SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

Application d'un lemme de Jeulin au grossissement de la filtration brownienne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 189-199

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__189_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

APPLICATION D'UN LEMME DE T.JEULIN AU GROSSISSEMENT DE LA FILTRATION BROWNIENNE.

M.YOR

1. INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME :

$(\Omega,\mathcal{A},P)$ désigne l'espace de probabilité de référence. Soient $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ deux filtrations [1] composées de sous-tribus de $\mathcal{A}$, et vérifiant : $\forall t, \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$. L'espace $\mathcal{L}$ des $\mathcal{F}$-martingales de carré intégrable qui sont également des $\mathcal{G}$-martingales est un $\mathcal{F}$-espace stable (i.e : stable, relativement à la filtration $\mathcal{F}$). Il découle de cette remarque que, pour que l'hypothèse : (H) toute $\mathcal{F}$-martingale est une $\mathcal{G}$-martingale soit réalisée, il suffit (et il est évidemment nécessaire) qu'elle soit vérifiée par une famille génératrice de l'espace des $\mathcal{F}$-martingales de carré intégrable (considéré comme $\mathcal{F}$-espace stable).

Il n'en est pas de même (voir ci-dessous) lorsque l'on s'intéresse à l'hypothèse : (H') toute $\mathcal{F}$-martingale est une $\mathcal{G}$-martingale.

Dans la suite, - μ est une probabilité sur $[0,\infty[$, telle que $\int_0^\infty \mu(dx)x < \infty$, qui est supposée, dans tout l'exposé, différente de ε_0 (le cas $\mu = \varepsilon_0$ est trivial). - $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration donnée, et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel, nul en 0.

- $(\mathcal{F}^\mu_t)_{t\geq 0}$ est la plus petite filtration contenant $\mathcal{F}$ et telle que le processus $(I^\mu_t = \int_{]t,\infty]} B_s d\mu(s), t\geq 0)$ soit $\mathcal{F}^\mu$-adapté.

---

(1) toutes les filtrations considérées ici satisfont -sauf mention contraire- les conditions habituelles.

L'objet de cette Note est d'étudier la propriété (H') pour le couple $(\mathcal{F},\mathcal{F}^\mu)$ et, plus précisément, de caractériser les $\mathcal{F}$-martingales locales qui sont des $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingales.

En [2], K.Ito a montré que $(B_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingale lorsque $\mu = \varepsilon_1$ (voir aussi [4]), et $\mu(ds)=1_{[0,1]}(s)\,ds$, et a posé -sous une forme légèrement différente- la question de savoir si (H') est vérifiée pour le couple $(\mathcal{F},\mathcal{F}^\mu)$. D'après [4], la réponse est négative pour $\mu = \varepsilon_1$; de façon générale, il résulte de la suite de l'article que (H') est vérifiée -dans ce cadre- si, et seulement si, $\mu(\neq \varepsilon_0!)$ n'est pas à support compact.

Signalons enfin que la méthode de démonstration employée ci-dessous est tout à fait différente de celle faite en [4], qui reposait essentiellement sur l'inégalité de Hardy dans L^2. Ici, c'est un lemme dû à T.Jeulin [3] qui joue le rôle essentiel (voir le paragraphe 3).

2. LE CAS OU μ EST A SUPPORT COMPACT.

Enonçons tout d'abord un lemme préliminaire qui nous permettra de nous restreindre dans la suite à l'étude des $(\mathcal{F}_t)$ martingales locales qui sont intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien B.

Lemme 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel issu de 0, et $(U_t)_{t\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) U et B sont orthogonales, ie : UB est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale.

ii) U est une martingale locale -réduite à l'aide de $(\mathcal{F}_t)$ de temps d'arrêt- par rapport à la filtration $(\mathcal{F}'_t=\bigcap_{(\varepsilon>0)}(\mathcal{F}_{t+\varepsilon}\vee\mathcal{B}_\infty))$, où $\mathcal{B}_\infty=\sigma\{B_s, s\in\mathbb{R}_+\}$.

Si l'une de ces conditions est réalisée, U est a fortiori une martingale locale par rapport à toute filtration $(\mathcal{G}_t)$ telle que : $\forall\, t, \mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{G}_t\subseteq\mathcal{F}'_t$.

Démonstration : Par arrêt (à l'aide de $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt), on peut supposer que U est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale uniformément intégrable.

i)$\Longrightarrow$ ii) Grâce à la continuité à droite (dans L^1) du processus U, il suffit de montrer : $\forall\, s < t$, $\forall\, f_s \in b(\mathcal{F}_s)$, $\forall M_\infty \in b(\mathcal{B}_\infty)$,

$$E[U_t M_\infty f_s] = E[U_s M_\infty f_s].$$

Notons $(\mathcal{B}_t)$ la filtration naturelle de $\mathcal{B}$. La $(\mathcal{B}_t)$ martingale $M_t \overset{def}{=} E[M_\infty|\mathcal{B}_t]$ est la somme d'une constante et d'une intégrale stochastique par rapport à $\mathcal{B}$: c'est donc une $(\mathcal{F}_t)$ martingale, égale à $E[M_\infty|\mathcal{F}_t]$, et qui est, de plus, orthogonale à U.

On a donc :

$$E[U_t M_\infty f_s] = E[U_t M_t f_s] = E[U_s M_s f_s] = E[U_s M_\infty f_s].$$

ii)$\Longrightarrow$ i) Par hypothèse, on a :

$\forall s < t$, $\forall f_s \in b(\mathcal{F}_s)$, $\forall M_\infty \in b(\mathcal{B}_\infty)$,

$E[U_t M_\infty f_s] = E[U_s M_\infty f_s]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $T_n = \inf\{t \geq 0 / |B_t| \geq n\}$, et posons :

$M_\infty = B_{t \wedge T_n}$. Il vient alors :

$E[U_t B_{t\wedge T_n} f_s] = E[U_s B_{t\wedge T_n} f_s]$, et donc : $E[(UB)_{t\wedge T_n} f_s] = E[(UB)_{s\wedge T_n} f_s]$, ie : (UB) est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale. La fin du lemme est évidente.

Revenons à l'étude du couple $(\mathcal{F},\mathcal{F}^\mu)$; notons $a(<\infty)$ la borne supérieure du support de μ, et $\bar{\mu}(u) = \mu(]u,\infty[)$, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1. Si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale qui se décompose en : $X = \int_0^\cdot \phi_s dB_s + U$, avec ϕ processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible tel que : $\forall t, \int_0^t \phi^2(s)ds < \infty$ Pp.s, et U $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale orthogonale à B, alors, X est une $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingale si, et seulement si,

$$(1)\quad \int_0^a ds|\phi_s|\bar{\mu}(s)\left\{\int_s^a du(\bar{\mu}(u))^2\right\}^{-1/2} < \infty \text{ , Pp.s.}$$

De plus, si cette condition est réalisée, l'intégrale

$$(2)\quad \int_0^a ds|\phi_s| \frac{\bar{\mu}(s)}{\int_s^a du(\bar{\mu}(u))^2} \left| \int_{]s,a]} (B_u - B_s)d\mu(u) \right| \text{ est finie Pp.s, et}$$

$$(3)\quad X_t - \int_0^{t\wedge a} ds\phi_s \frac{\bar{\mu}(s)}{\int_s^a du(\bar{\mu}(u))^2} \{\int_{]s,a]} (B_u - B_s)d\mu(u)\}$$

est une $\mathcal{F}^\mu$-martingale locale.

Avant de poursuivre, il est aisé de remarquer que, pour $0\leq s\leq a$, la variable $J_s^\mu = \int_{]s,a]} (B_u - B_s)d\mu(u)$ est gaussienne, centrée, et a pour variance

$$\gamma_s^\mu = \int_s^a du(\bar{\mu}(u))^2.$$

Enonçons les principales conséquences du théorème 1, que l'on démontrera au paragraphe 3.

Corollaire 1.1 : Le $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B est une $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingale si, et seulement si : $A_\mu \overset{\text{def}}{=} \int_0^a ds\, \bar{\mu}(s)(\gamma_s^\mu)^{-1/2} < \infty$.

La condition : $A_\mu < \infty$ est réalisée dès qu'il existe une constante $c > 0$ et α, avec $0<\alpha<a$, tels que :

$$\forall s \in [\alpha,a],\quad \bar{\mu}\left(\frac{s+a}{2}\right) \geq c\bar{\mu}(s)$$

Enfin il existe des probabilités μ à support compact telles que : $A_\mu = \infty$.

Démonstration : La première assertion découle immédiatement du théorème 1, appliqué à $X = B$. Pour la seconde, on minore, pour $s \in [\alpha,a]$, l'intégrale $\int_s^a du(\bar{\mu}(u))^2$ par $\int_s^{\frac{s+a}{2}} du(\bar{\mu}(u))^2 \geq c^2\left(\frac{a-s}{2}\right)(\bar{\mu}(s))^2$, et, finalement, au voisinage de a, l'intégrand qui figure dans la définition de A_μ est majoré par $\frac{\sqrt{2}}{c(a-s)^{1/2}}$, ce qui entraîne : $A_\mu < \infty$.

Enfin, la question de l'existence de μ à support compact telle que $A_\mu = \infty$ est résolue si l'on exhibe une fonction f continue, décroissante sur $[1/2,1]$,

avec $f(1) = 0$, et $\int_{1/2}^{1} du \frac{\sqrt{f(u)}}{(\int_u^1 f(v)dv)^{1/2}} = \infty$.

Or, la fonction $f(u) = e^{-1/(1-u)} \frac{1}{(1-u)^2}$ satisfait ces conditions.

Corollaire 1.2 : Soit $\mu(\neq \varepsilon_0)$ une probabilité sur $[0,\infty[$, à support compact. L'hypothèse (H') n'est pas vérifiée pour le couple $(\mathcal{F},\mathcal{F}^\mu)$.

Démonstration : Si l'hypothèse (H') était vérifiée, on aurait, pour toute fonction (déterministe) $f \in L^2[0,a]$:

$$\int_0^a ds|f(s)|\frac{\bar{\mu}(s)}{\sqrt{\gamma_s^\mu}} < \infty$$

ce qui équivaut à :

$$\int_0^a ds(\bar{\mu}(s))^2(\gamma_s^\mu)^{-1} < \infty \text{ . Or ceci, n'est pas puisque :}$$

$$\frac{(\bar{\mu}(s))^2}{\gamma_s^\mu} \geq \frac{1}{(a-s)}$$

3. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Nous procédons par étapes.

Etape 1. Notons $f^\mu(s) = \sqrt{\gamma_s^\mu}$, et $Y_t = \int_0^t f^\mu(s)dB_s$ $(t \geq 0)$.

Montrons tout d'abord que $(Y_t,\ t \leq a)$ est une $(\mathcal{G}_t^\mu, t \leq a)$ quasi-martingale, ce qui entraînera que $(Y_t,\ t \geq 0)$ est une $(\mathcal{G}_t^\mu,\ t \geq 0)$ semi-martingale. Pour cela, posons : $\mathcal{G}_t^\mu = \mathcal{F}_t \vee \sigma\{I_s^\mu, s \leq t\}$

$$= \mathcal{F}_t \vee \sigma\{I_t^\mu\} = \mathcal{F}_t \vee \sigma\{\int_{]t,a]} (B_u - B_t)d\mu(u)\}, \text{ et remarquons que}$$

$$\mathcal{F}_t^\mu = \mathcal{G}_{t+}^\mu .$$

Soient s et t deux nombres réels tels que : $0 < s < t < a$. Le processus de Wiener $(B_{u+s} - B_s,\ u \geq 0)$ étant indépendant de $\mathcal{F}_s$, on a :

$$E[Y_t - Y_s | \mathcal{G}_s^\mu] = E[Y_t - Y_s | J_s^\mu]$$

$$= \alpha_{s,t} J_s^\mu$$

où $\alpha_{s,t}$ désigne le nombre réel déterminé par l'égalité suivante :

$$\alpha_{s,t} \gamma_s^\mu = E\left[(Y_t - Y_s) \int_{]s,a]} (B_u - B_s) d\mu(u)\right]$$

$$(4) \qquad = \int_{]s,t]} d\mu(u) \int_s^u f^\mu(v)dv + \left(\int_s^t f^\mu(v)dv\right)\bar{\mu}(t).$$

En remplaçant $\mathcal{G}_s^\mu$ par $\mathcal{G}_{s+\varepsilon}^\mu$, et en faisant tendre ε vers 0, il vient :

$$E[Y_t - Y_s | \mathcal{F}_s^\mu] = \alpha_{s,t} J_s^\mu,$$

soit encore, si l'on note, pour $h > 0$, $p_h Y$ la projection $\mathcal{F}^\mu$-optionnelle de $(Y_{s+h}, s \geq 0)$:

$$(p_h Y)_s - Y_s = \alpha_{s,s+h} J_s^\mu \qquad (s < a).$$

D'après Stricker [6], une condition nécessaire et suffisante pour que $(Y_t, t \leq a)$ soit une $(\mathcal{F}_t^\mu)_{t \leq a}$ quasi-martingale est que $\sup_{a>h>0} C_h^\mu < \infty$, où

$$C_h^\mu = \frac{1}{h} E\left(\int_0^{a-h} |(p_h Y)_s - Y_s| ds\right).$$

Or,

$$C_h^\mu = \frac{1}{h} \int_0^{a-h} ds \alpha_{s,s+h} E|J_s^\mu|$$

$$= \frac{c}{h} \int_0^{a-h} ds(\alpha_{s,s+h}) \sqrt{\gamma_s^\mu} \qquad (c = \sqrt{2/\pi}).$$

Il découle alors de (4) que $C_h^\mu \leq c \int_0^a ds\bar{\mu}(s) < \infty$, d'où le résultat.

Etape 2. Notons A l'unique processus continu, nul en 0, à variation finie sur tout compact, et adapté à $(\mathcal{F}_t^\mu)$ tel que Y - A soit une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ martingale locale. Le but de cette étape est d'expliciter A.

On a bien sûr : $A_t = A_{t\wedge a}$. D'autre part, le processus $(Y_t, t\leq a)$ étant une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ quasi-martingale, et vérifiant : $E[\sup_{t\leq a} |Y_t|]<\infty$, une légère modification du théorème 54, p121 et 122, de Dellacherie [1], ou de celui de Meyer [5], p.157, permet d'écrire : $A_t = L^1\text{-}\lim_{(h\to 0)} A_t^h \quad (t<a)$, où :

$$A_t^h = \frac{1}{h}\int_0^t [(p_h Y)_s - Y_s]ds = \int_0^t \frac{\alpha_{s,s+h}}{h} J_s^\mu ds.$$

Or, $\frac{1}{h}\alpha_{s,s+h} \xrightarrow[(h\to 0)]{} \frac{\bar{\mu}(s)}{f^\mu(s)}$, et l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée relativement à la mesure $1_{[0,t]}(s)\,ds$, puis à P, à l'aide de la majoration :

$\left|\frac{1}{h}\alpha_{s,s+h} J_s^\mu\right| \leq \frac{|J_s^\mu|}{f^\mu(s)}$, la variable $(\frac{J_s^\mu}{f^\mu(s)})$ étant normale réduite centrée.

Finalement, on obtient : $A_t = \int_0^{t\wedge a} ds \frac{\bar{\mu}(s)}{f^\mu(s)} J_s^\mu$.

(Dans la suite, on note N= Y-A).

Etape 3. Soit $X_t = \int_0^t \phi_s dB_s$, avec ϕ processus $\mathcal{F}$-prévisible tel que :

$\forall t, \int_0^t \phi^2(s)ds<\infty$ Pp.s. (d'après le lemme 1, il suffit de considérer ces $\mathcal{F}$-martingales locales). On veut montrer ici que :

i) X est une $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingale si, et seulement si, l'intégrale figurant en (2), soit : $\int_0^a ds|\phi_s|\frac{\bar{\mu}(s)}{\gamma_s^\mu}|J_s^\mu|$, est finie Pp.s.

ii) si cette condition est réalisée, $X_t - \int_0^{t\wedge a} ds\phi_s \frac{\bar{\mu}(s)}{\gamma^\mu(s)} J_s^\mu$ est une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ martingale locale.

On peut clairement prendre pour intervalle de temps $T = [0,a]$.

Si $X_t = \int_0^t \phi_s \, dB_s$, on a aussi, en posant $\psi_s = \phi_s / f^{\mu}(s) \, 1_{(s<a)}$, $X_t = \int_0^t \psi_s dY_s$,

pour tout $t \leq a$.

- Si ψ est borné, l'intégrale stochastique de ψ par rapport à Y ne dépend pas de la filtration par rapport à laquelle Y est une semi-martingale. On peut donc écrire, avec les notations de l'étape 2 :

$$(*) \quad X_t = \int_0^t \psi_s \, dN_s + \int_0^t \psi_s \, dA_s \qquad (t \geq 0).$$

- Si on suppose seulement que, pour tout t, $\int_0^t \psi_s^2 \, d\langle Y, Y \rangle_s < \infty$ Pp.s, un passage à la limite (portant sur ψ , pour la convergence en probabilité) permet de montrer que la formule (*) est encore valide pour tout $t \leq a$.

- Supposons maintenant que X est une $(\mathcal{F}_t^{\mu})$ semi-martingale. D'après (*), l'unique processus C continu, nul en 0, à variation finie, tel que :

X - C soit une $(\mathcal{F}_t^{\mu})$ martingale locale vérifie :

$\forall t < a, \quad C_t = \int_0^t \psi_s \, dA_s$.

Cette égalité se prolonge par continuité à (t = a) ; en particulier,

$$\int_0^a |dC_s| = \int_0^a |\psi_s| |dA_s| < \infty \text{ Pp.s,}$$

i.e : l'intégrale figurant en (2) est finie Pp.s.

De même, le processus défini par (3) est une $(\mathcal{F}_t^{\mu})$ martingale locale.

- Inversement, si $\int_0^a |\psi_s| |dA_s| < \infty$ Pp.s, le processus

$(\int_0^a \psi_s dA_s, \; t \geq 0)$ est à variation finie sur tout compact, et l'égalité (*) se prolonge par continuité à tout $t \leq a$. En conséquence, X est une $(\mathcal{F}_t^{\mu})$ semi-martingale, et $(X_t - \int_0^t \psi_s dA_s, \; t \geq 0)$ une $(\mathcal{F}_t^{\mu})$ martingale locale.

Etape 4. Il nous reste à montrer que : $\int_0^a ds|\phi_s|\frac{\bar{\mu}(s)}{\sqrt{\gamma^\mu_s}} < \infty$ Pp.s, si et seulement si : $\int_0^a ds|\phi_s|\frac{\bar{\mu}(s)}{\gamma^\mu_s}|\ J^\mu_s\ | < \infty$ Pp.s.

Comme cela a été annoncé dans l'introduction, c'est le résultat suivant, dû à T.Jeulin [3], qui sert ici, ainsi que pour d'autres exemples de grossissement (cf [3]) d'outil fondamental.

Lemme 2 : $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ désigne un espace de probabilité filtré usuel, et $(K_t)_{t\geq 0}$ un processus croissant $(\mathcal{F}_t)$ prévisible.

Soit $(R_t,t\geq 0)$ un processus mesurable positif qui vérifie la propriété suivante :

Il existe une probabilité λ sur $[0,\infty[$ telle que :

$\int\lambda(dx)x < \infty$; $\lambda\{0\}= 0$; et :

pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, borélienne, bornée :

(5) $\quad {}^{(p)}_{\infty}(f(R))_t = \int\lambda(dx)f(x)$, pour $t\in \text{supp}(K)$

Alors, $(\int_0^\infty R_s dK_s < \infty) = (K_\infty < \infty)$ Pp.s.

Quitte à faire le changement de temps : $t\to\frac{at}{(1+t)}$, on peut évidemment prendre pour intervalle de temps $T = [0,a[$. Le résultat cherché découle alors du lemme de Jeulin appliqué au processus croissant

$K_t = \int_0^t ds|\phi_s|\frac{\bar{\mu}(s)}{\sqrt{\gamma^\mu_s}}$, et au processus $R_t = \frac{1}{\sqrt{\gamma^\mu_t}}|J^\mu_t|$, qui vérifie (5), avec

$\lambda(dx) = \sqrt{2/\pi}\ \ dx\ e^{-x^2/2}$

4. LE CAS OU μ N'EST PAS A SUPPORT COMPACT.

Dans ce cas, la fonction continue (γ^μ_s) est strictement positive, et donc bornée inférieurement par un réel positif, non nul, sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

Aussi, les difficultés rencontrées au paragraphe 3 disparaissent, et, reprenant la démonstration précédente avec a = ∞, on obtient le :

Théorème 2 : Si μ n'est pas à support compact, la propriété (H') est vérifiée pour le couple $(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\mu})$.

De plus, si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale qui se décompose en : X=φ.B+U, avec φ processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible, et U $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale orthogonale à B, le processus :

$$X_t - \int_0^t ds\phi_s \frac{\bar{\mu}(s)}{\int_s^{\infty} du(\bar{\mu}(u))^2} \{\int_{]s,\infty[} (B_u - B_s)d\mu(u)\}$$ est une $(\mathcal{F}^{\mu}_t)_{t\geq 0}$ martingale locale.

Remarque : Là encore, le lemme de Jeulin permet d'obtenir des précisions intéressantes.

Si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale, on note X = M + C sa $\mathcal{F}^{\mu}$-décomposition canonique (M est une $\mathcal{F}^{\mu}$-martingale locale ; C un processus à variation finie, continu, nul en 0).

Si l'on reprend la démonstration du corollaire 1.2, il apparaît que pour que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale de carré intégrable X = M + C vérifie $\int_0^{\infty} |dC_s| < \infty$ Pp.s, il est nécessaire que $\int_0^{\infty} ds \frac{(\bar{\mu}(s))^2}{\int_s^{\infty} du(\bar{\mu}(u))^2} < \infty$.

Or, ceci n'est pas possible, cette dernière intégrale de Riemann étant égale à $+\infty = -\log F(\infty) + \log F(0)$, si $F(u) \overset{def}{=} \int_u^{\infty} dv(\bar{\mu}(v))^2$. A fortiori, il n'est pas vrai que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale de carré intégrable soit une $(\mathcal{F}^{\mu}_t)$ semi-martingale de H^1.

REFERENCES :

[1] C.Dellacherie : Capacités et processus stochastiques.
Springer-Verlag (1972)

[2] K.Ito : Extension of stochastic integrals.
Proc. of Intern. Symp. SDE. Kyoto (1976), p.95-109.

[3] T.Jeulin : Conditions nécessaires et suffisantes pour le grossissement d'une filtration (à paraître).

[4] T.Jeulin et M.Yor : Inégalité de Hardy, semi-martingales et faux-amis.
Sém. Proba. Strasbourg XIII, Lect. Notes in Maths., 721
Springer (1979).

[5] P.A.Meyer : Probabilités et potentiel.
Hermann, Paris (1966).

[6] C.Stricker : Une caractérisation des quasi-martingales.
Sém. Proba. Strasbourg IX, Lect. Notes in Maths 465,
Springer (1975).

Note ajoutée au texte initial (Décembre 1979) :

La bonne présentation - selon la terminologie de D. Williams - est de grossir la filtration $(\mathcal{F}_t)$ avec une variable générique (que l'on peut supposer centrée) de l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien (B_t), soit $\int_0^\infty f(s)dB_s \quad (f \in L^2(\mathbb{R}_+, ds))$.

J'espère présenter, aussitôt que possible, cette généralisation des résultats qui figurent dans le présent article, en indiquant dès maintenant que la version "générale" est très voisine de la version "restreinte".