

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

BERNARD BRU

HENRI HEINICH

JEAN-CLAUDE LOOTGIETER

**Autour de la dualité** ( $H^1$ ,  $BMO$ )

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 15 (1981), p. 259-277

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1981\\_\\_15\\_\\_259\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__259_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

AUTOUR DE LA DUALITE  $(H^1, BMO)$

par

B. BRU, H. HEINICH et J.C. LOOTGIETER (\*)

INTRODUCTION :

Nous nous proposons de poursuivre ici l'étude de l'expression de la dualité  $(H^1, BMO)$  commencée par Jeulin et Yor dans le Séminaire n° 13, ([4]).

Il s'agit de répondre à deux types de questions :

- Ponctuellement, "pour quels couples de martingales  $(X, Y)$  de  $H^1 \times BMO$ , a-t-on  $X_\infty Y_\infty \in L^1$  et  $(X|Y)_{H^1 \times BMO} = E(X_\infty Y_\infty)$  ?"

- Globalement, "quelles sont les martingales  $X$  de  $H^1$  (resp. de  $BMO$ ) telles que  $(X|Y) = E(X_\infty Y_\infty)$  pour toutes les martingales  $Y$  de  $BMO$  (resp. de  $H^1$ ) ?"

Il est possible de répondre de façon assez satisfaisante à la question ponctuelle (paragraphe 1) mais la question globale, qui revient à caractériser les espaces de Banach réticulés les plus proches de  $H^1$  et  $BMO$ , soulève de nombreuses difficultés (voir, par exemple, [4] page 370). En effet la géométrie des espaces de martingales proches de  $H^1$  et  $BMO$  semble dépendre de propriétés particulières des filtrations. On observe, notamment, que toute martingale équi-intégrable construite sur le jeu de pile ou face est égale, au signe près, à une martingale de  $H^1$ , mais qu'il n'en est plus de même dans le cas de la filtration naturelle des entiers munis d'une probabilité géométrique.

Nous étudions ce genre de problèmes dans les paragraphes 2 et 3. Nous concluons en examinant l'exemple des filtrations régulières (paragraphe 4).

Nous remercions chaleureusement nos amis T. Jeulin et M. Yor qui nous ont encouragé à écrire ce petit article.

---

(\*) Laboratoire de Probabilités associé au CNRS LA 224 "Processus Stochastiques et Applications", Université P. et M. Curie - Paris VI - Tour 56 - 3ème Etage  
4 place Jussieu - 75230 PARIS CEDEX 05.

1) Expression de la dualité  $(H^1, BMO)$ .

Sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , on se donne une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  vérifiant  $\bigvee_n \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ . On supposera toujours que  $\mathcal{F}$  est séparable.

Si  $X \in L^1$ , on notera toujours  $E^n(X) = E(X | \mathcal{F}_n)$  et on identifiera la martingale  $(E^n(X))$  à sa variable terminale  $X$ .

On pose  $X^* = \sup_n |E^n(X)|$  et on munit l'espace  $H^1 = \{X \in L^1 | X^* \in L^1\}$  de la norme  $\|X\|_{H^1} = E(X^*)$ . Le dual de  $H^1$  s'identifie à l'espace

$BMO = \{Y \in L^1 | \sup_n E^n(Y - E^{n-1}(Y))^2 \in L^\infty\}$ . On munit  $BMO$  de la norme duale et on note  $(\cdot | \cdot)$  la dualité  $(H^1, BMO)$ . On sait que

$$(X | Y) = \lim_n E(E^n(X) \cdot E^n(Y)). \quad (\text{cf. [3] et [7]}).$$

Contrairement à  $H^1$ , l'espace  $BMO$  est un espace de Riesz (mais ce n'est pas un espace de Banach réticulé solide ; i.e :  $BMO$  ne vérifie pas :

$$|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|) \text{ on a :}$$

$$\|\text{Inf}(Y_1, Y_2)\|_{BMO} \leq k(\|Y_1\|_{BMO} + \|Y_2\|_{BMO})$$

pour une constante  $k$  ([4] page 361).

Remarque : Le temps  $n$  est entier, mais tous les résultats obtenus ici sont transposables au temps continu, et les exemples que nous traitons sont indifféremment à temps discret et à temps continu.

- On dispose des deux résultats suivants :

Proposition 1 :

Si  $X \in H^1$  et  $Y \in BMO$  vérifie  $XY \in L^1$ , alors  $(X | Y) = E(XY)$ .

Démonstration :

- Si  $Y \in L^\infty$ , le théorème de Lebesgue montre que  $E(XY) = \lim_n E(E^n(X) Y) = (X | Y)$ .

- Si  $Y \in BMO_+$ ,  $E^n(Y) \in L^\infty_+(\mathcal{F}_n)$  et  $Y \wedge E^n(Y) \in L^\infty_+$ . On a :

$$(X | \text{Inf}(Y, E^n(Y))) = E(X \cdot \text{Inf}(Y, E^n(Y))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(XY) \text{ puisque}$$

$$|X \cdot \text{Inf}(Y, E^n(Y))| \leq |XY| \in L^1.$$

D'autre part  $\|\text{Inf}(Y, E^n(Y))\|_{BMO} \leq 2k \|Y\|_{BMO}$ , ce qui montre que la suite  $(\text{Inf}(Y, E^n(Y)))$  est faiblement compacte, d'où il résulte que

$$(X | \text{Inf}(Y, E^n(Y))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (X | Y)$$

et donc que  $(X | Y) = E(XY)$ .

Le lemme de Fatou permet de préciser davantage le résultat précédent :

Proposition 2 :

- Soit  $X \in H^1$  et  $Y \in BMO$  telles que  $XY \geq Z \in L^1$ , alors  $XY \in L^1$  (et la dualité s'écrit  $E(XY)$ ).

- Symétriquement, soit  $X \in H^1$  et  $Y \in BMO$  telles que  $XY \leq Z \in L^1$ , alors  $XY \in L^1$ .

Démonstration :

Soit  $X \in H^1$  et  $Y \in BMO$  vérifiant  $XY \geq Z \in L^1$  ; on a :  $XY \geq Z \geq -Z^-$  et donc  $X \cdot Y^+ \geq -Z^- \cdot 1_{\{Y > 0\}} \geq -Z^-$ , ce qui permet de supposer  $Y \geq 0$ , on a alors, pour tout  $n$  :

$$\text{Inf}(Y, E^n(Y)) \cdot X \geq -Y \cdot X^- \geq -Z^- \in L^1.$$

Comme dans la démonstration précédente,  $E(X \cdot \text{Inf}(Y, E^n(Y))) = (X | \text{Inf}(Y, E^n(Y))) \rightarrow (X | Y)$ ;

le lemme de Fatou montre alors que  $XY \in L^1$ .

Le cas  $XY \leq Z \in L^1$  se traite de la même façon.

II) Espaces proches de  $H^1$  et  $BMO$ .

① D'après la proposition 1 l'ensemble des  $X \in H^1$  tels que pour tout  $Y \in BMO$   $(X|Y) = E(XY)$  est exactement  $\{X|XY \in L^1, \forall Y \in BMO\}$  ; cet ensemble a été étudié par Jeulin et Yor qui ont montré le résultat suivant :

Proposition 3 : ([4], proposition 3)

$$\boxed{\{X|XY \in L^1, \forall Y \in BMO\} = \{X \in H^1 | |X| \in H^1\}}$$

Démonstration :

Si  $X \in H^1_+$  et  $Y \in BMO_+$   $E(XY) \leq \liminf E(E^n(X)E^n(Y)) = (X|Y)$  donc  $XY \in L^1$ .

Inversement, si  $X$  vérifie  $XY \in L^1, \forall Y \in BMO$ , en tronquant  $X$  et en utilisant le théorème de Banach Steinhaus on montre que l'application  $X \rightarrow E(XY)$  est une forme linéaire continue sur  $BMO$  et le corollaire de [2] page 111 montre que  $X \in H^1$ .

- Jeulin et Yor notent  $K^1$  l'ensemble des  $X \in H^1$  tels que  $|X| \in H^1$  ; pour la norme  $\| |X| \|_{K^1} = \| |X| \|_{H^1}$ ,  $K^1$  est un espace de Banach réticulé solide (Banach lattice), très régulier, comme le montre la remarque suivante :

Lemme 4 :  $K^1$  est convexe pour l'ordre, c'est à dire ([1]) :

$$\boxed{\text{si } 0 \leq X \leq Y \text{ et } \| |X| \|_{K^1} = \| |Y| \|_{K^1} \text{ alors } X = Y}$$

Démonstration :

Si  $0 \leq X \leq Y$  et  $\| |X| \|_{K^1} = \| |Y| \|_{K^1}$  on a  $X^* = Y^*$ , en particulier  $X^* \geq E^0(Y)$  et donc  $(X - E^0(Y))^* \geq 0$  ; l'inégalité maximale montre alors :

$$E(X - E^0(Y)) = \int_{\{(X - E^0(Y))^* \geq 0\}} (X - E^0(Y)) \cdot dP \geq 0, \text{ d'où } E(X) = E(Y) \text{ et } X = Y.$$

-  $K^1$  est donc faiblement séquentiellement complet ([1]) ; en particulier comme l'ont remarqué Jeulin et Yor,  $(K^1)' = \{Y|XY \in L^1 \text{ pour tout } X \in K^1\}$  et  $K^1 = \{X|XY \in L^1 \text{ pour tout } Y \in (K^1)'\}$  (cf. [5] pages 29 et 30).

- Rappelons qu'un idéal (pour l'ordre) de  $L^1$  est un sous-espace de Riesz  $I$  de  $L^1$  vérifiant :  $\forall X \in L^1, |X| \leq |Y| \text{ et } Y \in I \Rightarrow X \in I$ . On observe que  $K^1$  est le plus gros idéal de  $L^1$  contenu dans  $H^1$ . On peut également caractériser  $K^1$  d'une autre façon :

Lemme 5 :

$$\boxed{K^1 = \{X | \text{Sup}\{ \| |\phi X| \|_{H^1} | \phi \text{ mesurable par rapport à } \mathcal{H}_n, n \in \mathbb{N}, \text{ et } |\phi| \leq 1 \} < \infty\}}$$

Démonstration :

Soit  $\phi \in L^\infty(\mathcal{F})$  vérifiant  $|\phi| \leq 1$  ; on peut approcher  $\phi$  p.s. par une suite  $\phi_q$  de v.a.  $\mathcal{F}_q$  mesurables et vérifiant  $|\phi_q| \leq 1$ .

Soit  $X$  vérifiant la propriété du second membre de l'égalité à démontrer on a  $E(\text{Sup}_n |E^n(\phi_q X)|) \leq M$ , pour une constante  $M$  convenable, le lemme de Fatou montre alors :

$$E(\liminf_q \text{Sup}_n |E^n(\phi_q X)|) \leq M \text{ d'où } E(\text{Sup}_n |E^n(\phi X)|) \leq M \text{ et le lemme en résulte.}$$

- Le dual  $(K^1)'$  de  $K^1$  est un espace de Banach réticulé contenant  $BMO$ , c'est un idéal de  $L^1$  il contient donc l'idéal engendré par  $BMO$  dans  $L^1$ , cet idéal est égal à  $\{\phi \cdot Y | \phi \in L^\infty, Y \in BMO\}$  qui est le complété de Dedekind de l'espace de Riesz  $BMO$  ([6], corollaire 32.8), nous notons  $\widetilde{BMO}$  cet espace.

Jeulin et Yor ont posé la question de savoir si  $\widetilde{BMO} = (K^1)'$  en général. Nous répondons ci-dessous à cette question :

Proposition 6 :

$$\widetilde{BMO} = (K^1)'$$

Démonstration :

Posons  $A = \{Z \in (K^1)'\} | \text{il existe } Y \in BMO_+ \text{ tel que } |Z| \leq Y \text{ et } \|Y\|_{BMO} \leq 1\}$   
On vérifie que  $A$  est un ensemble convexe, équilibré, borné de  $(K^1)'$ . On note  $E_A$  l'espace vectoriel engendré par  $A$ , on munit  $E_A$  de la norme  $\|Z\|_A = \inf_{X \in \lambda A} |\lambda|$ .

- Montrons que  $A$  est fermé dans  $(K^1)'$ , soit  $Z_n$  une suite de  $A$  convergeant vers  $Z$  dans  $(K^1)'$ , on a  $|Z_n| \leq Y_n$  et  $\|Y_n\|_{BMO} \leq 1$  ; la suite  $(Y_n)$  est faiblement compacte dans  $BMO$ , quitte à en extraire une sous-suite elle converge vers une v.a.  $Y \in BMO_+$  pour la topologie  $\sigma(BMO, H^1)$ , en particulier, pour tout  $B \in \mathcal{F}$ ,  $E(Y_n | B) \rightarrow E(Y | B)$  d'où  $|Z| \leq Y$  et comme  $\|Y\|_{BMO} \leq 1$ ,  $Z \in A$ .

On sait alors que  $E_A$  est un espace de Banach.

- On a clairement  $\|Z\|_A = \inf_{Y \in BMO} \|Y\|_{BMO}$  et par conséquent pour tout  $Z \in E_A$   
 $|Z| \leq Y$

il existe une suite  $Y_n$  de v.a. de  $BMO_+$  vérifiant  $\|Y_n\|_{BMO} \searrow \|Z\|_A$  ; de la suite  $Y_n$  on peut extraire une sous-suite convergeant vers une v.a.  $Y \in BMO_+$  pour la topologie  $\sigma(BMO, H^1)$  qui vérifie nécessairement  $\|Y\|_{BMO} = \|Z\|_A$ .

Il est d'autre part évident que  $E_A$  est un espace de Banach réticulé solide.

- Montrons que  $E_A$  possède la propriété de Fatou, c'est à dire que si  $(Z_n)$  est une suite croissante d'éléments positifs de  $E_A$  vérifiant pour tout  $n$   $\|Z_n\|_A \leq k$ , la limite p.s.  $Z$  de  $(Z_n)$  appartient à  $E_A$  et  $\|Z_n\|_A \rightarrow \|Z\|_A$  :

En effet, il existe une suite  $(Y_n)$  de  $BMO_+$  telle que, pour tout  $n$ ,  $Z_n \leq Y_n$  et  $\|Y_n\|_{BMO} = \|Z_n\|_A$ ; pour une sous-suite convenable,  $(Y_n)$  converge vers une v.a.  $Y \in BMO_+$  pour  $\sigma(BMO, H^1)$ ; on vérifie aisément que  $Z \leq Y$ ,  $\|Y\|_{BMO} = \|Z\|_A$  et  $\|Z_n\|_A \rightarrow \|Z\|_A$ .

- On observe enfin que  $E_A = \widetilde{BMO}$  et que  $\{X|XY \in L^1 \mid \forall Y \in \widetilde{BMO}\} = K^1$ .

Rappelons le résultat suivant ([5] page 30): soit  $E$  un espace de Banach de v.a. intégrables, réticulé solide possédant la propriété de Fatou, alors, si on note

$$E_o^* = \{Y|XY \in L^1 \mid \forall X \in E\}, \text{ on a } (E_o^*)^* = E.$$

Comme  $(K^1)_o^* = (K^1)'$ , la proposition s'en déduit.

Remarque :

Il résulte de la proposition précédente que la norme de  $(K^1)'$  est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_A$ .

② De façon duale, on introduit l'espace

$$BO = \{Y|XY \in L^1, \forall X \in H^1\} \text{ et l'on pose}$$

$$\|Y\|_{BO} = \sup_{\|X\|_{H^1} \leq 1} E|XY|$$

Lemme 7 :

$\|\cdot\|_{BO}$  est une norme qui fait de  $BO$  un espace de Banach réticulé vérifiant  $L^\infty \subset BO \subset BMO$ ,  $(X|Y) = E(XY)$  pour tout  $X \in H^1$  et  $Y \in BO$ ; de plus

$$\|Y\|_1 \leq \|Y\|_{BMO} \leq \|Y\|_{BO} \leq \|Y\|_\infty$$

Démonstration :

Soit  $Y \in BO$ , en tronquant  $Y$  et en appliquant le théorème de Banach-Steinhaus on vérifie que l'application  $X \rightarrow XY$  est une application linéaire continue de  $H^1$  dans  $L^1$ ; on en déduit que  $\|Y\|_{BO} < \infty$ .

On remarque ensuite que :

$$\|Y\|_{BMO} = \sup_{\|X\|_{H^1} \leq 1} |E(XY)| \leq \sup_{\|X\|_{H^1} \leq 1} E(|XY|) = \|Y\|_{BO}$$

Enfin, si  $(Y_n)$  est une suite de Cauchy de  $BO$ , elle est de Cauchy dans  $BMO$ , elle converge donc vers une v.a.  $Y$  dans  $BMO$  et, quitte à en extraire une sous-suite, p.s., on a :

$$\text{si } X \in H^1 \quad E(|XY|) \leq \liminf E(|XY_n|) \leq \liminf \|X\|_{H^1} \cdot \|Y_n\|_{BO} < \infty \text{ d'où } Y \in BO.$$

D'autre part  $BO$  se plonge dans l'espace de Banach des applications linéaires continues de  $H^1$  dans  $L^1$ ;  $(Y_n)$  converge dans cet espace et sa limite est nécessairement l'application  $X \rightarrow XY$ . Ce qui montre que  $\|Y_n - Y\|_{BO} \rightarrow 0$ .

- Le plus gros idéal de  $L^1$  contenu dans  $BMO$  s'écrit visiblement  $\{Y|\phi Y \in BMO, \text{ pour tout } \phi \in L^\infty\}$ , cet ensemble est compris entre  $BO$  et  $BMO$  ; en fait on a :

Proposition 8 :

$$BO = \{Y|\phi Y \in BMO, \forall \phi \in L^\infty\} = \{Y|\phi Y \in BMO, \forall \phi \in L^\infty \text{ telle que } |\phi| = 1\}.$$

Démonstration :

Soit  $Y \in L^1$  telle que  $\phi Y \in BMO$  pour toute v.a.  $\phi$  vérifiant  $|\phi| = 1$  et soit  $X \in H^1$ , posons  $\phi = \text{signe}(XY)$ . On a :

$\phi Y \in BMO, X \in H^1$  et  $\phi YX \geq 0$ , la proposition 2 permet d'en déduire  $\phi YX \in L^1$  et par conséquent  $Y \in BO$ .

On dispose également du résultat symétrique du lemme 5 :

Lemme 9 :

$$BO = \{Y \in BMO \mid \text{Sup}\{|\phi Y| \mid \phi \text{ mesurable par rapport à } \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}, \text{ et } |\phi| \leq 1\} < \infty\}$$

Démonstration :

Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des v.a.  $\phi \in L^\infty(\mathcal{F}_n), n \in \mathbb{N}$ , nous munissons  $\mathcal{E}$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Si  $Y$  appartient à l'ensemble figurant au second membre de l'égalité du lemme 9, l'application  $u : \phi \rightarrow \phi Y$  de  $\mathcal{E}$  dans  $BMO$  est continue, elle se prolonge à l'adhérence  $\bar{\mathcal{E}}$  de  $\mathcal{E}$  dans  $L^\infty$ , sa transposée  ${}^t u$  est alors fortement continue de  $(BMO)'$  dans  $(\bar{\mathcal{E}})'$ . On observe que  $H^1$  se plonge dans  $(BMO)'$  et que  $L^1$  est un sous-espace fermé de  $(\bar{\mathcal{E}})'$  puisque si  $X \in L^1$   $\|X\|_1 = \text{Sup}\{|E(X)| \mid \phi \in \bar{\mathcal{E}} \text{ telle que } |\phi| \leq 1\}$ . Soit  $X \in L^\infty$  et  $\phi \in \bar{\mathcal{E}}$ , on a :

$$({}^t u(X) | \phi)_{(\bar{\mathcal{E}}', \bar{\mathcal{E}})} = (X | u(\phi))_{(BMO, BMO')} = (X | \phi Y) = E(X \phi Y)$$

donc  ${}^t u(X) = XY \in L^1$ , c'est à dire que  ${}^t u(L^\infty) \subset L^1$  et comme  $L^\infty$  est dense dans  $H^1$ , il en résulte que

$${}^t u(H^1) \subset L^1 \text{ et } Y \in BO.$$

Remarques :

1)  $BO$ , comme  $L^\infty$ , n'est pas fermé dans  $BMO$  en général ; en effet si  $BO$  est fermé dans  $BMO$ , les normes  $BO$  et  $BMO$  sont alors équivalentes et l'application  $Y \rightarrow E(|X|Y)$  de  $BO$  dans  $\mathbb{R}$  est prolongeable à  $BMO$  pour tout  $X \in H^1$ , ce qui implique  $|X| \in H^1$  puis  $BO = BMO$  et  $L^\infty$ , qui est dense dans  $BO$ , devient dense dans  $BMO$  ce qui se produit seulement si  $H^1 = L^1$  ([2] page 112).



2)  $BO$  ressemble donc beaucoup à  $L^\infty$  et, dans tous les exemples que nous considérerons plus loin, nous vérifierons que  $BO = L^\infty$ . Nous ne savons pas montrer une telle égalité en toute généralité. Mokobodzki a montré que si  $\mathcal{F}$  est atomique,  $BO = L^\infty$  et  $\|Y\|_{BO} \geq \frac{1}{2} \|Y\|_\infty$ .

③ On introduit maintenant (au moins provisoirement) l'espace

$$J^1 = \{X|XY \in L^1, \forall X \in BO\}$$

on le munit de la norme d'opérateur  $\|X\|_{J^1} = \sup_{\|Y\|_{BO} \leq 1} E(|XY|)$  ; on a :

Lemme 10 :

- $J^1$  est un espace de Banach réticulé,  $H^1 \subset J^1 \subset L^1$ ,  $\|X\|_1 \leq \|X\|_{J^1} \leq \alpha \|X\|_{K^1}$ , pour une constante  $\alpha$  ne dépendant que de la filtration
- $BO = \{Y|XY \in L^1, \forall X \in J^1\}$

Démonstration :

Que  $J^1$  soit un espace de Banach réticulé résulte de [5] page 29 par exemple,  $\|X\|_1 = \sup_{\|Y\|_\infty \leq 1} |E(XY)| \leq \sup_{\|X\|_{BO} \leq 1} E(|XY|) = \|X\|_{J^1} \leq \sup_{\|X\|_{BMO} \leq 1} E(|XY|)$  qui est une norme équivalente à  $\|X\|_{K^1}$ .

Pour montrer que  $BO = \{Y|XY \in L^1, \forall X \in J^1\}$  il suffit, d'après [5] page 30, de vérifier que  $BO$  possède la propriété de Fatou c'est à dire que, si  $(Y_n)$  est une suite croissante d'éléments positifs de  $BO$  bornée en norme  $BO$  elle converge vers une v.a.  $Y \in BO$  et  $\|Y_n\|_{BO} \rightarrow \|Y\|_{BO}$ .

Or si  $X \in J^1_+$   $E(XY) \leq \liminf E(XY_n) \leq \liminf \|X\|_{J^1} \cdot \|Y_n\|_{BO} < \infty$ , donc  $Y \in BO$ .

$$\begin{aligned} \text{De plus } \|Y\|_{BO} &= \sup_{\|X\|_{H^1} \leq 1} E(|XY|) = \sup_{\|X\|_{H^1} \leq 1} \sup_n E(|XY_n|) = \sup_n \sup_{\|X\|_{H^1} \leq 1} E(|XY_n|) \\ &= \lim_n \|Y_n\|_{BO}. \end{aligned}$$

Remarques :

- Il résulte du lemme précédent que  $BO = L^\infty \iff J^1 = L^1$ .

- Comme  $H^1$  n'est pas un espace de Riesz, il existe entre  $H^1$  et  $J^1$  de nombreux espaces intéressants, nous n'en considérons ici que deux :

$$|H^1| = \{X \in L^1 \mid |X| = |Z| \text{ pour une v.a. } Z \in H^1\}$$

$$\text{et } \overset{\sim}{H}^1 = \{X \in L^1 \mid |X| \leq \sum_{i=1}^k |Z_i|, k \in \mathbb{N}, Z_i \in H^1\}.$$

On vérifie que  $\tilde{H}^1$  est l'idéal engendré par  $H^1$  et que

$$H^1 \subset |H^1| \subset \tilde{H}^1 \subset J^1 \subset L^1.$$

Nous ignorons si l'égalité  $\tilde{H}^1 = L^1$  est valable en toute généralité bien que nous n'ayons pas réussi à la mettre en défaut, par contre nous savons qu'en général

$$H^1 \neq |H^1| \neq \tilde{H}^1.$$

Nous examinerons ce point au paragraphe suivant, au préalable nous traitons, comme Jeulin et Yor ([4] page 370), l'exemple pédagogique de [2] pages 112-113.

Exemple :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est l'espace de Lebesgue,  $\mathcal{F}_t = \sigma[0, 1-t[, \mathcal{F} \cap ]1-t, 1[)$ ,  $t \in ]0, 1[$

$$H^1 = \{f \in L^1(0, 1) \mid t \rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t f(u) du \in L^1\}$$

$$BMO = \{f \in L^1 \mid t \rightarrow f(t) - \frac{1}{t} \int_0^t f(u) du \in L^\infty\}, \quad [2]$$

$$K^1 = \{f \in L^1 \mid t \rightarrow f(t) \cdot \text{Log}(e/t) \in L^1\}$$

$$(K^1)' = \widetilde{BMO} = \{f \in L^1 \mid t \rightarrow \frac{f(t)}{\text{Log}(e/t)} \in L^\infty\}, \quad [4]$$

On a

Lemme 11 :

Dans cet exemple,  $|H^1| = \tilde{H}^1 = J^1 = L^1$  et  $B0 = L^\infty$

Démonstration :

Soit  $f \in L^1_+$ , choisissons une suite de réels  $(x_n)$  décroissant vers 0, découpons ensuite chacun des intervalles  $[x_{n+1}, x_n]$  en intervalles  $I_{n,i}$  suffisamment petits pour que  $\int_{I_{n,i}} f(u) du \leq x_{n+1}$ ; à  $n$  fixé, ces intervalles  $I_{n,i}$  sont en nombre

fini  $K_n$ . Construisons maintenant des fonctions  $\phi_{n,i}$  valant +1 ou -1 et telles que  $\int_{I_{n,i}} \phi_{n,i}(u) f(u) du = 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $i \in K_n$ .

Il suffit alors de poser  $\phi(x) = \sum_{n,i} 1_{I_{n,i}}(x) \phi_{n,i}(x)$ ; on a, si  $t \in I_{n,i}$ ,

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t \phi(u) f(u) du \right| \leq \frac{1}{x_{n+1}} \int_{I_{n,i}} f(u) du \leq 1, \quad \text{d'où } \phi f \in H^1.$$

Cet exemple possède également la curieuse propriété suivante :

Lemme 12 :

$\forall X \in H^1$ , il existe une suite  $t_n \nearrow 1$ , telle que

i)  $X|_{[1-t_n, 1]} \rightarrow X$  dans  $H^1$

ii)  $\forall Y \in BMO \quad (X|Y) = \lim_n E[XY|_{[0, t_n]}]$

Démonstration :

Posons  $f(t) = \left| \int_0^t X(u) du \right|$ , de deux choses l'une

- ou bien il existe  $t_n \nearrow 1$  telle que  $f(1-t_n) \equiv 0$ , auquel cas :

$$E^{t_n}(X) = X|_{[1-t_n, 1]} \rightarrow X \text{ dans } H^1$$

- ou bien  $f(1-t) > 0$  pour tout  $t > T$ , quitte à changer  $X$  en  $X|_{]0, 1-T]}$  on peut supposer  $T = 0$ .

Il existe alors une suite  $t_n \nearrow 1$  telle que

$$f(1-t_n) \leq f(1-t) \quad \forall t \leq t_n, \text{ on a alors}$$

$$\text{si } t \geq t_n : |E^t(X|_{[1-t_n, 1]})| = |X|_{[1-t_n, 1]}| \leq |X|$$

$$\text{si } t \leq t_n : |E^t(X|_{[1-t_n, 1]})| \leq |X|_{[1-t, 1]} + \frac{1}{1-t} [f(1-t) + f(1-t_n)]|_{]0, 1-t]} \\ \leq 2 X^*$$

d'où  $(X|_{[1-t_n, 1]})^* \leq 2 X^*$  pour tout  $n$  et comme  $X|_{[1-t_n, 1]}$  converge vers  $X$  dans  $L^1$ , le théorème 1 de [2] permet d'en déduire que  $X|_{[1-t_n, 1]} \rightarrow X$  fortement dans  $H^1$ .

La propriété ii) en résulte trivialement.

### III) Filtrations diffusantes.

#### Définitions 13 :

a) Une filtration  $(\mathcal{F}_n)$  est dite diffusante si  $\forall X \in L^\infty$  et  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe deux v.a.  $\phi$  et  $Z$  vérifiant  $|\phi| = 1$ ,  $Z \geq 0$ ,  $E(Z) \leq \varepsilon$  et telles que

$$(\phi X)^* \leq |X| + Z$$

b) Une filtration  $(\mathcal{F}_n)$  est dite faiblement diffusante si  $\forall X \in L^\infty$  et  $\forall \varepsilon > 0$  il existe une v.a.  $\phi$  vérifiant  $|\phi| = 1$  et telle que

$$\|\phi X\|_H \leq \|X\|_1 + \varepsilon$$

c) Une filtration  $(\mathcal{F}_n)$  est dite fortement diffusante si  $\forall n, \forall X \in L^\infty(\mathcal{F}_n)$ , il existe une v.a.  $\phi$  vérifiant  $|\phi| = 1$  et telle que

$$(\phi X)^* = |X|$$

#### Propriétés des filtrations diffusantes.

1) (Communication personnelle de T. Jeulin) ; dans les définitions 13a et 13b, on peut remplacer " $\forall X \in L^\infty$ " par " $\forall X = 1_A$  avec  $A \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ ".

#### Démonstration :

On ne traite que le cas diffusant (13.a), le cas (13.b) étant analogue.

Soit  $X \in L^\infty$  et  $\varepsilon > 0$ , choisissons une v.a.  $X'$  étagée mesurable par rapport à l'algèbre et telle que  $\|X' - X\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{6}$ .

Soit  $\phi$  et  $Z'$  les v.a., vérifiant  $(\phi X')^* \leq |X'| + Z'$  et  $E(Z') \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , dont l'existence est assurée par hypothèse. On a alors :

$$(\phi X)^* \leq (\phi X')^* + |X' - X|^* \leq |X'| + |X' - X| + |X' - X|^* + Z'$$

et  $Z = |X' - X| + |X' - X|^* + Z'$  vérifie  $E(Z) \leq \varepsilon$  (inégalité de Doob)

2) Dans les 3 définitions précédentes, on peut remplacer " $\forall X \in L^\infty$ " par " $\forall X \in L^1$ "

#### Démonstration :

On ne traite que le cas faiblement diffusant, les autres cas étant analogues.

Soit  $X \in L^1_+$  et  $\varepsilon > 0$ , posons  $X_n = X 1_{\{n \leq X < n+1\}}$ , choisissons  $(\varepsilon_n)$  de sorte que  $\sum_n \varepsilon_n = \varepsilon$ , appelons  $\phi_n$  la v.a. associée à  $X_n, \varepsilon_n$  vérifiant :

$$\|\phi_n X_n\|_H \leq \|X_n\|_1 + \varepsilon_n$$

posons  $\phi = \sum_n \phi_n 1_{\{n \leq X < n+1\}}$ , on a :

$$\|\phi X\|_H^1 \leq \sum_n \|\phi_n X_n\|_H^1 \leq \sum_n \|X_n\|_1 + \varepsilon = \|X\|_1 + \varepsilon.$$

3) Dans les définitions 13, c)  $\implies$  a)  $\implies$  b) (cf. propriété 1)

4) Si  $(\mathcal{F}_n)$  est faiblement diffusante :

$$\|H^1\| = \|\tilde{H}^1\| = \|J^1\| = \|L^1\| \text{ et } B0 = L^\infty \quad (\text{cf. propriété 2})$$

Remarque :

- L'expression "la filtration  $(\mathcal{F}_n)$  est diffusante" est impropre (mais com-mode) en effet les définitions 13 font intervenir la probabilité  $P$  de façon cruciale ; nous avons d'ailleurs choisi l'adjectif diffusant précisément parce qu'il évoquait à la fois une propriété de mesure et de "filtre".

Exemples de filtrations diffusantes.

1) La filtration de l'exemple de [2] considérée à la fin du paragraphe II est fortement diffusante, on a même :

$$\forall f \in L^1 \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \text{ il existe une v.a. } \phi \text{ à valeurs } \{-1, +1\} \text{ vérifiant:}$$

$$(\phi f)^* \leq |f| + \varepsilon$$

Démonstration :

Le même argument que celui donné dans la démonstration du lemme 11 montre que si  $f \in L^1$  et  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver une v.a.  $\phi$  à valeurs  $\{-1, +1\}$  vérifiant :

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t \phi(u) f(u) du \right| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \in ]0, 1], \text{ il en résulte :}$$

$$|E^t(\phi f)| = \left| \frac{1}{1-t} \int_0^{1-t} \phi(u) f(u) du \right| 1_{]0, 1-t[} + |f| 1_{]1-t, 1[}$$

$$\leq |f| + \varepsilon$$

2) Les filtrations naturelles des p.a.i. sont fortement diffusantes.

Démonstration :

Soit  $X \in L_+^1(\mathcal{F}_t)$  et soit  $\phi$  une variable à valeurs  $\{-1, +1\}$ , mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{F}_{(t, \infty)}$  des accroissements après  $t$  et d'espérance nulle,

$$\text{on a : } E[\phi X | \mathcal{F}_u] = X E[\phi | \mathcal{F}_u] \text{ si } u > t$$

$$= E(\phi) E[X | \mathcal{F}_u] = 0 \text{ si } u \leq t$$

d'où  $(\phi X)^* \leq X$  et par conséquent  $(\phi X)^* = X$  ; on conclut en utilisant la propriété 1).

3) Si  $\mathcal{F}$  est une tribu non-atomique et si, pour tout  $n$ ,  $\mathcal{F}_n$  est engendrée par un nombre fini d'atomes, la filtration  $(\mathcal{F}_n)$  est fortement diffusante.

Démonstration :

Soit  $X \in L^\infty(\mathcal{F}_N)$ , on a :  $|E^n(\phi X)| = |X| \cdot |E^n(\phi)| \leq |X|$  pour tout  $n \leq N$  et toute v.a.  $\phi$  à valeurs  $\{-1, +1\}$ .

Choisissons maintenant  $\phi$  de sorte que  $E^N(\phi X) = 0$ , ce qui est possible sous les hypothèses considérées, on a donc :

$E^n(\phi X) = 0$  pour tout  $n \leq N$ , ce qui achève la démonstration.

- A l'opposé des filtrations diffusantes, il existe des filtrations qui maintiennent autour de  $H^1$  des espaces résiduels de martingales ; c'est en particulier le cas lorsque la tribu finale  $\mathcal{F}$  est atomique, nous détaillons ce point sur un exemple.

Nous supposons jusqu'à la fin de ce paragraphe que  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $P$  est une probabilité chargeant tous les entiers et  $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n-1\})$ .

Il est clair que ce type de filtrations n'est pas diffusant, il est, cependant, suffisamment régulier pour que l'idéal engendré par  $H^1$  soit  $L^1$  tout entier :

Proposition 14 :

$$\tilde{H}_1 = L^1$$

Démonstration :

Soit  $X \in L^1_+(\mathbb{N}, P)$ , nous allons montrer que  $X \leq |Z_1| + |Z_2|$  avec  $Z_1$  et  $Z_2 \in H^1$

Posons pour  $n \geq 0$ ,

$$\begin{cases} Z_1(2n) = X(2n) \\ Z_1(2n+1) = -\frac{X(2n)}{P(2n+1)} P(2n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Z_2(2n) = -\frac{X(2n+1)}{P(2n)} P(2n+1) \\ Z_2(2n+1) = X(2n+1) \end{cases}$$

Il est clair que  $Z_1$  et  $Z_2 \in L^1$  et que  $X \leq |Z_1| + |Z_2|$ .

On vérifie aisément que  $Z_i^* \leq |Z_i| + \sup_n \frac{X(n) P(n)}{P([n, \infty))} 1_{[n, \infty)}$ ,  $i = 1$  et  $2$ .

Posons  $\alpha_n = \frac{X(n) P(n)}{P([n, \infty))}$  et considérons la suite (éventuellement finie)  $(\alpha_{n_i})$  des

records successifs de la suite  $(\alpha_n)$  :  $\alpha_{n_i} \geq \alpha_k$  pour  $n_i \leq k < n_{i+1}$ .

On a  $E(\sup_n \alpha_n 1_{[n, \infty)}) \leq \sum_i \alpha_{n_i} P([n_i, n_{i+1}[) \leq \sum_{n_i} X(n_i) \leq E(X)$  et par conséquent

$Z_1$  et  $Z_2$  appartiennent à  $H^1$ .

- Cependant, en général, l'espace  $|H^1|$  est plus petit que  $L^1$  :

Proposition 15 :

Il existe des probabilités  $P$  telles que  $|H^1| \neq L^1$

Démonstration :

Choisissons  $P(n) = \frac{1}{2^{n+1}}$  et considérons la v.a.  $X \in L_+^1$  définie par

$$X(n) = \begin{cases} \frac{1}{q! 2^{q!}} & \text{si } n \text{ est de la forme } q! \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $\phi$  une fonction quelconque de  $\mathbb{N}$  dans  $\{-1, +1\}$ , on vérifie que si  $(q-1)! < n \leq q!$ , on a :

$$(\phi X)^*(n) \geq |E^n \phi X|(n) \geq \left| \frac{1}{q!} + O\left(\frac{1}{q!}\right) \right| 2^{n+1} - X(n).$$

D'où visiblement  $E(\phi X)^* = \infty$ .

IV) Filtrations régulières.

Une filtration  $(\mathcal{F}_n)$  est dite régulière, si pour tout  $n$ ,  $\mathcal{F}_n$  est engendrée par un nombre fini d'atomes et s'il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $X \in L_+^1$  et tout  $n$

$$E^n(X) \leq c E^{n-1}(X) \quad [7], [3].$$

Dans ce paragraphe, nous considérons une filtration régulière  $(\mathcal{F}_n)$  et nous supposons, en outre, que  $\mathcal{F}_0$  est triviale.

Soit  $X \in L_+^1$  on a :

outre l'inégalité maximale (qui est toujours vraie) :

$$(1) \quad t P\{X^* > t\} \leq \int_{\{X^* > t\}} X \, dP$$

l'inégalité maximale inverse, [3] p. 86-88

$$(2) \quad \int_{\{X^* > t\}} X \, dP \leq t P\{X^* > t\} + E(X) 1_{\{t < E(X)\}}.$$

Soit  $U$ , une fonction de Young, c'est à dire une fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ , croissante, convexe, nulle en 0, et de densité  $u$  infinie à l'infini, nous convenons de choisir toujours la version continue à gauche de  $u$ . Nous notons  $v$  l'inverse continue à gauche de  $u$ , la conjuguée  $V$  de  $U$  est la primitive nulle en 0 de  $v$ , c'est une fonction de Young vérifiant  $Vou(x) = xu(x) - U(x)$ .

En intégrant les deux inégalités précédentes par rapport à la mesure  $du(t)$  il vient :

$$(1') \quad E[Vou(X^*)] \leq E[u(X^*) \cdot X]$$

$$(2') \quad E[Xu(X)] \leq E[Vou(X^*)] + E(X) u[E(X)]$$

qui impliquent à leur tour :

$$(1'') \quad E[Vou(\frac{X^*}{2})] \leq E[U(X)], \quad \text{voir [3], [7]}$$

$$(2'') \quad E[U(X)] \leq E[Vou(X^*)] + E(X) u[E(X)]$$

On note  $L^U = \{X \in L^1 \mid \exists \rho \text{ tel que } E[U(\frac{|X|}{\rho})] < \infty\}$  l'espace d'Orlicz associé à  $U$ , on le munit de la norme de Luxemburg

$$\|X\|_{(U)} = \inf\{\rho > 0 \mid E[U(\frac{|X|}{\rho})] < \infty\}$$

On introduit en outre les espaces

$$H^U = \{X \in L^1 \mid X^* \in L^U\} \text{ que l'on munit de la norme } \|X\|_{H^U} = \|X^*\|_{(U)}$$

et  $K^U = \{X \in L^1 \mid |X| \in H^U\}$  muni de la norme  $\|X\|_{K^U} = \| |X| \|_{H^U}$ .



On vérifie que  $H^U$  et  $K^U$  sont des espaces de Banach et que  $K^U$  est un espace de Banach réticulé, convexe pour l'ordre dès que  $L^U$  l'est aussi (c'est-à-dire (11) lorsque  $U$  est modérée).

Rappelons, [1] lemme 15, que si  $U$  est une fonction de Young, il existe une fonction de Young  $U_1$ , "dominant"  $U$  et vérifiant

$$U = V_1 \circ U_1, \text{ dans lequel } V_1 \text{ et } u_1 \text{ désignant la conjuguée et la densité de } U_1.$$

Les inégalités (1'') et (2'') montrent alors :

Lemme 16 :

$$\left[ \begin{array}{l} K^U = L^{U_1} \end{array} \right.$$

Exemples :

- Si  $U(x) = x$ , on a  $U_1(x) = x \text{ Log}^+ x$  et par conséquent

$$H^U = H^1, \quad K^U = K^1 = L \text{ Log} L \quad \text{et} \quad \widetilde{BMO} = (K^1)' = e^L.$$

- Si  $U(x) = x \text{ Log}^+ x$ , on a  $U_1(x) = x(\text{Log}^+ x)^2$  et par conséquent

$$H^U = "H \text{ Log} H" \quad \text{et} \quad K^U = L(\text{Log} L)^2 \quad \text{cf. [1]}.$$

etc.....

Le théorème 18 de [1] montrent maintenant :

Proposition 17 :

Les énoncés suivants sont équivalents :

(i)  $U$  est comoderée

(ii)  $L^U = H^U = K^U$

Enfin, en remarquant que toute filtration régulière est diffusante (exemple 3), on obtient avec des notations évidentes et en supposant  $U$  modérée, de sorte que  $(L^U)' = L^V$  (seul cas intéressant) :

Proposition 18 :

- Soit  $\varepsilon > 0$  et  $X \in L^U_+$ , il existe deux v.a.  $\phi$  et  $Z$ , vérifiant  $|\phi| = 1$  et  $\|Z\|_{(U)} \leq \varepsilon$ , telles que

$$(\phi X)^* \leq X + Z$$

$$B0(U) = L^V \quad \text{et} \quad \widehat{H}^U = J^U = L^U = |H^U|.$$

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] B.BRU et H. HEINICH : Isométries positives et propriétés ergodiques de quelques espaces de Banach, à paraître aux Annales de l'I.H.P. (1980).
- [2] C. DELLACHERIE,  
P.A. MEYER et M. YOR : Sur certaines propriétés des espaces de Banach  $H^1$  et BMO, Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Math. 649, Springer Verlag, 1978.
- [3] A. GARSIA : Martingale Inequalities, Benjamin, Reading Mass. 1973.
- [4] T. JEULIN et M. YOR : Sur l'expression de la dualité entre  $H^1$  et BMO, Séminaire de Probabilités XIII, Lecture Notes in Math 721, Springer Verlag, 1979.
- [5] J. LINDENSTAUSS et  
L. TZAFRIRI : Classical Banach Spaces II, Springer Verlag, 1979.
- [6] W.A.J. LUXEMBURG et  
A.C. ZAAENEN : Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam Londres, 1971.
- [7] J. NEVEU : Discrete Parameter Martingales, North Holland, Amsterdam Londres, 1975.

COMPLEMENT A L'EXPOSE PRECEDENT.

SUR UN RESULTAT DE M.TALAGRAND.

par J.C.LOOTGIETER.

Sous l'hypothèse que les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n$  soient dénombrablement engendrées, M.Talagrand vient de démontrer le résultat suivant ([1]) :

Théorème : Pour toute fonction h réelle mesurable sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , l'on a :

$$(1) \|h\|_{\infty} \leq 2 \sup\{E(|hf|) : \|f\|_1 \leq 1\}.$$

Ce théorème assure en particulier que  $B_0 = L^{\infty}$ . La démonstration de (1) que nous proposons, différente de celle de M.Talagrand, est remarquablement simple et ne nécessite pas que les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n$  soient dénombrablement engendrées.

Démonstration : Comme le souligne M.Talagrand dans [1], il suffit de se limiter au cas où  $h=1_A$  avec  $P(A) > 0$  ; nous convenons que " $B \in \mathcal{F}_n$ " signifie que  $B \in \mathcal{F}_n$  à un ensemble  $(\mathcal{F}, P)$  négligeable près. Le cas où  $A \in \mathcal{F}_0$  est trivial (prendre  $f=1_A/P(A)$ ). Supposons dorénavant que  $A \notin \mathcal{F}_0$ . Fixons  $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$ , et introduisons, pour tout  $n \geq 0$ , l'ensemble

$$C_n = \{E^n(1_A) \geq 1-\epsilon\}.$$

Considérons, pour tout  $n \geq 0$ , l'entier  $m(n)$  défini par

$$m(n) = \inf\{m : C_n \in \mathcal{F}_m\}.$$

Il est clair que  $0 \leq m(n) \leq n$  ; comme, suivant un argument de martingale,  $C_n \rightarrow A$  presque-sûrement et que, par hypothèse,  $A \notin \mathcal{F}_0$ , on voit qu'il existe un  $n_0$  tel que  $m(n_0) > 0$ . La définition de  $m(n_0)$  assure que  $E(|1_{C_{n_0}} - E^{m(n_0)-1}(1_{C_{n_0}})|) > 0$  ;

posons alors

$$g = 1_{C_{n_0}} - E^{m(n_0)-1}(1_{C_{n_0}}), \text{ puis } f = g/E(|g|).$$

Il est clair que  $E(f) = 0$  et  $E(|f|) = 1$ , d'où  $E(f^+) = 1/2$  ; il va de soi que  $f^+$  coïncide avec  $f$  sur  $C_{n_0}$  et est égale à 0 sur  $\Omega \setminus C_{n_0}$ . D'autre part, comme

$C_{n_0} \in \mathcal{F}_{m(n_0)}$ , on voit que

$$E^n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m(n_0), \\ f & \text{si } n \geq m(n_0). \end{cases}$$

Par suite  $\|f\|_1 = 1$ . Enfin, on a successivement :

$$\begin{aligned} E(1_A | f) &= E(E^{n_0}(1_A) | f) \text{ (puisque } f \text{ est } \mathcal{F}_{n_0}\text{-mesurable),} \\ &\geq (1-\epsilon)E(1_{C_{n_0}} | f) \text{ (suite à la définition des } C_n), \\ &\geq \frac{1-\epsilon}{2} \text{ (suite aux considérations sur } f^+) \end{aligned}$$

N.B. L'extension de l'inégalité (1) au cas d'une filtration  $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$  (T désignant un intervalle de  $\mathbb{R}$ ) croissante et continue à droite est, à notre connaissance, ouverte.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M.TALAGRAND : Sur l'espace  $H^1$  (manuscrit).

Note de la rédaction : Nous regrettons vivement de n'avoir pu inclure ici, pour des raisons d'ordre pratique, ce travail de Talagrand, qui paraîtra sans doute au Séminaire de Théorie du Potentiel.