SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHANTHA YOEURP

Une décomposition multiplicative de la valeur absolue d'un mouvement brownien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 234-237

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__234_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNE DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE DE LA VALEUR ABSOLUE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN

Ch. YOEURP (*)

Nous considérons ici un espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles, sur lequel est défini un mouvement brownien $W = (W_t)$ issu de 0.

Il n'est pas possible de représenter la sous-martingale positive $W = (|W_t|)$ comme produit d'une martingale locale positive et d'un processus croissant, mais cette représentation est possible pour une sous-martingale positive $X = (X_t)$ telle que X_t et X_{t-} ne s'annulent jamais [3]. Nous avons remarqué qu'une telle représentation est également obtenue en appliquant la formule d'Itô à $\text{Log } X_t$ et en regroupant convenablement les termes, puis en écrivant que $X_t = \exp(\text{Log } X_t)$. Cette remarque suggère, pour remplacer la décomposition multiplicative d'Itô de $|W|$, de chercher des processus prévisibles $\Phi = (\Phi_t)$ tels que les intégrales stochastiques $\int_0^t \Phi_s \, d(\text{Log}(|W_s| \vee \varepsilon))$ convergent, lorsque ε décroît vers 0.

Ce procédé, que l'on pourrait étendre à d'autres fonctions que la fonction logarithme, fait intervenir la valeur principale de Cauchy de certaines intégrales des temps locaux $(L_t^a)_{a \in \mathbb{R}}$ de W.

Avec l'aide et les notations du chapitre VI de [2], nous commençons par écrire une formule d'Itô généralisée. Rappelons tout d'abord que si $Z = (Z_t)$ est une semi-martingale réelle, il existe un processus $(a,t,\omega) \to (L_t^a(\omega))$, appelé processus des temps locaux de Z, défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$, qui est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \times \mathcal{F}$ mesurable, et qui vérifie les propriétés suivantes :

(ℓ-1) pour tout $a \in \mathbb{R}$, le processus $(t,\omega) \to L_t^a(\omega)$ est adapté croissant, continu, et la mesure aléatoire $dL_s^a(\omega)$ sur $\mathbb{R}_+$ est portée par l'ensemble $\{s \,/\, Z_s(\omega) = a\}$,

---

(*) Université Paris VI - Laboratoire de Probabilités - 4 place Jussieu - Tour 56 3ème Etage - 75005 PARIS CEDEX

(ℓ-2) pour toute fonction f borélienne, bornée sur $\mathbf{R}$, on a :

$$\int_0^t f(Z_s)d\langle Z^c, Z^c\rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)L_t^a da \qquad \text{P-p.s.}$$

1. Proposition : (cf. la formule 2.6 de [2])

Soit f une fonction réelle, dont la dérivée seconde, au sens des distributions, est une mesure μ. Si f'_g désigne la dérivée à gauche de f en tout point de $\mathbf{R}$ (cette dérivée existe), on a :

$$(1)\quad f(Z_t) = f(Z_o) + \int_0^t f'_g(Z_{s-})dZ_s + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(da)L_t^a + \sum_{0<s\leq t}(f(Z_s)-f(Z_{s-})-f'_g(Z_{s-})\Delta Z_s)$$

Voici un cas particulier du résultat précédent :

2. Corollaire :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, fonction continue partout et de classe C^2 sauf en nombre fini de points $(x_i)_{i\in I}$, où les dérivées f' et f'' ont des discontinuités de première espèce. On note f'_i le saut de f' en x_i : $f'_i = f'(x_i + 0) - f'(x_i - 0)$. On a alors :

$$(2)\quad f(Z_t) = f(Z_o) + \int_0^t f'_g(Z_{s-})dZ_s + \frac{1}{2}\left[\int_0^t f''(Z_s)d\langle Z^c, Z^c\rangle_s + \sum_{i\in I} f'_i L_t^{x_i}\right]$$

$$+ \sum_{0<s\leq t}\left[f(Z_s)-f(Z_{s-})-f'_g(Z_{s-})\Delta Z_s\right].$$

Démonstration :

La dérivée seconde de f au sens des distributions est donnée par :

$\mu(da) = f''(a)da + \sum_{i\in I} f'_i \varepsilon_{x_i}(da)$, où ε_{x_i} désigne la mesure de Dirac en x_i.

La formule (2) découle alors de la formule (1) et de la propriété (ℓ-2). □

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat principal suivant :

3. Théorème :

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, nulle en 0, et de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de 0. Si $W = (W_t)$ est un mouvement brownien issu de 0, alors, la limite en probabilité de $\int_0^t \Phi_s(W_s)d\ \mathrm{Log}(|W_s| \vee \varepsilon)$, lorsque $\varepsilon \to 0$, existe et est égale à :

$$\int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s} dW_s - \frac{1}{2}\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(a)}{a^2} L_t^a da$$

où v.p. désigne valeur principale.

Démonstration :

Nous appliquons la formule (2) à la fonction $f(x) = \mathrm{Log}(|x| \vee \varepsilon)$ et la semi-martingale $Z = W$:

$$\mathrm{Log}(|W_t| \vee \varepsilon) = \mathrm{Log}\ \varepsilon + \int_0^t \frac{I_{(|W_s|>\varepsilon)}}{W_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{I_{(|W_s|>\varepsilon)}}{W_s^2} ds + \frac{1}{2\varepsilon} (L_t^{\varepsilon} + L_t^{-\varepsilon}).$$

D'où, si $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on a :

$$(3) \quad \int_0^t \Phi(W_s)d\ \mathrm{Log}(|W_s| \vee \varepsilon) = \int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s} I_{(|W_s|>\varepsilon)} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s^2} I_{(|W_s|>\varepsilon)} ds$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} (\Phi(\varepsilon)L_t^{\varepsilon} + \Phi(-\varepsilon)L_t^{-\varepsilon}).$$

(l'expression du dernier terme de droite est due à la propriété (ℓ-1) des temps locaux).

a - Il est facile de montrer que le premier terme du second membre de (3) converge en probabilité, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $\int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s} dW_s$, d'après les hypothèses sur Φ et d'après l'égalité $\int_0^t I_{(W_s=0)} dW_s = 0$, qui découle de (ℓ-2).

b - Etudions maintenant la limite du deuxième terme du second membre de (3). D'après la propriété (ℓ-2) des temps locaux on a :

$$\int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s^2} I_{(|W_s|>\varepsilon)} ds = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\Phi(a)}{a^2} L_t^a da + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Phi(a)}{a^2} L_t^a da$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{\Phi(a)L_t^a + \Phi(-a)L_t^{-a}}{a^2} \right) da$$

Mais, au voisinage de 0, $\dfrac{\Phi(a)L_t^a + \Phi(-a)L_t^{-a}}{a^2}$ est équivalent à $\Phi'(0)\left(\dfrac{L_t^a - L_t^{-a}}{a}\right)$,

car $\Phi(0) = 0$ et $\Phi \in \mathcal{C}^2$. D'autre part, d'après un théorème de Ray ([1] page 70) :

$$P\left[\overline{\lim_{|x-y|=\delta}} \frac{|L_t^x - L_t^y|}{(2\delta \operatorname{Log} \frac{1}{\delta})^{1/2}} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |L_t^x|^{1/2} \right] = 1,$$

il existe un voisinage de 0, tel que $|L_t^a(\omega) - L_t^{-a}(\omega)| \leq c_\varepsilon a^{1/4}$, et donc

$$\int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s^2} I_{(|W_s|>\varepsilon)} ds \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(a)}{a^2} L_t^a da.$$

c - Il nous reste à étudier la convergence du dernier terme de (3). Comme précédemment, on voit qu'il est équivalent, lorsque $\varepsilon \to 0$, à : $\frac{1}{2}\Phi'(0)\,(L_t^{\varepsilon} - L_t^{-\varepsilon})$, qui converge vers 0, d'après la continuité de $a \to L_t^a(\omega)$. ([1] page 68-69).

Finalement, en faisant tendre ε vers 0, dans la formule (3), on obtient le résultat désiré.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ITÔ, K. ; Mc KEAN, H.P. : Diffusion processes and their sample paths. Springer (1965).

[2] MEYER, P.A. : "Un cours sur les intégrales stochastiques". Sém. Proba. Strasbourg X, Lecture Notes in Math. 511, Berlin, Springer, 1976.

[3] MEYER, P.A. ; YOEURP, Ch.: "Sur la décomposition multiplicative des sous-martingales positives". Sém. Proba. Strasbourg X, Lecture Notes in Math. 511, Berlin, Springer, 1976.