MICHEL BRUNEAU

Sur la p-variation d'une surmartingale continue

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 227-232
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__227_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SUR LA p-VARIATION D'UNE SURMARTINGALE CONTINUE

par Michel BRUNEAU

On sait que si $X=(X_t)$ est une surmartingale continue, les trajectoires de X sont p.s. à p-variation localement bornée (p>2). Etant donné un nombre $\lambda>0$, désignons par $T_\lambda(\omega)$ le premier instant $t\geqq 0$ où $|X_t(\omega)-X_0(\omega)|\geqq\lambda$; nous obtenons une majoration de l'espérance mathématique de la p-variation de X entre les instants 0 et T_λ. Les remarques de C. Stricker nous ont été précieuses ; nous l'en remercions.

I. p-VARIATION DES TRAJECTOIRES D'UNE SURMARTINGALE

A) Condition de Lipschitz d'ordre α et p-variation. I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne d'ordre α ($0<\alpha\leqq 1$) s'il existe un nombre $\gamma\geqq 0$ pour lequel

(1) $$|f(y)-f(x)| \leqq \gamma|y-x|^\alpha \qquad (x,y \in I)$$

L'ensemble de ces fonctions est noté $\Lambda_\alpha(I)$ (Λ_α si $I=\mathbb{R}_+$).

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite à p-variation bornée ou brièvement à p-v.b. ($p\geqq 1$) si le nombre

(2) $$v_p(f) = \sup \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1})-f(t_i)|^p ,$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble de toutes les suites $t_1<t_2\dots<t_n$ dans I, est fini ; l'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{B}_p(I)$ ($\mathcal{B}_p$ si $I=\mathbb{R}_+$).

Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite localement à p-v.b. si, pour tout $t\geqq 0$, la fonction $f|_{[0,t]}$ appartient à $\mathcal{B}_p([0,t])$; l'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{B}_p^{loc}$. Pour tout $p\geqq 1$ il est clair que $\Lambda_{1/p} \subset \mathcal{B}_p^{loc}$. Plus précisément

PROPOSITION 1. - Une c.n.s. pour qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ soit localement à p-v.b. ($p\geqq 1$) est qu'il existe un homéomorphisme φ de $\mathbb{R}_+$ tel que $f\circ\varphi^{-1} \in \Lambda_{1/p}$.

Il suffit de prendre

(3) $$\varphi(t) = t + v_p(f|_{[0,t]}) \qquad (t\geqq 0) .$$

Notation. - Soit une fonction : : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}_+$ et tout nombre $p\geqq 1$, on pose

(4) $$v_p(f,I) = v_p(f|_I) .$$

B) <u>Temps d'arrêt</u> T_λ .- $(\Omega,\mathcal{F},P)$ est un espace de probabilité complet, muni d'une filtration continue à droite $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$; $\mathcal{F}_0$ contient les parties négligeables. $X=(X_t)$ est un processus réel défini sur $\mathbb{R}_+$, adapté à $(\mathcal{F}_t)$, à trajectoires continues. Pour tout temps d'arrêt T de la famille $(\mathcal{F}_t)$, il est clair que <u>l'application</u>

(5) $$v_p(X,\ [0,T])\ :\ \omega\in\Omega \longrightarrow v_p(\ X_\cdot(\omega),\ [0,T(\omega)]\cap\mathbb{R}_+\ )$$

<u>est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable</u>. Nous allons appliquer cette remarque à la famille des temps d'arrêt $(T_\lambda)_{\lambda\geqq 0}$ définis comme suit :

(6) $$T_\lambda(\omega) = \inf\ \{\ t\geqq 0\ |\ \ |X_t(\omega)-X_0(\omega)|\geqq\lambda\ \}\qquad (\omega\in\Omega\ )$$

avec la convention que $\inf\emptyset = +\infty$.

C) p-VARIATION D'UNE SURMARTINGALE CONTINUE.- Le but de cet article est de prouver :

THEOREME.- <u>Soit</u> X <u>une surmartingale continue</u>. <u>Quels que soient</u> $\lambda\geqq 0$, $p>2$, <u>on a</u>

(7) $$E[\ v_p(X,\ [0,T_\lambda])\ ] \leqq \frac{16\ 8^{\frac{p}{2}}}{(1-2^{1-\frac{p}{2}}\ )^2}\ \lambda^p$$

Nous allons voir que ce résultat est une conséquence du théorème d'arrêt de Doob, et plus précisément des inégalités de Doob portant sur le nombre des montées d'une surmartingale. La démonstration se fera en deux étapes dont la plus importante, la première, sera déterministe.

II - NOMBRES DE MONTEES ET p-VARIATION.

A) <u>Appartenance à $\mathcal{B}_p^{loc}$ et nombre de montées</u>.- Soient $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle de $\mathbb{R}_+$, $a<b$ deux nombres. Le <u>nombre de montées</u> de $f|_I$ sur $[a,b]$ est la borne supérieure des nombres $n\in\mathbb{N}$ tels qu'il existe une suite dans I

$$t_1 < t_2 \ldots < t_{2n-1} < t_{2n}$$

telle que

(8) $$f(t_{2i-1}) < a\quad ,\quad f(t_{2i}) > b\qquad \text{pour } 1\leqq i\leqq n\ .$$

Ce nombre est noté $M(f,I,\ [a,b])$. On pose $M_t(f,[a,b])$ pour $M(f,[0,t],[a,b])$. On définit semblablement les nombres $M_t(f,]a,b[)$ en remplaçant dans (8) les inégalités au sens strict par des inégalités au sens large. Maintenant, pour tout $h>0$ et tout t, on pose

(9) $$M_t(1,h) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} M_t(f,\ ]kh,\ (k+1)h[)$$

Nous nous proposons d'établir :

PROPOSITION 2. Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, p un nombre $\geqq 1$. La condition suivante est nécessaire pour que $f \in \mathcal{B}_p^{loc}$, et suffisante pour que $f \in \mathcal{C}_{p+\varepsilon}^{loc}$ pour tout $\varepsilon > 0$:

il existe une fonction (continue et monotone croissante) $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$(10) \qquad M_t(f,h) \leqq \frac{c(t)}{h^p} \qquad (t \geqq 0,\ h > 0) .$$

Montrons d'abord que la condition (10) est nécessaire pour que $f \in \mathcal{B}_p^{loc}$. Pour tout homéomorphisme φ de $\mathbb{R}_+$ on a naturellement

$$M_{\varphi(t)}(f \circ \varphi^{-1}, h) = M_t(f,h) \qquad (t \geqq 0,\ h > 0)$$

On peut donc supposer que $f \in \Lambda_{1/p}$. Il existe un nombre $\gamma > 0$ pour lequel

$$|f(y)-f(x)| \leqq \gamma |y-x|^{1/p} \qquad (x,y \in \mathbb{R}_+)$$

Choisissons maintenant $h > 0$ et $t \geqq 0$. Posons $\ell = (\frac{h}{\gamma})^p$. On désire majorer les termes de la suite

$$(11) \qquad n_k = M_{t \wedge k\ell}(f,h) \qquad (k \in \mathbb{N}) .$$

Compte tenu de la condition de Lipschitz, on a $n_k \leqq k$. Ainsi, k_0 désignant la partie entière de t/ℓ

$$M_t(f,h) = n_{k_0+1} \leqq k_0 + 1 \leqq \frac{t}{\ell} + 1 \quad ;$$

soit

$$M_t(f,h) \leqq (\frac{\gamma}{h})^p\, t + 1$$

Or si $h > \gamma t^{1/p}$, $M_t(f,h) = 0$, et si $h \leqq \gamma t^{1/p}$, on a $1 \leqq (\frac{\gamma}{h})^p t$. On peut donc choisir

$$c(t) = 2\gamma^p t .$$

La réciproque occupera le sous-paragraphe suivant.

B) Une majoration effective de la p-variation.

LEMME 1. Soient une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et des nombres $t \geqq 0$, $1 \leqq q \leqq p$. On a

$$(12) \qquad v_p(f,[0,t]) \leqq \frac{2^{p+q+1}}{1-2^{q-p}} (2c_{q,\lambda} + 1)\lambda^p$$

où

$$(13) \qquad \lambda \geqq \sup_{0 \leqq s \leqq t} |f(s)-f(0)|$$

et

$$(14) \qquad c_{q,\lambda}(t) = \sup_{k \in \mathbb{N}} 2^{-kq} M_t(f, \lambda 2^{-k}) .$$

On peut pour simplifier supposer que $f(0)=0$ et poser $c_{q,\lambda}(t) = c$. On peut admettre tout de suite que $\lambda \neq 0$ et $c < +\infty$, car sinon il n'y a rien à démontrer. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la suite

$$t_{k,0} < t_{k,1} < \dots < t_{k,n_k}$$

définie par

$$t_{k,0}=0$$
$$t_{k,1}=\inf\ \{ s \mid |f(s)| = \lambda 2^{-k} \}$$
$$t_{k,2}=\inf\ \{ s \mid s \geqq t_{k,1}\ ,\ |f(s)-f(t_{k,1})| = \lambda 2^{-k} \}$$
$$\cdots$$
$$t_{k,i}=\inf\ \{ s \mid s \geqq t_{k,i-1},\ |f(s)-f(t_{k,i-1})| = \lambda 2^{-k} \}$$
$$\cdots$$

et
$$\sup_{t_{n_k} \leqq s \leqq t} |f(s)-f(t_{n_k})| < \lambda 2^{-k} .$$

On sait que

(15) $$n_k \leqq 2M_t(f,\lambda 2^{-k}) + 2^k \leqq c\ 2^{kq+1} + 2^k .$$

Il existe alors un homéomorphisme φ_k de $\mathbb{R}_+$ tel que $\varphi_k(t)=2t$ et

(16) $$\varphi_k(t_{k,i}) = \frac{it}{n_k} \qquad (1 \leqq i \leqq n_k) .$$

Considérons alors deux points $x<y$ de $[0,t]$. On suppose que k est le plus petit entier tel qu'il existe un indice $1 \leqq i \leqq n_k$ pour lequel

(17) $$x \leqq t_{k,i-1} < t_{k,i} \leqq y .$$

On a
$$|f(y)-f(x)| \leqq \lambda 2^{-k+2}$$

donc, en utilisant (15) et (16),

$$\begin{aligned} |f(y)-f(x)|^p &\leqq (\lambda 2^{-k+2})^p \leqq 4^p 2^{-k(p-q)} \frac{2c}{n_k}\ \lambda^p + 4^p 2^{-k(p-1)} \frac{\lambda^p}{n_k} \\ &\leqq \frac{4^p}{t}(2c+1)\lambda^p 2^{-k(p-q)}\ \frac{t}{n_k} \\ &= \frac{4^p}{t}(2c+1)\lambda^p 2^{-k(p-q)}(\varphi_k(t_{k,i})-\varphi_k(t_{k,i-1})) . \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (17)

(18) $$|f(y)-f(x)|^p \leqq \frac{4^p}{t}(2c+1)\lambda^p 2^{-k(p-q)}(\varphi_k(y)-\varphi_k(x))$$

Dans ces conditions

(19) $$\varphi(s)= \frac{1}{2}\ \frac{1-2^{-(p-q)}}{2^{-(p-q)}}\ \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(p-q)} \varphi_k(s) \qquad (0 \leqq s \leqq t)$$

est un homéomorphisme de $[0,t]$ pour lequel $f\circ\varphi^{-1} \in \Lambda_{1/p}([0,t])$. De façon précise, quels que soient x,y dans $[0,t]$,

(20) $$|g(y)-g(x)| \leqq \gamma |y-x|^{1/p}$$

où $g=f\circ\varphi^{-1}$ et

(21) $$\gamma = \left(\frac{2^{p+q+1}}{1-2^{q-p}}\quad \frac{2c+1}{t}\ \lambda^p \right)^{1/p}$$

Finalement
$$v_p(f,[0,t]) = v_p(f\circ\varphi^{-1},[0,t]) \leqq \gamma^p t = \frac{2^{p+q+1}}{1-2^{q-p}}\ (2c+1)\lambda^p .$$

III. INEGALITES DE DOOB ET p-VARIATION

A) Nombre de montées pour une surmartingale continue. Soit $X=(X_t)$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)$, à trajectoires continues. Pour tout temps d'arrêt T de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et tout $h>0$, l'application

(22) $$M_T(X,h) \,:\, \omega\in\Omega \longrightarrow M_{T(\omega)}(X_.(\omega),h)$$

est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable. Alors

LEMME 2. Soit $X=(X_t)$ une surmartingale continue. Quels que soient $\lambda\geqq 0$, $q>2$, on a

(23) $$E[c_{q,\lambda}] \leqq \frac{2^{3-q}}{1-2^{2-q}}$$

où

(24) $$c_{q,\lambda} = \sup_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kq} M_{T_\lambda}(X,\lambda 2^{-k})$$

Fixons $\lambda\geqq 0$ et $q>2$. L'inégalité classique de Doob (*) sur les nombres de montées permet, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout i, $-2^k<i\leqq 2^k$, de majorer

$$E[M_{T_\lambda}(\,X,\ ](i-1)\lambda 2^{-k},i\lambda 2^{-k}[)\,] \leqq \frac{(-\lambda - (i-1)\lambda 2^{-k})^-}{\lambda 2^{-k}} = 2^k+i-1$$

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$E[M_{T_\lambda}(X,\lambda 2^{-k})] = \sum_{-2^k+1}^{2^k} E[\,M_{T_\lambda}(X,\ ](i-1)\lambda 2^{-k},i\lambda 2^{-k}[)\,] \leqq 2^{2k+1}$$

Alors

$$E[\,2^{-kq}M_{T_\lambda}(X,\ \lambda 2^{-k})\,] \leqq 2^{1-k(q-2)}$$

et finalement

$$E[c_{q,\lambda}] \leqq \sum_{k\in\mathbb{N}} E[\,2^{-kq}M_{T_\lambda}(X,\lambda 2^{-k})] \leqq \frac{2^{3-q}}{1-2^{2-q}} \quad .$$

B) Preuve du théorème. Fixons $\lambda\geqq 0$ et $p>q>2$. Il résulte du lemme 1 que

(25) $$v_p(X,\ [0,T_\lambda]) \leqq \frac{2^{p+q+1}}{1-2^{q-p}}\,(2c_{q,\lambda}+1)\lambda^p$$

Or, compte tenu du lemme 2,

$$E[c_{q,\lambda}] \leqq \frac{2^{3-q}}{1-2^{2-q}} \quad .$$

Par conséquent

(26) $$E[v_p(X,\ [0,T_\lambda])\,] \leqq \frac{2^{p+q+3}}{(1-2^{q-p})(1-2^{2-q})}\,\lambda^p$$

d'où l'on déduit (7) en prenant $q=\frac{p}{2}+1$.

REFERENCES

(*) P.A. MEYER. Probabilités et Potentiel. Hermann, Paris, 1966.

Michel Bruneau
Département de Mathématiques
Université Mohammed V
Avenue Ibn Battouta
RABAT (MAROC).