'^n_s > -1$, sur $\{s: \Delta M'^n_s < \frac{-K}{1+K}\}$ le produit $\prod_s (1+\Delta M'^n_s)\exp(-\Delta M'^n_s) > 0$ de sorte que la limite $(G^n H^n)_\infty$ existe et d'après le choix de K, on a:

$$\sup_n Q^n_{F_n}(\mathcal{E}(M'^n)_\infty \neq (G^n H^n)_\infty) \leq \sup_n Q^n_{F_n}(\inf_s \Delta M'^n_s < \frac{-K}{1+K}) \leq \varepsilon.$$

On va maintenant étudier le comportement limite de G^n et de H^n.
Commençons par H^n; d'après l'hypothèse et la remarque 2-6 b) $(\tilde{B}^{Q^n}_\infty(M'^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $(Q^n_{F_n})$-a.u.t.; on déduit donc du lemme 2-4 que $(B_\infty(M'^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est également $(Q^n_{F_n})$-a.u.t.

$$\text{or } H^n = \exp\Big(\sum_{\{s: \frac{-K}{1+K} \leq \Delta M'^n_s \leq 1/2\}} (\mathrm{Log}(1+\Delta M'^n_s) - \Delta M'^n_s)\Big)$$

$$\geq \exp\Big(-k/2 \sum_{\{s: \frac{-K}{1+K} \leq \Delta M'^n_s \leq 1/2\}} (\Delta M'^n_s)^2\Big)$$ pour un k adéquat; de sorte que l'on a:

$$H^n_\infty \geq \exp(-k/2\, B_\infty(M'^n)).$$

Ainsi comme d'après ce qui précède il existe K' et $n_1 \geq n_0$ tels que:

$$\sup_{n\geq n_1} Q^n_{F_n}(B_\infty(M'^n) \leq 2K'/k) > 1-\varepsilon$$

on obtient $\sup_{n\geq n_1} Q^n_{F_n}(H^n_\infty \geq \exp(-K')) > 1-\varepsilon$.

Occupons nous maintenant de G^n; on commence par remarquer que l'on a:

$$G^n \geq \exp(M'^n - 1/2 < M^{nc}, M^{nc}> - \sum_s \Delta M'^n_s \mathbb{1}_{\{\Delta M'^n_s > 1/2\}})$$

$$\geq \exp(N^n - U^n - B^n(M'^n)) \geq \exp(-(N^n)^* - U^n - B^n(M'^n)).$$

Comme $(\tilde{B}^{Q^n}_\infty(M'^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites $(Q^n_{F_n})$-a.u.t. (remarque 2-6), on déduit de la première inégalité (4) de la partie I) que $(\tilde{B}^{Q^n}_\infty(N^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi $(Q^n_{F_n})$-a.u.t.; d'après le lemme 2-5 $((N^n)^*_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc $(Q^n_{F_n})$-a.u.t..
Ainsi $((N^n)^*_\infty + U^n_\infty + B^n_\infty(M'^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $(Q^n_{F_n})$-a.u.t., et il existe K" et n_2 tels que:

$$\sup_{n\geq n_2} Q^n_{F_n}(\exp(-(N^n)^*_\infty - U^n_\infty - B^n_\infty(M'^n)) > \exp(-K")) \geq 1-\varepsilon \;;$$

de sorte que $\sup_{n\geq n_2} Q^n_{F_n}(\liminf_t G^n_t > \exp(-K'')) \geq 1-\varepsilon$.

En résumé,pour tout $\varepsilon>0$,il existe K' et K" et n_2 avec

$$\sup_{n\geq n_2} Q^n_{F_n}(\mathcal{E}(M'^n)_\infty > \exp(-(K'+K''))) \geq 1 - 3\varepsilon,\text{d'où le résultat.}$$

On considère maintenant $(\Omega^n,\mathcal{F}^n) = (\Omega,\mathcal{F}),\mathcal{F}^n_t = \mathcal{F}_t$ et la situation de la partie I) avec les probabilités P et Q.Compte tenu du lemme 1-1,le théorème 1-2 (de Kabanov,Liptser et Shiryayev) découle immédiatement du résultat suivant:

2-9 Corollaire

On a l'égalité $\{\tilde{B}^P_\infty(M) = \infty\} \overset{Q\text{-p.s}}{=} \{Z_\infty = \infty\}$.

Démonstration

Soit $\alpha = Q(\tilde{B}^P_\infty(M) = \infty)$,on commence par supposer $\alpha \neq 0$ et on note $F=\{\tilde{B}^P_\infty(M) = \infty\}$; l'hypothèse de la partie (a) du théorème 2-7 est satisfaite pour la probabilité conditionnelle Q_F de sorte que pour tout K on a $Q_F(Z_\infty > K) = 1$,et ceci implique que:

$$\{\tilde{B}^P_\infty(M) = \infty\} \subset \{Z_\infty = \infty\} \ ,\ Q.p.s.$$

Pour $\alpha = 1$,la démonstration est terminée ,on a l'égalité désirée; pour $\alpha \neq 1$ on note $F'=\{\tilde{B}^P_\infty(M)<\infty\}$,alors $Q(F') = 1-\alpha>0$;ainsi les hypothèses de la partie (b) du théorème sont satisfaites et $\lim_K Q_{F'}(Z_\infty \leq K)=1$ ce qui implique $Z_\infty<\infty$ sur F' et F' est inclus dans $\{Z_\infty<\infty\}$ Q.p.s.,d'où F contient $\{Z_\infty=\infty\}$ Q.p.s.,et on a le résultat désiré.Si $\alpha=0$,le raisonnement précédent s'applique à $F'=\{\tilde{B}^P_\infty(M)<\infty\}$ et on a l'inclusion $\{\tilde{B}^P_\infty(M)<\infty\} \subset \{Z_\infty < \infty\}$,d'où l'égalité puisque $Q(\tilde{B}^P_\infty(M) < \infty)=1$.

Revenons au cadre général décrit;dans la partie (b) du corollaire 2-8,les conditions introduites ne sont pas homogènes,puisque la première porte sur des termes prévisibles,alors que la seconde porte sur les processus $(\sup_s |\Delta M^n_s|)$ qui ne sont pas prévisibles;en fait on peut aussi décrire cette dernière condition en termes prévisibles ;ceci fait l'objet du lemme suivant.

2-10 Lemme Pour tout $n\in\mathbb{N}$,pour tout K positif,notons $G^n(K)$ le processus défini sur E^n par $G^n_t(K) = \sum_{s\leq t} \mathbb{1}_{\{|\Delta M^n_s|>K\}}$ et $\tilde{G}^{Q^n}(K)$ son Q^n-compensateur prévisible (qui est défini car $G^n(K)$ est localement intégrable);alors,on a l'équivalence entre les deux assertions:

(1) La suite $(\sup_s |\Delta M^n_s|)_{n\in\mathbb{N}}$ est (Q^n)-a.u.t.

(2) Pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{K\uparrow\infty}(\limsup_n Q^n(\tilde{G}^{Q^n}_\infty(K)\geq \varepsilon)) = 0$.

Démonstration

C'est une conséquence directe de la double inégalité suivante que l'on peut trouver dans ([7],lemme 3-12 ,dans le cas où $t\in\mathbb{R}^+$),et que nous redémontrons:

Pour tout $\varepsilon>0$,pour tout $t\in\overline{\mathbb{R}}^+$ on a:

$$Q^n(\sup_{s\leq t}|\Delta M^n_s|>K)\leq \varepsilon + Q^n(\tilde{G}^{Q^n}_t(K)\geq\varepsilon)$$

$$Q^n(\tilde{G}^{Q^n}_t(K)\geq\varepsilon)\leq (1+2/\varepsilon)Q^n(\sup_{s\leq t}|\Delta M^n_s|>K).$$

Pour montrer cela,on commence par remarquer que l'on a:

$$Q^n(\sup_{s\leq t}|\Delta M^n_s|>K) = Q^n(G^n_t(K)\geq 1);$$

pour tout $\varepsilon>0$,on a donc d'après l'inégalité de domination de Lenglart:

$$Q^n(G^n_t(K)\geq 1)\leq \varepsilon + Q^n(\tilde{G}^{Q^n}_t(K)\geq\varepsilon).$$

Soit alors $\tau^n_K=\inf\{t:G^n_t(K)\geq 1\}$,on a :

$$Q^n(\tilde{G}^{Q^n}_{t\wedge\tau^n_K}(K)\geq\varepsilon)\leq 1/\varepsilon\ E_{Q^n}\left[G^n_{t\wedge\tau^n_K}(K)\right]$$

mais $E_{Q^n}\left[G^n_{t\wedge\tau^n_K}(K)\right]\leq Q^n(\tau^n_K\leq t) = Q^n(G_t(K)\geq 1)$ si $t<\infty$;

et $E_{Q^n}\left[G^n_{\tau^n_K}(K)\right]\leq Q^n(\tau^n_K<\infty) = Q^n(G_\infty(K)\geq 1)$.

enfin $Q^n(\tilde{G}^{Q^n}_t(K)\geq\varepsilon)\leq Q^n(\tilde{G}^{Q^n}_t(K) - \tilde{G}^{Q^n}_{t\wedge\tau^n_K}(K)\geq\varepsilon/2) + Q^n(\tilde{G}^{Q^n}_{t\wedge\tau^n_K}(K)\geq\varepsilon/2)$

et $Q^n(\tilde{G}^{Q^n}_t(K) - \tilde{G}^{Q^n}_{t\wedge\tau^n_K}(K)\geq\varepsilon/2)\leq Q^n(\tau^n_K<t)\leq Q^n(G_t(K)\geq 1)$.

2-11 Remarque De façon analogue à ce qui a été fait au lemme 1-8,on peut exprimer $\tilde{G}^{Q^n}(K)$ en termes de P^n-compensateur prévisible d'un certain processus croissant P^n-localement intégrable sur E^n;pour cela,soit $p\in\mathbb{N}$,soit Y un processus prévisible positif tel que pour tout $t<\infty$ on ait:

$$E_{Q^n}\left[\int_0^{t\wedge R^n_p} Y_s d(\tilde{G}^{Q^n}_s(K))\right]<\infty .$$

on a la suite des égalités

$$E_{Q^n}\left[\int_0^{t\wedge R^n_p} Y_s d(\tilde{G}^{Q^n}_s(K))\right] = E_{Q^n}\left[\int_0^{t\wedge R^n_p} Y_s dG^n_s(K)\right] = E_{P^n}\left[\int_0^t Z^n_s Y_s d(G^n_s(K))^{R^n_p}\right]$$

$$= E_{P^n}\left[\left(\sum_{s\leq t} Z^n_s Y_s 1\!\!1_{\{|\Delta M^n_s|>K\}}\right)^{R^n_p}\right] = E_{P^n}\left[\left(\sum_{s\leq t} Z^n_{s-} Y_s (1+\Delta M^n_s) 1\!\!1_{\{|\Delta M^n_s|>K\}}\right)^{R^n_p}\right]$$

$$= E_{P^n}\left[\int_0^t Z^n_{s-} Y_s\, d\left(\overbrace{\sum_{u\leq s}(1+\Delta M^n_u)1\!\!1_{\{|\Delta M^n_u|>K\}}}^{P^n}\right)^{R^n_p}\right]$$

$$= E_{Q^n}\int_0^t Y_s d\left(\overbrace{\sum_{u\leq s}(1+\Delta M^n_u)1\!\!1_{\{|\Delta M^n_u|>K\}}}^{P^n}\right)^{R^n_p}$$

on a ainsi l'égalité:

(8) $$\widetilde{G}^{Q^n}(K) = \left(\sum_s (1+\Delta M_s^n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M_s^n| > K\}}\right)^{P^n} \qquad Q^n\text{-p.s.}$$

Compte tenu de cette remarque on peut exprimer le corollaire 2-8 (b) sous la forme plus cohérente suivante (en termes de comportements asymptotiques de variables terminales de processus prévisibles).

2-12 Corollaire

$(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contigue relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ si les deux conditions suivantes sont remplies:

(i) $(\widetilde{C}_\infty^{P^n}(M^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est (Q^n)-a.u.t.

(ii) Pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{K\uparrow\infty} (\limsup_n Q^n((\sum_s (1+\Delta M_s^n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M_s^n| > K\}})^{P^n} \geq \varepsilon)) = 0$

III) APPLICATION AU CAS DES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

Soit $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, X^n un processus continu à droite limité à gauche sur $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$, à valeurs réelles; $(\mathcal{F}_t^n)_{t\in\mathbb{R}^+}$ désigne la plus petite filtration rendant X^n adapté et on suppose que $\mathcal{F}^n = \bigvee_t \mathcal{F}_t^n$;soit P^n et Q^n deux probabilités définies sur $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$ faisant de X^n une semi martingale et un processus à accroissements indépendants (p.a.i.) ;on note b^n,c^n,F^n (resp:b'^n,c'^n,F'^n) les caractéristiques de X^n comme P^n-p.a.i. (resp:Q^n-p.a.i.).On rappelle que $b^n,c^n,F^n,b'^n,c'^n,F'^n$ sont non aléatoires et plus précisément:

b^n (resp:b'^n) $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue à droite,à variation finie sur tout compact,nulle en 0; (c'est la dérive du p.a.i.)

c^n (resp:c'^n) $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue,croissante,nulle en 0; (c'est la fonction associée à la partie diffusion du p.a.i.)

F^n (resp:F'^n) est une mesure positive sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ ne chargeant pas $\mathbb{R}^+\times\{0\}$ ni $\{0\}\times\mathbb{R}$, telle que pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ $F^n(\{t\}\times\mathbb{R}) \leq 1$ (resp:$F'^n(\{t\}\times\mathbb{R}) \leq 1$) avec:

$$\int_{\mathbb{R}} F^n([0,t],dx)\, 1\wedge x^2 < \infty \ , \ (\text{resp:} \int_{\mathbb{R}} F'^n([0,t],dx)\, 1\wedge x^2 < \infty)$$

$$\sum_{s\leq t} \left|\int_{\mathbb{R}} F^n(\{s\},dx)\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right| < \infty \quad (\text{resp: } \sum_{s\leq t} \left|\int_{\mathbb{R}} F'^n(\{s\},dx)\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right| < \infty)$$

enfin pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ on a:

$$\Delta b^n(t) = \int_{\mathbb{R}} F^n(\{t\},dx)\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}$$

$$\Delta b'^n(t) = \int_{\mathbb{R}} F'^n(\{t\},dx)\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} \ .$$

3-1 Théorème ([6] théorème 13-4, [8] théorème 15)

Supposons que $Q^n_{|\mathcal{F}^n_0}$ $P^n_{|\mathcal{F}^n_0}$;

Q^n est localement absolument continue par rapport à P^n si et seulement si on a les propriétés suivantes:

(a) $c'^n = c^n$

(b) pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $(F^n(\{t\}\times\mathbb{R})=1) \Longrightarrow (F'^n(\{t\}\times\mathbb{R})=1)$

(c) pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ $F'^n(dt,dx)=f^n(t,x)F^n(dt,dx)$ où f^n est une fonction borèlienne sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ vérifiant:

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} |x| \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} \mathbb{1}_{\{s\leq t\}} |f^n(s,x)-1| F^n(ds,dx) < \infty \text{ pour tout } t<\infty .$$

(d) il existe une fonction borèlienne sur R β^n vérifiant pour tout $t<\infty$:

$$\int_0^t \beta^n(s)dc^n(s) < \infty \qquad \text{et telle que :}$$

$$b'^n_t = b^n_t + \int_0^t \beta^n(s)dc^n(s) + \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} x \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} \mathbb{1}_{\{s\leq t\}} (f^n(s,x)-1)F^n(ds,dx).$$

(e) la fonction non aléatoire $\tilde{C}^n$ définie par:

$$\tilde{C}^n_t = \int_0^t (\beta^n(s))^2 dc^n_s + 1/2 \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{s\leq t\}} (1-\sqrt{f^n(s,x)})^2 F^n(ds,dx)$$
$$+ 1/2 \sum_{s\leq t}' (\sqrt{1-F^n(\{s\}\times\mathbb{R})} - \sqrt{1-F'^n(\{s\}\times\mathbb{R})})^2$$

est finie pour tout $t<\infty$.

Ici $\tilde{C}^n$ représente le processus $\tilde{C}^{P^n}(M^n)$, P^n-compensateur prévisible de $C(M^n)$ défini par la formule (2) de la partie I). M^n est alors la (P^n,F^n)-martingale locale de partie continue $\int \beta^n(s)dX^{nc}_s$ et dont les sauts sont tels que:

$$\Delta M^n_s = (f^n(s,\Delta X^n_s)-1- \frac{F'^n(\{s\}\times\mathbb{R})-1}{F^n(\{s\}\times\mathbb{R})-1} \mathbb{1}_{\{\Delta X^n_s\neq 0\}} - \int_{\mathbb{R}} (f^n(s,x)-1- \frac{F'^n(\{s\}\times\mathbb{R})-1}{F^n(\{s\}\times\mathbb{R})-1}) F^n(\{s\},dx)$$

Dans ce cadre on peut montrer le résultat suivant:

3-2 Théorème

(1) Si $\limsup_n \tilde{C}^n_\infty = \infty$ alors $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont complètement séparables.

(2) Pour que $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit contigue relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ il faut et il suffit que $\limsup_n \tilde{C}^n_\infty < \infty$ et que $(\sup_s |\Delta M^n_s|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit (Q^n)-a.u.t.

Démonstration

Compte tenu de ce qui précède et du corollaire 2-8 on a seulement à montrer la partie nécessaire du (2). Supposons donc que $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit contigue relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\limsup_n \tilde{C}^n_\infty < \infty$; sinon $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ seraient complètement séparables; montrons qu'alors on a:

$$\lim_{K\uparrow\infty}(\limsup_n Q^n(\sup_s|\Delta M_s^n| > K)) = 0 .$$

Si on n'a pas cette propriété, il existe $\varepsilon>0$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$ un nombre n_k avec $n_k > n_{k-1}$ tels que l'on ait:

$$Q^{n_k}(\sup_s|\Delta M_s^{n_k}|>k) \geq \varepsilon \ ;$$

mais $P^{n_k}(\sup_s|\Delta M_s^{n_k}|>k) \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$; en effet:

$$P^{n_k}(\sup_s|\Delta M_s^{n_k}|>k) \leq P^{n_k}(\sum_s|\Delta M_s^{n_k}|\mathbb{1}_{\{|\Delta M_s^{n_k}| > k\}} > k) \leq P^{n_k}(B_\infty(M^{n_k}) > k) \quad \text{pour } k > 1/3 \ ;$$

ensuite d'après la remarque 2-6 et le lemme 2-4 $(B_\infty^{n_k}(M^{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ est (P^{n_k})-a.u.t.(car $(\tilde{C}_\infty^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant déterministe est (P^n) et (Q^n)-a.u.t.); l'hypothèse de contiguité implique donc que:

$$Q^{n_k}(\sup_s|\Delta M_s^{n_k}| > k) \longrightarrow 0$$

d'où la contradiction.

Dans le cas particulier où les processus X^n sont P^n-quasi continus à gauche, en utilisant le corollaire 2-12 on peut obtenir une caractérisation simple de la contiguité.

3-3 Corollaire

On suppose que pour tout n, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, on a $F^n(\{t\}\times\mathbb{R}) = 0$; (c'est à dire: X^n est pour P^n un p.a.i. quasi continu à gauche). Alors, $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contigue relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si on a:

il existe un entier n_0 avec les deux propriétés suivantes

1) $\left(c_\infty^n + \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty (\sqrt{f^n(s,x)}-1)^2F^n(ds,dx)\right)_{n\geq n_0}$ est bornée

2) la suite $(f^n)_{n\geq n_0}$ est F^n-uniformément intégrable.

Démonstration

Compte tenu de l'hypothèse on a $\Delta M_s^n = (f^n(s,\Delta X_s^n)-1)\mathbb{1}_{\{\Delta X_s^n\neq 0\}}$; de sorte que le processus $\tilde{G}^{Q^n}(K)$ défini au lemme 2-10 est d'après la remarque 2-11:

$$\tilde{G}_t^{Q^n}(K) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} f^n(s,x)\mathbb{1}_{\{|f^n(s,x)-1| > K\}}F^n(ds,dx);$$

d'autre part on a $\tilde{C}_t^n = \int_0^t\int_{\mathbb{R}}(\sqrt{f^n(s,x)}-1)^2F^n(ds,dx) + c_t^n$.

Or la condition (i) du corollaire 2-12 signifie qu'à partir d'un certain rang n_0, il existe une constante Γ telle que pour tout $n\geq n_0$ on ait:

$$c_\infty^n + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}(\sqrt{f^n(s,x)}-1)^2F^n(ds,dx) \leq \Gamma \quad \text{(ce qui est 1)).}$$

La condition (ii) du même corollaire s'écrit:

$$\lim_{K\uparrow\infty}(\limsup_n(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} f^n(s,x)\mathbb{1}_{\{f^n(s,x) > K\}}F^n(ds,dx))) = 0$$

ce qui est 2).On obtient ainsi la contiguité de $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativement à $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la réciproque étant du fait du lemme 2-10 identique à celle figurant dans la démonstration du théorème 3-2.

REFERENCES

[1] C.Dellacherie P.A.Meyer: Probabilités et Potentiels
Herman-Paris (1979) 2^e édition.

[2] G.K.Eagleson R.F.Gundy : On a theorem of Kabanov,Liptser,Shiryayev;(1981)
à paraitre.

[3] J.Hàjek Z.Šidàk: Theory of Rank Tests
Academic Press-New-York (1967) .

[4] P.Hall C.C.Heyde: Martingale limit theory and its application.
Academic Press -New-York (1980).

[5] W.J.Hall R.M.Loynes: On the concept of contiguity ;
Annals of Probability (1977) Vol 5,n° 2 278-282.

[6] J.Jacod: Calcul stochastique et problèmes de martingales;
Lect.Notes in Maths. n°714 (1979) Springer-Verlag,Berlin.

[7] J.Jacod J.Mémin: Sur la convergence des semi martingales vers un processus à accroissements indépendants;
Lect.Notes in Maths.n°784,Sem.de Prob.XIV (1980),Springer-Verlag ,Berlin.

[8] Y.Kabanov R.S.Liptser A.N.Shiryayev: Absolue continuité et singularité de lois localement absolument continues;
I: Mat.Sbornik (1978) T 107 n°3
II: Mat.Sbornik (1979) T 108 n°1.

[9] L.Le Cam: Local asymptotically normal families of distributions;
Univ.Calif.Publ.Statist.3 (1960) 37-98.

[10] L.Le Cam: On the asymptotic normality of estimates;Proceedings of the symposium to Honour Jersey Neyman (Varsaw 1974);
Panstw.Wydawn.Nauk Warsawa (1977) 203-217.

[11] E.Lenglart: Relation de domination entre deux processus ;
Annales de l'institut Henri Poincaré,sec.B Prob. 13 (1977) 171-179.

[12] D.Lepingle J.Mémin: Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles; Zeitschrift f.W. 42 (1978) 175-208.