YVES LE JAN

Tribus markoviennes et prédiction

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 307-310
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__307_0>

TRIBUS MARKOVIENNES ET PREDICTION.

Yves LE JAN (*)

1. Dans des travaux précédents (cf. [3], [4]) on a caractérisé les tribus de processus aléatoires susceptibles d'être représentées comme l'ensemble des fonctions boréliennes bornées d'un processus de Ray, pour une loi d'entrée donnée.

Etant donné une tribu $\mathcal{U}$ de processus aléatoires bornés F_t, $t > 0$, si $\mathcal{F}_t$ désigne la filtration continue à droite engendrée par les processus de $\mathcal{U}$, les noyaux de prédiction $\pi_t = \pi \circ \theta_t$ obtenus en composant la projection $\mathcal{F}_t$-optionnelle π par les opérateurs de translation naturels sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ forment un semi-groupe.

Nous disons que $\mathcal{U}$ est une tribu markovienne (droite) si et seulement si elle est engendrée par une famille de processus continus à droite et stable par les noyaux de prédiction π_t.

La représentation (évidemment non unique) d'une telle tribu par un processus de Ray est possible dès que l'espace de probabilités $L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$ est séparable.

2. Considérons une famille Φ de fonctions aléatoires bornées f_t définies dt presque partout.

Posons $\mathcal{F}_{t-} = \sigma(\int_0^t \phi(s) f_s ds, f \in \Phi, \phi \in L^1(ds))$, et $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_{s-}$.

Le problème de la prédiction consiste à déterminer à tout instant t les espérances conditionnelles par rapport au "passé large" $\mathcal{F}_t$, de fonctions du "futur"

$$\mathcal{G}_t = \sigma(\int_t^\infty \phi(s) f_s ds,\ f \in \Phi,\ \phi \in L^1(ds)).$$

Notons $\theta\Phi$ la tribu de processus aléatoires engendrée par les processus continus $\int_0^\infty \phi_s f_{t+s} ds$, $\phi \in L^1(ds)$, $f \in \Phi$.

Vu que $\mathcal{G}_t = \sigma(F_t, F \in \theta\Phi)$, la prédiction à l'instant t peut être donnée sous la forme d'une mesure de probabilité ν_t sur $\theta\Phi$ définie par $\nu_t(F) = E(F_t/\mathcal{F}_t)$. La famille des mesures aléatoires ν_t admet une version définie aux évanescents près induite par la projection optionnelle π car $\nu_t(F) = \pi(F)_t$ (1).

(*) Laboratoire de Probabilités - Tour 56 - 3ème Etage - 4 Place Jussieu 75230 PARIS CEDEX 05.

(1) Il est naturel de privilégier cette version car elle est déterminée par la conservation de la continuité à droite.

ν_t devient ainsi un véritable processus aléatoire à valeurs dans les mesures de probabilité sur $\theta\Phi$. C'est ce processus que Knight (cf. [2], [5]) appelle le processus de prédiction. A l'aide d'une topologie convenable, il peut montrer qu'il s'agit d'un processus fortement markovien continu à droite (moyennant une hypothèse de séparabilité).

Du point de vue des tribus markoviennes, un processus ν_t à valeurs dans un espace de mesures bornées X sur une tribu $\mathcal{B}$ est associé à la tribu de processus réels engendrée par les processus $\nu_t(A)$, $A\in\mathcal{B}$, (car les fonctions cylindriques engendrent la tribu borélienne de X).

Ainsi si l'on néglige les questions topologiques qui n'apparaissent pas intrinsèquement liées au problème de la prédiction, on peut se réduire à montrer le résultat bien plus aisé suivant :

Théorème : La tribu de processus engendrée par $\pi(\theta\Phi)$ est markovienne.

Remarque : Il est alors facile de voir que c'est la plus petite tribu markovienne $\mathcal{F}_t$-adaptée contenant au moins une version de chaque fonction aléatoire de Φ. Nous la noterons $\mathcal{U}(\Phi)$.

3. Démonstration du théorème.

a) Il est clair que $\mathcal{U}(\Phi)$ est engendrée par la semi algèbre des processus continus à droite de la forme $G = \pi(F^1)\,\pi(F^2)\ldots\pi(F^n)$, $F^i\in\theta\Phi$ et continus à droite.

Il suffit donc de montrer que $\pi_t(G)$ appartient à $\mathcal{U}(\Phi)$.

b) Lemme : Soit $\pi^{(t)}$ la projection optionnelle relative à la filtration $\mathcal{F}^{(t)}_s = \mathcal{F}_{t+s}$. On a :

$$\pi^{(t)}\circ\theta_t = \theta_t\circ\pi.$$

Démonstration : Si A est un processus continu à droite son image par chacun des deux noyaux coïncide avec l'unique version continue à droite des espérances conditionnelles $E(A_{t+s}/\mathcal{F}_{t+s})$.

c) Introduisons sur $\Omega\times\mathbb{R}^+$ la probabilité $Q(d\omega,ds) = P(d\omega)e^{-s}ds$. Il suffit de montrer que G est Q-p.s. égal à un élément G' de $\mathcal{U}(\Phi)$ car on a alors, du fait de la continuité à droite de G :

$$G = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha\pi\left(\int_0^\infty e^{-\alpha u}\,\theta_u\,G du\right) = \lim_{\alpha\to\infty}\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha u}\pi_u\,G' du.$$

Pour chaque $t\geq 0$, $\pi^{(t)}$ est une version de la Q-espérance conditionnelle sur la tribu $\mathcal{F}^{(t)}_s$-optionnelle $\mathcal{O}^{(t)}$.

Il est clair que $\pi_t\Phi\in\mathcal{U}(\Phi)$ si chacun des $\theta_t\pi(F^i) = \pi^{(t)}(\theta_t F^i)$ est Q p.s. $\mathcal{U}(\Phi)\vee\theta\Phi$ mesurable, puisque π projette $\theta\Phi$ sur $\mathcal{U}(\Phi)$.

$\mathcal{O}$ et $\theta\Phi$ sont Q-conditionnellement indépendants par rapport à $\mathcal{U}(\Phi)$.

Posons $\theta_0^t\Phi = \sigma(\int_0^t \phi(u)\ \theta_u F du,\ \ \phi \in L^1(du),\ F \in \Phi)$. Il est clair que $\mathcal{O} \vee \theta_0^t\Phi$ et $\theta\Phi$ sont conditionnellement indépendants par rapport à $\mathcal{U}(\phi) \vee \theta_0^t\Phi$.

Si nous montrons que $\mathcal{O}^{(t)} = \mathcal{O} \vee \theta_0^t\Phi$ Q-p.s., il est alors clair que $\pi^{(t)}(\theta\Phi) \in \mathcal{U}(\Phi) \vee \theta(\Phi)$ et nous pouvons conclure.

d) Prouvons ce dernier point : Tout d'abord, on peut remplacer les tribus optionnelles par les tribus prévisibles car un processus optionnel et sa projection prévisible sont égales Q-p.s..

Définissons l'opérateur de translation à gauche η_t par

$$\eta_t F(s,\omega) = F(s-t,\omega)\ 1_{\{s>t\}} \quad \text{et posons} \quad \overline{\Phi} = \Phi \cup \{1\}.$$

Lemme : La tribu prévisible est la σ-algèbre $\eta(\overline{\Phi})$ engendrée par les processus continus $\int_0^\infty \phi(s)\ \eta_s F\ ds$, $F \in \overline{\Phi}$, $\phi \in L^1(ds)$.

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de processus continus engendrée par les processus de cette forme. Il est clair que $\mathcal{F}_{t-} = \sigma(F_t, F \in \mathcal{A})$.

Comme d'autre part la tribu prévisible est engendrée par les intervalles stochastiques $1_A]\!]t + \infty[\![$, $A \in \mathcal{F}_{t-}$ on pourra conclure si pour tout $F \in \mathcal{A}$, le processus arrêté à t $a_t F(s) = F_{t\wedge s}$ appartient à $\sigma(\mathcal{A})$. En effet on a alors $1_A]\!]t + \infty[\![= a_t F\ ]\!]t + \infty[\![$, si $A = F_t$ et les processus déterministes appartiennent évidemment à $\sigma(\mathcal{A})$. Mais, du fait de la continuité de F, on a $a_t F = \lim_{n\to\infty} \sum_1^\infty \eta_{p/n} F\ 1_{]\!]p/n+t\ \ p+1/n+t]\!]}$ ce qui permet de conclure.

Il suffit maintenant de remarquer que la filtration $\mathcal{F}_s^{(t)}$ est engendrée par $\Phi \vee \theta_0^t\Phi$ et qu'ainsi la tribu $\mathcal{F}_s^{(t)}$ prévisible $\mathcal{P}^{(t)}$ est $\eta(\overline{\Phi} \vee \theta_0^t\Phi)$. On vérifie aisément que $\eta(\theta_0^t\Phi)$ est inclus dans $\mathcal{P} \vee \theta_0^t\Phi$ du fait que $\eta_s\theta_u = \eta_{s-u}\ 1_{\{s>u\}} + \theta_{u-s}\ 1_{\{u\geq s\}}$. On obtient finalement l'identité $\mathcal{P}^{(t)} = \mathcal{P} \vee \theta_0^t\Phi$.

Remarque finale : Dans l'étude des "processus de prédiction", il y a lieu de distinguer entre les propriétés qui ne dépendent que de la filtration $\mathcal{F}_t$ ("continuité" = absence de temps inaccessibles ; quasi continuité à gauche) et les autres telles que la récurrence l'ergodicité etc... (cf. [1] pour une transposition de ces propriétés dansle cadre des tribus markoviennes).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. BRANCOVAN, Y. LE JAN : Récurrence et résolvantes de noyaux.
Notes aux CRAS. t 289 p. 763-766 (1979).

[2] F.B. KNIGHT : A predictive view of continuous time processes.
Ann. of Probability, Vol. 3 p. 573-596 (1975).

[3] Y. LE JAN : Tribus markoviennes et quasi continuité.
Thèse de Doctorat d'état, Université P. et M. Curie
Juin 1979.

[4] Y. LE JAN : Tribus markoviennes, résolvante et quasi continuité
CRAS. t 288, p. 739-740 (1979).

[5] P.A. MEYER : La théorie de la prédiction de F. Knight.
Séminaire de probabilité X. Lect.Notes in Maths 511
Springer (1976).