

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL TALAGRAND

## Sur les résultats de Feyel concernant les épaisseurs

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1982\\_\\_16\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__1_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES RESULTATS DE FEYEL  
CONCERNANT LES EPAISSEURS

Michel TALAGRAND

0 - INTRODUCTION.

Soit  $K$  un compact, que l'on supposera métrisable, ce cas étant seul envisagé ici. On renvoie à [1] pour les définitions concernant les capacités. Pour une capacité  $C$ , on définit son épaisseur :

$$e(C) = \text{Sup}\{\alpha ; \text{il existe une famille } (A_i)_{i \in I} \text{ non dénombrable de compacts disjoints telle que pour } i \in I, C(A_i) \geq \alpha\}.$$

On dénote par  $\mathcal{C}_K$  l'ensemble des capacités  $C$  sur  $K$  telles que  $C(K) \leq 1$ . Feyel [3] montre que si  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  est un espace mesuré, et  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathcal{C}_K$  est mesurable, alors  $e \cdot \phi$  est mesurable, et que si pour tout  $\omega$ ,  $\phi(\omega)$  est alternée d'ordre deux, alors  $\int e(\phi(\omega)) d\mu(\omega) = e(\int \phi(\omega) d\mu(\omega))$ . Toute capacité alternée d'ordre deux est sup des mesures qu'elle domine. On va montrer d'abord que le résultat de Feyel ne s'étend pas si on suppose seulement que chaque  $\phi(\omega)$  est sup de mesures. On donnera ensuite une démonstration "probabiliste" du résultat de Feyel, basée sur les idées de [3] et qui permettra de l'étendre à un cadre un peu plus général.

I - UN EXEMPLE.

On désigne par  $K$  l'ensemble de Cantor  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ , et par  $\lambda$  sa mesure canonique.

Théorème 1 : Il existe un espace compact  $\Omega$ , une probabilité  $\mu$  sur  $\Omega$ , et une application continue  $\phi$  de  $\Omega$  dans  $\mathcal{C}_K$ , avec  $\phi(\omega)(K) = 1 = e(\phi(\omega))$  pour  $\omega \in \Omega$ , et telle que la capacité  $C = \int \phi(\omega) d\mu(\omega)$  soit absolument continue par rapport à  $\lambda$ . Autrement dit, on a

$$\forall \varepsilon, \exists \alpha, \lambda(A) \leq \alpha \implies C(A) \leq \varepsilon \quad \forall A \text{ compact.}$$

Preuve : Ecrivons  $\mathbb{N} = \cup I_n$ , où les  $I_n$  sont disjoints et  $\text{card } I_n = 2^{6n+3}$ . Soit  $\Omega = \prod_n I_n$ , muni de la mesure canonique  $\mu$ . Pour  $\omega = (i(n))_n \in \Omega$ ,  $u \in K$ , soit

$$K(\omega, u) = \{z \in K ; z(i(n)) = u(n)\}$$

et soit  $\mu(\omega, u)$  la mesure naturelle sur  $K(\omega, u)$ .

Posons  $\phi(\omega) = \text{Sup}_{u \in K} \mu(\omega, u)$ . Il est clair que l'application  $\omega \rightarrow \phi(\omega)$  est continue.

D'autre part, pour  $u \in K$ ,  $\phi(\omega)(K(\omega, u)) = 1$ , donc  $e(\phi(\omega)) = 1$  puisque  $u \neq u' \implies K(\omega, u) \cap K(\omega, u') = \emptyset$ .

Posons  $C = \int \phi(\omega) d\mu(\omega)$ . On va montrer que pour tout ensemble ouvert-fermé  $A$  de  $K$ , on a pour tout  $p$

$$C(A) \leq 2^{-p} + 2^p \lambda(A). \quad (1)$$

ce qui suffira, car alors  $\lambda(A) \leq 2^{-2p} \implies C(A) \leq 2^{-p+1}$ .

Pour tout entier  $n$ , et  $v \in K_n = \{0,1\}^n$ ,  $\omega = (i(p)) \in \Omega$ , soit

$$K_n(\omega, v) = \{z \in K; \forall p \leq n, z(i(p)) = v(p)\}$$

et  $\mu_n(\omega, v)$  la mesure naturelle de  $K_n(\omega, v)$ .

Soit  $m$  un entier tel que  $A$  ne dépende que des coordonnées dans  $\bigcup_{p \leq m} I_p$ . On va prouver par induction décroissante sur  $n$  que pour  $n \leq m$ , on a

$$C(A) \leq 2^{-n} + \int_{\Omega} \sup_{v \in K_n} \mu_n(\omega, v)(A) d\mu(\omega). \quad (2)$$

Puisque  $\mu_n(\omega, v)(A) \leq 2^n \lambda(A)$ , ceci implique (1).

Pour  $n = m$ , alors (2) découle du fait aisément vérifié que

$$\phi(\omega)(A) = \sup_{v \in K_m} \mu_m(\omega, v)(A).$$

On peut donc supposer (2) établie au rang  $n$ . Il existe une fonction mesurable  $\omega \rightarrow v(\omega)$  de  $\Omega$  dans  $K_n$  telle que :

$$\sup_{v \in K_n} \mu_n(\omega, v)(A) = \mu_n(\omega, v(\omega))(A).$$

Pour  $u \in K_n$ , on pose  $H_u = v^{-1}(\{u\})$ . Désignons par  $u'$  la projection de  $u$  dans  $K_{n-1}$ . Puisque

$$\mu_{n-1}(\omega, u')(A) \leq \sup_{w \in K_{n-1}} \mu_{n-1}(\omega, w)(A)$$

et que  $\text{card } K_n \leq 2^n$ , il suffit de montrer que

$$E = \int_{\omega \in H_u} \mu_n(\omega, u)(A) d\mu(\omega) \leq 2^{-2n} + \frac{1}{2} \int_{\omega \in H_u} \mu_{n-1}(\omega, u')(A) d\mu(\omega). \quad (3)$$

On fixe désormais  $\mu$ . Soient  $\Omega_1 = \prod_{p \leq n} I_p$ ,  $\nu_1$  sa mesure canonique, et  $p_1$  la projection de  $\Omega$  sur  $\Omega_1$ . Il est clair que  $K_n(\omega, u)$  ne dépend que de  $p_1(\omega)$ , et que l'on a pu choisir la fonction  $v \rightarrow v(\omega)$  de sorte qu'il en soit de même de  $H_u$ .

Avec des abus de notations évidents, on a donc en considérant que  $H_u \subset \Omega_1$ ,

$$E = \int_{\eta \in H_u} \mu_n(\eta, u)(A) d\nu_1(\eta).$$

Soient  $p$  la projection de  $\Omega_1$  sur  $\Omega_2 = \prod_{p \leq n-1} I_p$ , et, pour  $\xi \in \Omega_2$ , soit  $h(\xi) = \text{card}(p^{-1}(\xi) \cap H_u)$ . Posons :

$$B = \{\eta \in \Omega_1 ; h(p(\eta)) \leq 2^{4n+2}\}.$$

Puisque  $\text{card } I_n = 2^{6n+3}$ , il est clair que l'on a  $v_1(H_u \cap B) \leq 2^{-2n-1}$ , donc

$$\int_{\eta \in H_u \cap B} \mu_n(\eta, u)(A) dv_1(\eta) \leq 2^{-2n-1}.$$

Si  $v_2$  est la mesure canonique de  $\Omega_2$ , on a

$$\int_{\eta \in H_u \cap B^c} \mu_n(\eta, u)(A) dv_1(\eta) = \int_{\xi \in p(B^c)} g(\xi) dv_2(\xi)$$

où l'on a posé

$$g(\xi) = (\text{card } I_n)^{-1} \sum_{p(\eta)=\xi} \mu_n(\eta, u)(A).$$

Pour établir (3), il suffit de montrer que pour tout  $\xi$  fixé dans  $\Omega_2$ ,

$$g(\xi) \leq (\text{card } I_n)^{-1} h(\xi) \mu_{n-1}(\xi, u')(A) + 2^{-2n-1}. \quad (4)$$

En effet, on aura alors

$$\begin{aligned} \int_{\xi \in p(B^c)} g(\xi) dv_2(\xi) &\leq 2^{-2n-1} + \int_{\xi \in p(B^c)} (\text{card } I_n)^{-1} h(\xi) \mu_{n-1}(\xi, u')(A) dv_2(\xi) \\ &= 2^{-2n-1} + \int_{\eta \in H_u \cap B^c} \mu_{n-1}(\eta, u')(A) dv_1(\eta) \end{aligned}$$

puisque  $\mu_{n-1}(\eta, u')$  ne dépend que de  $p(\eta)$ .

Pour  $i \in I_n$ , soit  $G_i = \{z \in K_{n-1}(\xi, u') ; z(i) = u(n)\}$ . Il est clair que si  $p(\eta) = \xi$ , on a

$$\mu_n(\eta, u)(A) = 2 \mu_{n-1}(\xi, u')(A \cap G_{\eta(n)}).$$

Pour établir (4), il suffit donc de montrer que si  $J \subset I_n$  est un ensemble de cardinal  $a \geq 2^{4n+2}$  on a

$$\frac{2}{a} \sum_{i \in J} \theta(A \cap G_i) \leq \theta(A) + 2^{-2n-1}$$

où l'on a posé pour simplifier  $\theta = \mu_{n-1}(\xi, u')$ .

Or, les ensembles  $G_i$  sont indépendants pour  $\theta$ , et de mesure  $\frac{1}{2}$ . On a donc

$$\left( \int \left| \frac{1}{a} \sum_{i \in J} \chi_{G_i} - \frac{1}{2} \right| d\theta \right)^2 \leq \int \left| \frac{1}{a} \sum_{i \in J} \chi_{G_i} - \frac{1}{2} \right|^2 d\theta = \frac{1}{4a}.$$

Ainsi

$$\left| \frac{2}{a} \sum_{i \in J} \theta(A \cap G_i) - \theta(A) \right| \leq 2 \int_A \left| \frac{1}{a} \sum_{i \in J} \chi_{G_i} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

ce qui suffit.

## II - CAPACITES ETALANTES.

On suppose ici que le compact de base est l'ensemble de Cantor  $K = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ . On note  $\mathcal{T}_n$  l'algèbre engendrée par les  $n$  premières coordonnées.

On dit que  $\mathcal{T}_n$  sépare deux fermés  $L_1$  et  $L_2$  de  $K$  s'il existe  $A \in \mathcal{T}_n$  avec  $L_1 \subset A$ ,  $L_2 \subset A^c$ .

On appelle  $\mu_n$  la probabilité sur  $\mathcal{T}_n$  donnant masse  $2^{-2^n}$  à chaque point.

Définition 2 : Une capacité  $C$  sur  $K$  sera dite étalante si elle vérifie la propriété suivante :

"  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists m \in \mathbb{N}$ , pour toute famille  $A_1, \dots, A_m$  de sous-compacts disjoints de  $K$ , et tout  $n$  tel que  $\mathcal{T}_n$  sépare les  $A_i$ , on a

$$\int_{A \in \mathcal{T}_n} C\left(\bigcup_{i \leq m} A_i \cap A\right) d\mu_n(A) \geq \inf_{i \leq m} C(A_i) - \varepsilon. \quad (5)$$

La preuve de l'assertion suivante est aisée et laissée au lecteur :

Exemple 3 : Pour  $k \in \mathbb{N}$ , la capacité sur  $C$  donnée par  $C(A) = 0$  si  $\text{card } A \leq k-1$ ,  $\text{card } A = 1$  sinon, est étalante, et n'est pas sup de mesures si  $k > 1$ .

Proposition 4 : Toute capacité alternée d'ordre 2 est étalante.

On va montrer plus précisément que si  $A_1, \dots, A_m$  est une famille de compacts de  $K$  séparés par  $\mathcal{T}_n$ , et si  $\forall i \leq m$ ,  $C(A_i) \geq \gamma$ , on a

$$\int_{A \in \mathcal{T}_n} C\left(\bigcup_{i \leq m} A_i \cap A\right) d\mu_n(A) \geq \gamma(1 - 2^{-m}). \quad (6)$$

La preuve s'effectue par induction sur  $m$ . C'est évident pour  $m = 0$ . Supposons donc (6) établie pour  $m-1$ . Soit  $E \in \mathcal{T}_n$ , avec  $A_m \subset E$ ,  $A_i \cap E = \emptyset$  pour  $i < m$ . Pour

$A \in E$ , soit  $\tilde{A} = (A \cap E^c) \cup (E \setminus A)$ . Pour tout  $A \in \mathcal{T}_n$ , on a en posant

$$B = \bigcup_{i < m} A_i, \quad B' = \bigcup_{i < m} A_i :$$

$$C(A \cap B) + C(\tilde{A} \cap B) \geq C((A \cup \tilde{A}) \cap B) + C(A \cap \tilde{A} \cap B) \geq C(A_m) + C(A \cap B').$$

Puisque  $A$  et  $\tilde{A}$  ont même loi, on en déduit

$$2 \int_{\mathcal{A}_n} C(B \cap A) d\mu_n(A) \geq \gamma + \int_{\mathcal{A}_n} C(A \cap B') d\mu_n(A) \geq \gamma + \gamma(1-2^{-m-1})$$

d'après l'hypothèse de récurrence, et ceci est le résultat cherché.

Théorème 5 : Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré complet et  $\omega \rightarrow \phi(\omega)$  une application mesurable de  $\Omega$  dans  $\mathcal{E}_K$ . Supposons que pour chaque  $\omega, \phi(\omega)$  soit étalante, et soit  $C = \int \phi(\omega) d\mu(\omega)$ . Alors  $e(C) = \int e(\phi(\omega)) d\mu(\omega)$ .

Preuve : Nous n'allons pas expliquer en détail pourquoi la construction qui va suivre peut s'effectuer de façon mesurable. Ce serait fastidieux, et cela n'utilise pas d'idée nouvelle. Le point essentiel est que si pour une capacité  $C$  il existe une famille non dénombrable  $(K_i)_{i \in I}$  de compacts disjoints telle que

$C(K_i) \geq \alpha \quad \forall i \in I$ , alors il existe une telle famille indexée continuellement par l'ensemble  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  [2].

Soit  $\eta > 0$ , et soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des compacts de  $K$ , muni de la topologie usuelle. On va, par induction sur  $n$ , construire des suites  $m(n)$  et  $k(n)$  d'entiers, des ensembles mesurables décroissants  $E_n$ , des fonctions mesurables  $\omega \rightarrow L(\omega, n) \in \mathcal{K}$ , de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées, pour tout  $n$  et  $\omega \in E_n$

$$\phi(\omega)(L(\omega, 1)) \geq e(\phi(\omega)) - \frac{\eta}{2} \quad (7)$$

$$\forall B \in \mathcal{K}_{k(n-1)}, \quad \forall \omega \in E_n$$

$$\mu_n(\{A \in \mathcal{K}_{k(n)} ; \phi(\omega)(L(\omega, n) \cap A \cap B) \leq \phi(\omega)(L(\omega, n-1) \cap B) - \eta 2^{-n-1}\}) \leq \eta 2^{-2n-1} \quad (8)$$

"Il existe une famille  $(K_i)_{i \in I}$  non dénombrable, de compacts disjoints de  $K$ , tels que la restriction de  $\phi$  à  $L(\omega, n)$  soit point de condensation des restrictions de  $\phi$  aux  $K_i$ ".

(9)

$$\mu(E_{n-1} \setminus E_n) \leq \eta 2^{-n}, \quad E_0 = \Omega. \quad (10)$$

Le démarrage ne posant pas de difficultés, supposons tous ces objets construits au rang  $n$ . Pour  $\omega \in E_n$ , soit  $m(\omega)$  le plus petit entier tel que  $\phi(\omega)$  satisfasse (5) avec  $\varepsilon = \eta^2 2^{-3n-4}$ . C'est une fonction mesurable. On peut donc trouver  $m(n+1)$  assez grand pour que

$$\mu(\{\omega \in E_n ; m(\omega) \geq m(n+1)\}) \leq \eta 2^{-n-2}.$$

Il existe un voisinage  $V(\omega)$  de  $L(\omega, n)$  tel que pour tout  $B \in \mathcal{K}_{k(n)}$  on ait

$$\phi(\omega)(V(\omega) \cap B) \leq \phi(\omega)(L(\omega, n) \cap B) + \eta^2 2^{-3n-3}$$

et l'on peut supposer  $\omega \rightarrow V(\omega)$  mesurable. D'après (9), pour chaque  $\omega$  existe donc une famille non dénombrable  $(K_i)_{i \in I}$  de compacts disjoints de  $V(\omega)$  tels que

$$\forall i, \forall B \in \mathcal{T}_{k(n)}, \quad \phi(\omega)(L(\omega, n) \cap B) - \eta^2 2^{-3n-4} \leq \phi(\omega)(K(\omega, i) \cap B).$$

Ecrivait  $I = J \times [1, m(n+1)]$  et  $L_j = \bigcup_{p \leq m(n+1)} K(j, p)$ , on voit que les restrictions de  $\phi$  à  $L_j$  ont des points de condensation. On peut ainsi trouver  $m(n+1)$  applications mesurables  $\omega \rightarrow K(\omega, i)$  de  $\Omega$  dans  $\mathcal{K}$ , qui vérifient les conditions suivantes, où l'on pose  $L(\omega, n+1) = \bigcup_{i \leq m(n+1)} K(\omega, i)$  :

(11) L'analogie de (9).

(12) Les compacts  $(K(\omega, i))_{i \leq m(n+1)}$  sont 2 à 2 disjoints.

(13) Pour  $B \in \mathcal{T}_{k(n)}$ ,  $i \leq m(n+1)$

$$\phi(\omega)(L(\omega, n) \cap B) - \eta^2 2^{-3n-4} \leq \phi(\omega)(K(\omega, i) \cap B) \leq$$

$$\phi(\omega)(L(\omega, n+1) \cap B) \leq \phi(\omega)(L(\omega, n) \cap B) + \eta^2 2^{-3n-3}.$$

Il existe alors  $k(n+1)$  tel que si on pose  $E_{n+1} = \{\omega \in E_n ; m(\omega) \leq m(n+1)\}$  et  $\mathcal{T}_{k(n+1)}$  sépare les  $K(\omega, i)$ ,  $i \leq m(n+1)$  on ait  $\mu(E_n \setminus E_{n+1}) \leq \eta 2^{-n-1}$ . Pour tout  $\omega$  on pose  $L(\omega, n+1) = \bigcup_{i \leq m(n+1)} K(\omega, i)$ . Puisque (10) et (11) sont vérifiées par construction, seule est à vérifier (8). Or, puisque  $\phi(\omega)$  est étalante, pour tout  $A \in \mathcal{T}_{k(n)}$  on a

$$\int \phi(\omega)(L(\omega, n+1) \cap A \cap B) d\mu_{n+1}(B) \geq \phi(\omega)(L(\omega, n) \cap A) - \eta^2 2^{-3n-3}$$

d'après (14) et (5), et aussi  $\phi(\omega)(L(\omega, n+1) \cap A \cap B) \leq \phi(\omega)(L(\omega, n) \cap A) + \eta^2 2^{-3n-3}$

toujours d'après (14), ce qui implique (10) par un calcul facile, et termine la construction.

Soit  $\Gamma = \prod_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{k(n)}$ , muni de la mesure canonique  $\nu$  produit des  $\mu_{k(n)}$ . Pour  $\gamma \in \Gamma$ , et  $u \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ , soit  $A_n(\gamma, u) = \bigcap_{i \leq n} u(i) \gamma(i)$ , ou pour  $A \in \mathcal{T}_1$ ,  $\varepsilon A = A$  si  $\varepsilon = 1$  et  $\varepsilon A = K \setminus A$  si  $\varepsilon = -1$ .

Fixons  $\omega \in E = \cap E_n$ . On montre par induction sur  $n$  que si on pose

$$F_n(\omega) = \{\gamma \in \Gamma ; \forall u \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}, \phi(\omega)(A_n(\gamma, u)) \geq e(\phi(\omega)) - \eta(1 - 2^{-n-1})\}$$

on a

$$\nu(F_n(\omega)) \geq 1 - \eta(1 - 2^{-n}).$$

Pour  $n = 0$ , ceci n'est autre que (7), et le pas général de l'induction se fait sans peine à l'aide de (8), compte tenu qu'il y a  $2^n$  ensembles de la forme  $A_n(\gamma, u)$ .

Ainsi, si  $F(\omega) = \bigcap_n F_n(\omega)$ , on a  $\nu(F(\omega)) \geq 1 - \eta$ . Le théorème de Fubini montre qu'il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que si on pose  $H_\gamma = \{\omega \in E ; \gamma \in F(\omega)\}$

$$\mu(H_\gamma) \geq \mu(E) - \eta \geq 1 - 2\eta.$$

Pour ce  $\gamma$ , et pour  $u \in \{-1, 1\}^n$ , on a

$$\begin{aligned} C(A_n(\gamma, u)) &\geq \int_{\omega \in H_\gamma} \phi(\omega) (A_n(\gamma, u)) d\mu(\omega) \geq \int_{\omega \in H_\gamma} (e(\phi(\omega)) - \eta) d\mu(\omega) \\ &\geq \int e(\phi(\omega)) d\mu(\omega) - 3\eta. \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour chaque  $n$ , et ainsi si on pose  $A(u) = \bigcap_n A_n(\gamma, u)$ , on a  $C(A(u)) \geq \int e(\phi(\omega)) d\mu(\omega) - 3\eta$ . Puisque les  $A(u)$  sont disjoints pour  $u \neq u'$ , et que  $\eta$  est arbitraire, on a montré que

$$e(C) \geq \int e(\phi(\omega)) d\mu(\omega).$$

L'inégalité inverse est bien plus facile (aucune hypothèse sur les  $\phi(\omega)$  n'étant nécessaire) et est laissée au lecteur, ce qui conclut la preuve du théorème.

Remarque : Le théorème 5 implique le résultat de Feyel sur tout compact, car il est facile de montrer que pour une capacité  $C$  sur  $L$ , on a  $e(C) = \sup e(C|_K)$  pour  $K$  homéomorphe à l'ensemble  $\{0, 1\}^N$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] G. CHOQUET : Theorie of capacities, Ann. Int. Fourier 5, 1955, 131-295.
- [2] C. DELLACHERIE : Capacités et processus stochastiques. Springer Verlag, 1972.
- [3] D. FEYEL : A paraître.
- [4] M. TALAGRAND : Sur deux résultats de Mokobodski concernant les ensembles à coupes dénombrables, à paraître.

Equipe d'Analyse, Tour 46  
 Université Paris VI  
 4 place Jussieu  
 75230 PARIS CEDEX 05